This is a digital copy of a book that was preserved for generations on library shelves before it was carefully scanned by Google as part of a project to make the world's books discoverable online.

It has survived long enough for the copyright to expire and the book to enter the public domain. A public domain book is one that was never subject to copyright or whose legal copyright term has expired. Whether a book is in the public domain may vary country to country. Public domain books are our gateways to the past, representing a wealth of history, culture and knowledge that's often difficult to discover.

Marks, notations and other marginalia present in the original volume will appear in this file - a reminder of this book's long journey from the publisher to a library and finally to you.

Usage guidelines

Google is proud to partner with libraries to digitize public domain materials and make them widely accessible. Public domain books belong to the public and we are merely their custodians. Nevertheless, this work is expensive, so in order to keep providing this resource, we have taken steps to prevent abuse by commercial parties, including placing technical restrictions on automated querying.

We also ask that you:

+ *Make non-commercial use of the files* We designed Google Book Search for use by individuals, and we request that you use these files for personal, non-commercial purposes.

+ *Refrain from automated querying* Do not send automated queries of any sort to Google's system: If you are conducting research on machine translation, optical character recognition or other areas where access to a large amount of text is helpful, please contact us. We encourage the use of public domain materials for these purposes and may be able to help.

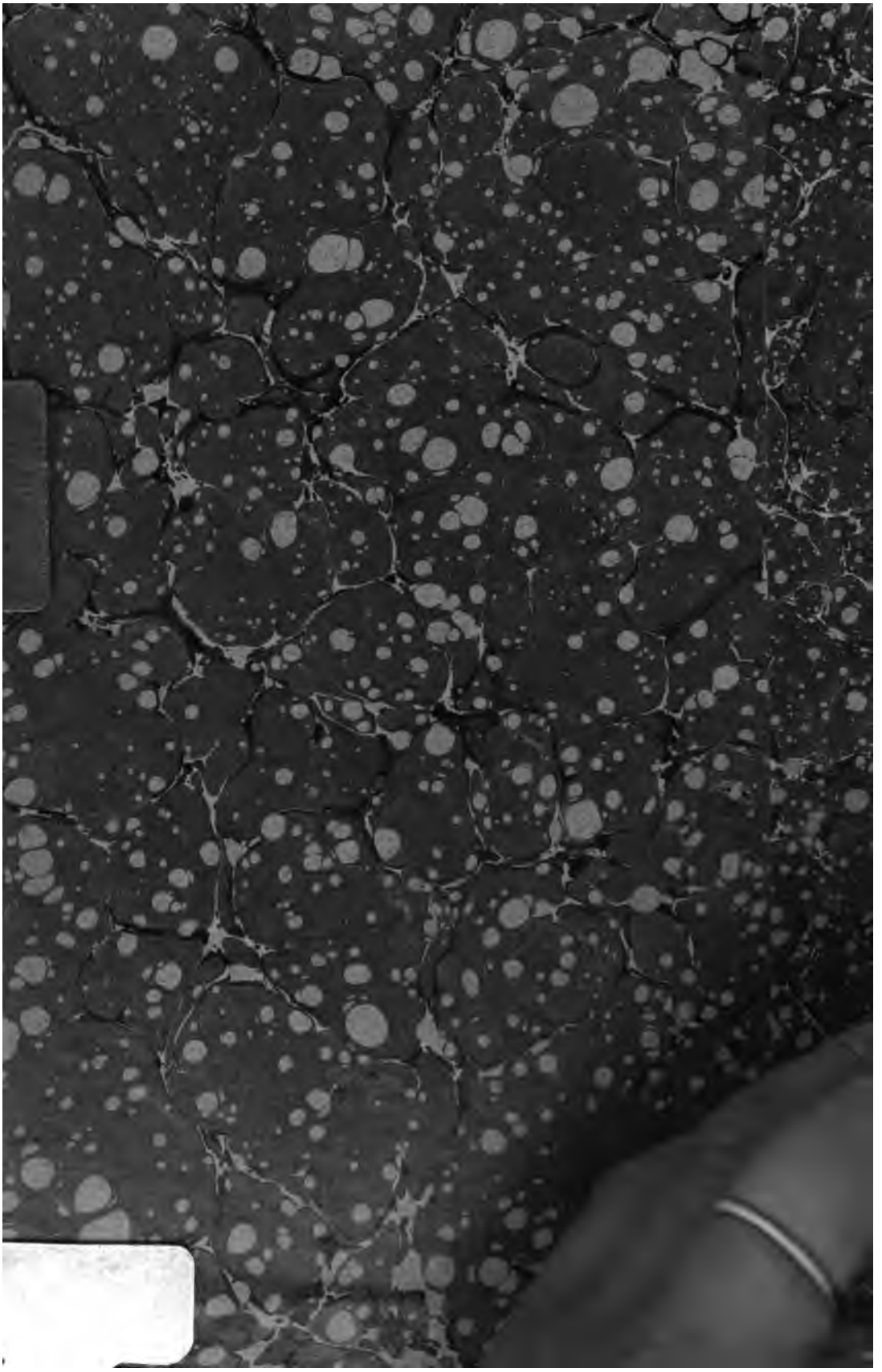
+ *Maintain attribution* The Google "watermark" you see on each file is essential for informing people about this project and helping them find additional materials through Google Book Search. Please do not remove it.

+ *Keep it legal* Whatever your use, remember that you are responsible for ensuring that what you are doing is legal. Do not assume that just because we believe a book is in the public domain for users in the United States, that the work is also in the public domain for users in other countries. Whether a book is still in copyright varies from country to country, and we can't offer guidance on whether any specific use of any specific book is allowed. Please do not assume that a book's appearance in Google Book Search means it can be used in any manner anywhere in the world. Copyright infringement liability can be quite severe.

About Google Book Search

Google's mission is to organize the world's information and to make it universally accessible and useful. Google Book Search helps readers discover the world's books while helping authors and publishers reach new audiences. You can search through the full text of this book on the web at `http://books.google.com/`

Stanford University Libraries
3 6105 001 021 885



...tliches Tagebuch 1796—1814.

...erkungen herausgegeben

von

...KLEIN in Göttingen.

...zu ein Faksimile.

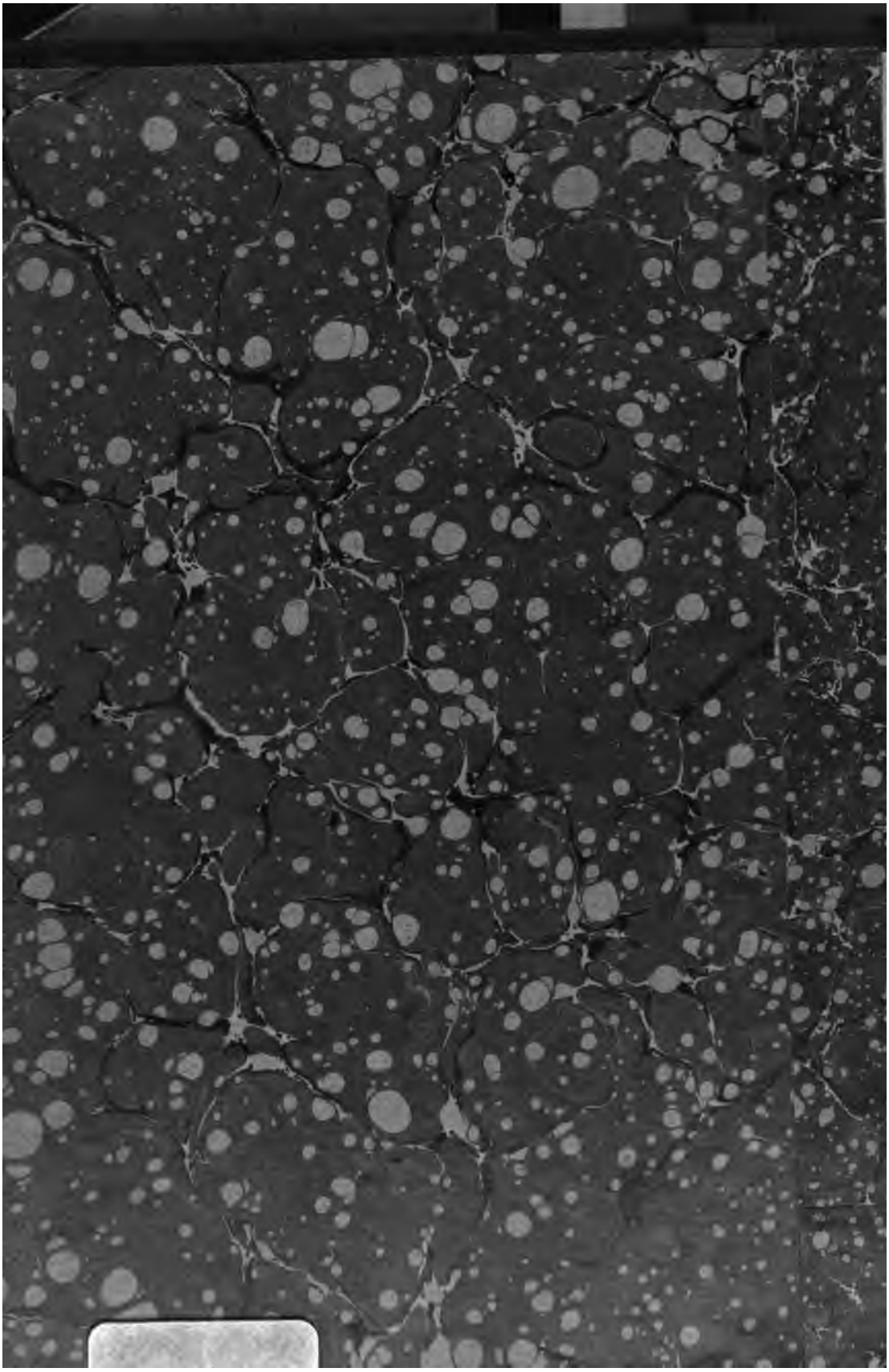
...r Feier des hundertfünfzigjährigen Bestehens der ...schaften zu Göttingen", Beiträge zur Gelehrten-...lin, Weidmann'sche Buchhandlung, 1901.

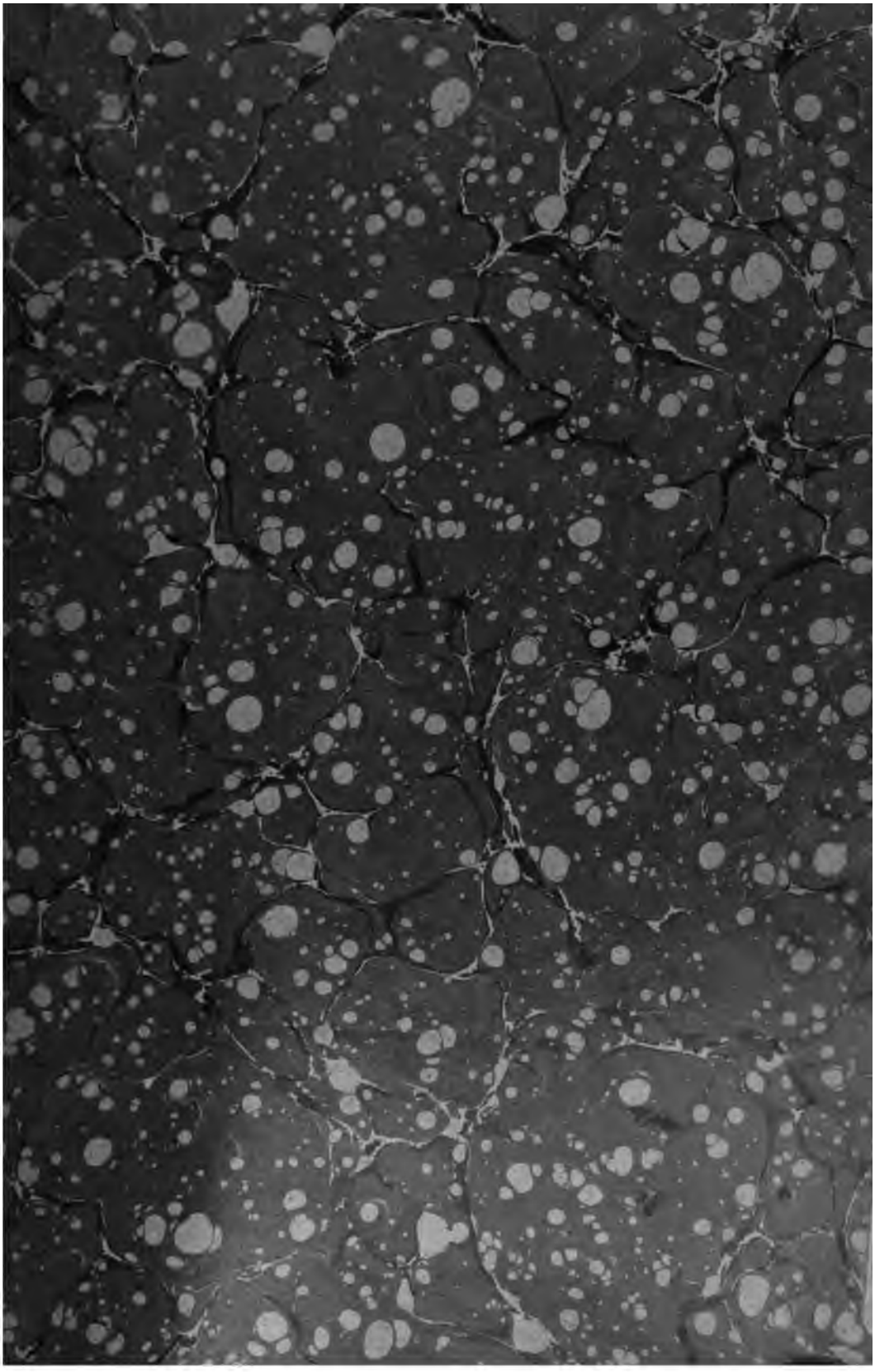
...altsübersicht.

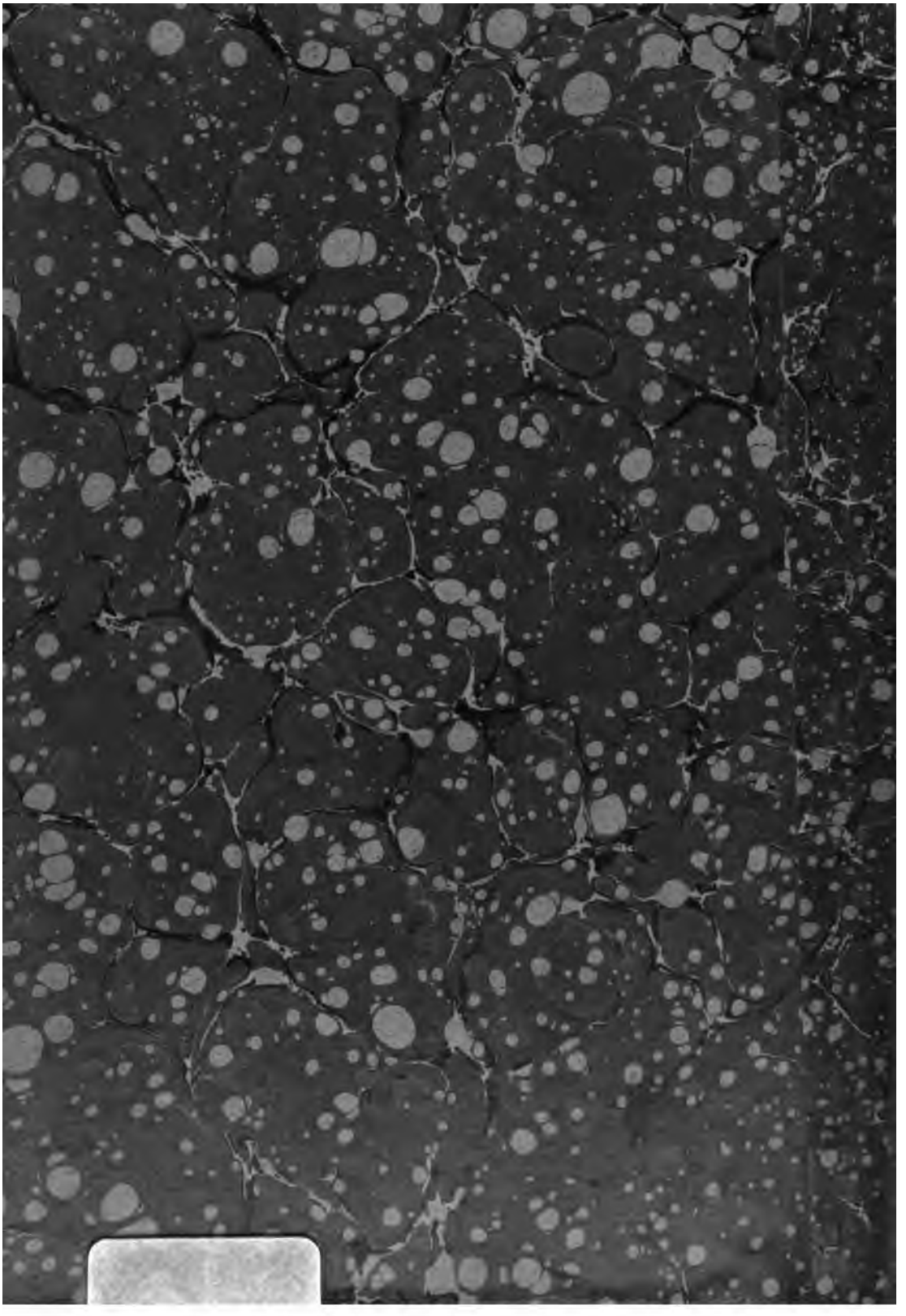
	Seite
...Klein	1
	6
	12
	19
	22
	24
	28
	29
	30
	31
	32
	33
	33

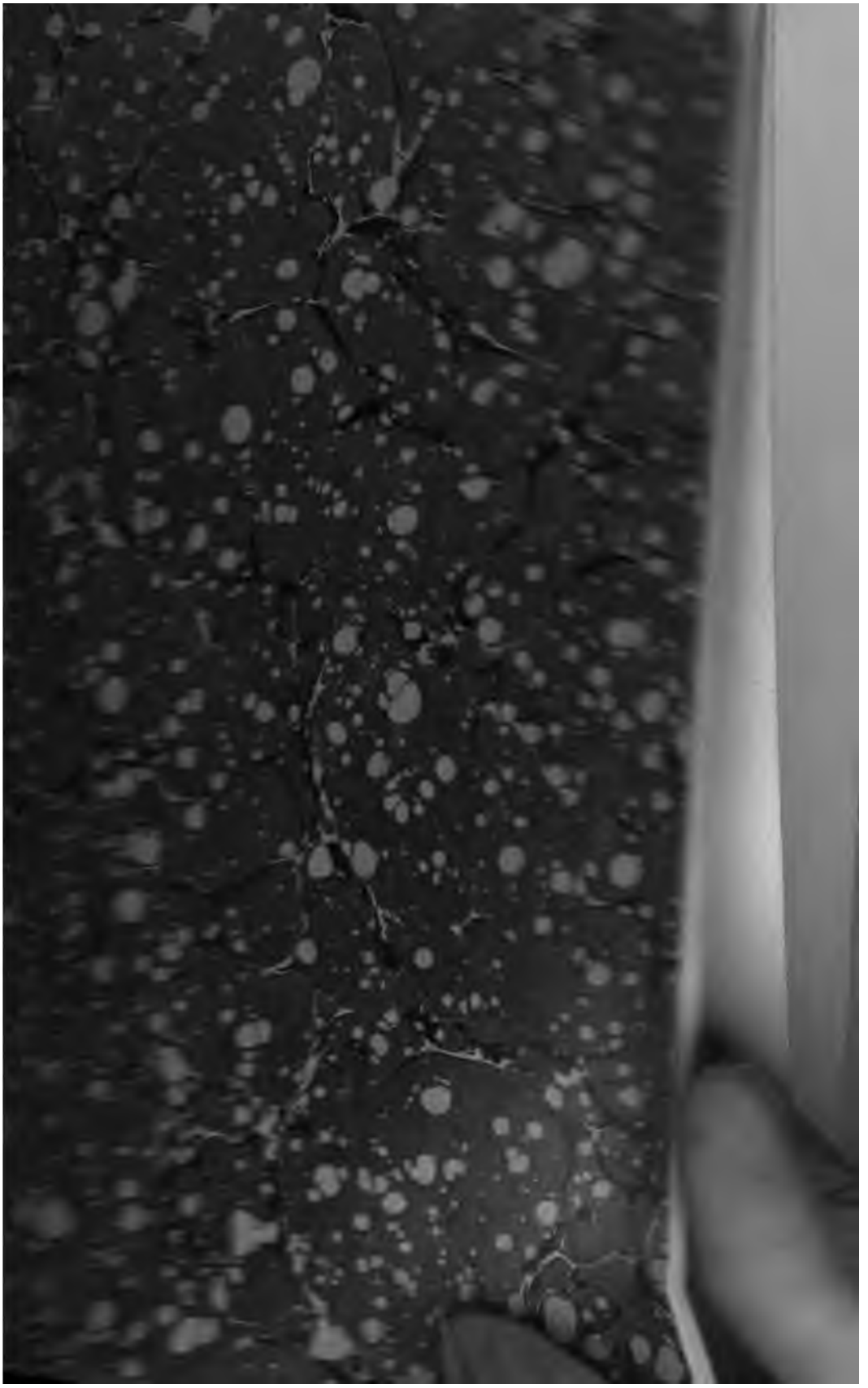
...rbemerkungen.

...eichnungen von **Gauß**, welche im folgenden ...ugend zur Veröffentlichung kommen, füllen ...n unscheinbaren Heftchen, welches sich seit ...ter vererbt hat und uns durch Vermittelung ...1898 seitens des Enkels von Gauß, des ...ur Benutzung bei der Weiterführung der ...rken zur Verfügung gestellt wurde. Herr ... Wahrung seines persönlichen Eigentums-









SMS 21

MATHEMATISCHE ANNALEN.

BEGRÜNDET 1868 DURCH

ALFRED CLEBSCH UND CARL NEUMANN.

Unter Mitwirkung der Herren

PAUL GORDAN, ADOLPH MAYER, CARL NEUMANN, MAX NOETHER,
KARL VONDERMÜHLL, HEINRICH WEBER

gegenwärtig herausgegeben

von

Felix Klein
in Göttingen

Walther v. Dyck
in München

David Hilbert
in Göttingen.

57. Band. 1. Heft.

Mit 1 Faksimile und 3 Figuren im Text.

Ausgegeben am 24. März.

LEIPZIG,
DRUCK UND VERLAG VON B. G. TEUBNER.
1903.

Neuester Verlag von **B. G. Teubner** in Leipzig.

Encyklopädie der Mathematischen Wissenschaften, mit Einschluss ihrer Anwendungen. Hrsg. im Auftrage der Akademien der Wissenschaften zu München und Wien und der Gesellschaft der Wissenschaften zu Göttingen, sowie unter Mitwirkung zahlreicher Fachgenossen. In 7 Bänden zu je 6—8 Heften. gr. 8. geh.

Bisher erschien:

I. **Arithmetik und Algebra**, red. von Frz. Meyer.
Heft: 1. [112 S.] 1898. ℳ 2.40; 3. [112 S.] 1899. ℳ 2.40; 2. [128 S.] 1899. ℳ 2.80; 4. [160 S.] 1899. ℳ 4.80; 5. [208 S.] 1900. ℳ 6.40; 6. 272 S.] 1901. ℳ 7.20; 7. [128 S.] 1902. ℳ 3.80.

II. **Analysis**, 2 Teile, red. von H. Burkhardt.
I. Teil. Heft: 2. [160 S.] 1899. ℳ 4.80; 1,5. [240 S.] 1900. ℳ 7.60; 4. [160 S.] ℳ 4.80. II. Teil. Heft: 1. [176 S.] 1901. ℳ 5.20.

III. **Geometrie**, 3 Teile, red. von Frz. Meyer.
II. Teil. Heft: 1. [160 S.] 1903. ℳ 4.80.
III. Teil. Heft: 1. [192 S.] 1901. ℳ 5.60.

IV. **Mechanik**, 2 Teile, red. von F. Klein.
I. Teil. Heft: 1. [131 S.] 1901. ℳ 3.40; 2. [156 S.] 1902. ℳ 4.60.
II. Teil. Heft: 1. [147 S.] 1901. ℳ 3.80.
[Fortsetzung von Band I—IV u. d. Presse.]

Unter der Presse:

V. **Physik**, 2 Teile, red. von A. Sommerfeld.

VI. 1: **Geodäsie u. Geophysik**, red. v. E. Wiechert.

In Vorbereitung:

VI. 2: **Astronomie**, red. von K. Schwarzschild.

VII. **Historische, philosophische und didaktische Fragen** behandelnd, sowie **Generalregister**.

Abel, Niels Henrik, Mémorial publié à l'occasion du centenaire de sa naissance. [XII u. 429 S.] 4. 1902. geh. n. ℳ 21.—

Inhalt: Niels Henrik Abel. — Par Bjørnstjerne Bjørnson. — Introduction historique. Par Elling Holst. — Correspondance d'Abel comprenant ses lettres et celles qui lui ont été adressées. — Lettres relatives à Abel. — Notes et éclaircissements sur la correspondance. — Texte original des lettres écrites par Abel au Norvégien. — Documents. Publiés par Carl Størmer. — Eclaircissements sur les documents. — Les études d'Abel et ses découvertes. Par L. Sylow.

Abhandlungen zur Geschichte der Mathematischen Wissenschaften mit Einschluss ihrer Anwendungen. Begründet von Moritz Cantor. Vierzehntes Heft. Mit 113 Figuren im Text. [VIII u. 337 S.] gr. 8. 1902. geh. n. ℳ 16.—

Inhalt: Axel Anthon Björnbo: Studien über Menelaos' Sphärik. Beiträge zur Geschichte der Sphärik und Trigonometrie der Griechen. — Ulrich Suter: Nachträge und Berichtigungen zu „Die Mathematiker und Astronomen der Araber und ihre Werke". — Karl Popp: Antonius Arnauld, der grösse Arnauld, als Mathematiker.

Bardey, Dr. Ernst, algebraische Gleichungen nebst den Resultaten und den Methoden zu ihrer Auflösung. Fünfte Auflage, bearbeitet von Ferdinand Pietzker. [XIII u. 420 S.] gr. 8. 1902. geh. n. ℳ 8.—

Berichte, Mathematische und Naturwissenschaftliche aus Ungarn. Mit Unterstützung der Ungarischen Akademie der Wissenschaften und der Kgl. Ungar. naturwissenschaftlichen Gesellschaft herausgegeben von Roland Baron Eötvös, Julius König, Karl von Than. Redigiert von Andreas Heller. 17. Band. [VII u. 364 S.] gr. 8. 1902. geh. n. ℳ 8.—

18. Band. [X u. 477 S.] gr. 8. 1903. geh.

Bolyai de Bolya, Joannes, Libellus post saeculum quam Anno MDCCCII A. D. XVIII Kalendas Januarias Claudiopoli natus est. Ad celebrandam memoriam eius immortalem. Ex consilio ordinis Mathematicorum et Naturae sculptatorum regiae Litterarum Universitatis Hungaricae Francisco-Josephinae Claudiopolitanae editus. 4. [XVI u. 154 S.] gr. 8. 1902. geh. ℳ 6.—

Braunmühl, Professor Dr. A. von, Vorlesungen über Geschichte der Trigonometrie. II. Hälfte: Von der Erfindung der Logarithmen bis auf die Gegenwart. Mit 39 Figuren im Text. [XI u. 264 S.] gr. 8. 1903. geh. ℳ 10.—

Brüsch, Dr. phil. Wilhelm, Oberlehrer, Grundriss der Elektrotechnik für technische Lehranstalten. Mit 248 Abbildungen im Text. [XI u. 168 S.] gr. 8. 1902. geh. n. ℳ 3.—

Bucherer, Dr. A. H., Privatdozent an der Universität Bonn, Elemente der Vektor-Analysis. Mit Beispielen aus der theoretischen Physik. [VI u. 91 S.] gr. 8. 1903. geh. ℳ 2.40.

Curtze, M., Urkunden zur Geschichte der Mathematik im Mittelalter und der Renaissance. In 2 Teilen. Mit zahlreichen Textfiguren. gr. 8. 1902. geh. I. Teil. [X u. 336 S.] n. ℳ 16.—; II. Teil. [IV u. 291 S.] n. ℳ 14.—

Czuber, E., Wahrscheinlichkeitsrechnung und ihre Anwendung auf Fehlerausgleichung, Statistik und Lebensversicherung. [XV u. 594 S.] gr. 8. 1903. In Leinwand geb. n. ℳ 24.—

[Fortsetzung siehe 3. Umschlagseite.]

MATHEMATISCHE ANNALEN.

BEGRÜNDET 1868 DURCH

ALFRED CLEBSCH UND CARL NEUMANN.

Unter Mitwirkung der Herren

PAUL GORDAN, ADOLPH MAYER, CARL NEUMANN, MAX NOETHER,
KARL VONDERMÜHLL, HEINRICH WEBER

gegenwärtig herausgegeben

von

Felix Klein
in Göttingen

Walther v. Dyck
in München.

David Hilbert
in Göttingen.

57. Band.

Mit 1 Faksimile und 58 Figuren im Text.

LEIPZIG,
DRUCK UND VERLAG VON B. G. TEUBNER
1903.

ALLE RECHTE, EINSCHLIESZLICH DES ÜBERSETZUNGSRECHTS, VORBEHALTEN.

Inhalt des siebenundfünfzigsten Bandes.

(In alphabetischer Ordnung.)

Seite

Blumenthal, O., in Göttingen. Zum Eliminationsproblem bei analytischen Funktionen mehrerer Veränderlicher 356

Bolza, Oskar, in Chicago. Zur zweiten Variation bei isoperimetrischen Problemen 44

—— —— —— Über das isoperimetrische Problem auf einer gegebenen Fläche 48

Boy, Werner, in Leipzig. Über die Curvatura integra und die Topologie geschlossener Flächen. (Mit 24 Figuren im Text) 151

Dehn, M., in Münster i./W. Über Zerlegung von Rechtecken in Rechtecke . 314

Faber, Georg, in München. Über die Fortsetzbarkeit gewisser Taylorscher Reihen 369

—— —— —— Über polynomische Entwickelungen 389

Hamel, Georg, in Karlsruhe. Über die Geometrieen, in denen die Geraden die Kürzesten sind. (Mit 5 Figuren im Text) 231

—— —— —— Über die Instabilität der Gleichgewichtslage eines Systems von zwei Freiheitsgraden. (Mit 4 Figuren im Text) 541

Hatzidakis, N. J., in Athen. Über partielle Integration 134

Hilbert, David, in Göttingen. Neue Begründung der Bolyai-Lobatschefskyschen Geometrie. (Mit 7 Figuren im Text) 137

Holmgren, Erik, in Upsala. Über eine Klasse von partiellen Differentialgleichungen der zweiten Ordnung 409

Hurwitz, A., in Zürich. Über die Fourierschen Konstanten integrierbarer Funktionen 425

Kagan, B., in Odessa. Über die Transformation der Polyeder 421

Kirchberger, Paul, in Weilburg an der Lahn. Über Tchebychefsche Annäherungsmethoden. (Mit 5 Figuren im Text) 509

Klein, Felix, in Göttingen. Gauß' wissenschaftliches Tagebuch 1796—1814. Mit Anmerkungen. (Hierzu 1 Faksimile) 1

—— —— —— Über den Stand der Herausgabe von Gauß' Werken. Fünfter Bericht 35

Landau, Edmund, in Berlin. Über die Darstellung definiter binärer Formen durch Quadrate 53

Lerch, M., in Freiburg (Schweiz). Zur Theorie der Gaußschen Summen . . . 554

—— —— —— Über die arithmetische Gleichung $Cl(-\Delta) = 1$ 568

London, Franz, in Breslau. Über einen Satz aus der Theorie der ebenen Kollineationen 222

Maurer, L., in Tübingen. Über die Endlichkeit der Invariantensysteme . . . 265

Minkowski, Hermann, in Göttingen. Volumen und Oberfläche 447

Pascal, Ernesto, in Pavia. Eugenio Beltrami 65

72494

Seite

Preisaufgabe der Fürstlich-Jablonowskischen Gesellschaft. Mathematisch-naturwissenschaftliche Sektion 571

Schatunowsky, S. O., in Odessa. Über den Rauminhalt der Polyeder. (Mit 7 Figuren im Text) 496

Schmidt, Erhard, in Göttingen. Über die Anzahl der Primzahlen unter gegebener Grenze 195

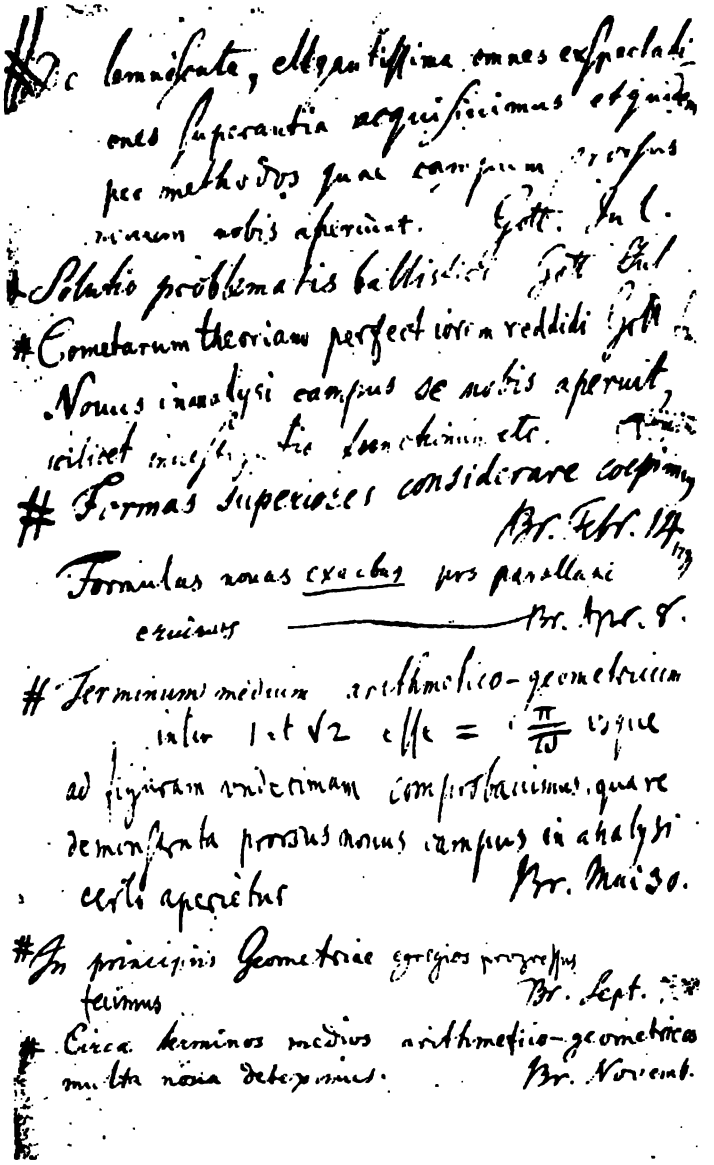
Schubert, H., in Hamburg. Über die Incidenz zweier linearer Räume beliebiger Dimensionen 209

Schur, Friedrich, in Karlsruhe. Zur Proportionslehre. (Mit 3 Figuren im Text) 205

Whittaker, E. T., in Cambridge. On the partial differential equations of mathematical physics 333

Yoshiye in Tokio. Anwendungen der Variationsrechnung auf partielle Differentialgleichungen mit zwei unabhängigen Variabeln 185

Zoll, Otto, in Göttingen. Über Flächen mit Scharen geschlossener geodätischer Linien. (Mit 3 Figuren im Text) 108



Facsimile zu Gauss' Tagebuch
(Dreizehnte Seite des Originals, Nr. 92 - 100).

Gauß' wissenschaftliches Tagebuch 1796—1814.

Mit Anmerkungen herausgegeben

von

Felix Klein in Göttingen.

Hierzu ein Faksimile.

Abgedruckt aus der „Festschrift zur Feier des hundertfünfzigjährigen Bestehens der Königlichen Gesellschaft der Wissenschaften zu Göttingen", Beiträge zur Gelehrtengeschichte Göttingens, Berlin, Weidmann'sche Buchhandlung, 1901.

Inhaltsübersicht.

Seite

Vorbemerkungen von F. Klein 1
Tagebuch 1796 6
„ 1797 12
„ 1798 19
„ 1799 22
„ 1800 24
„ 1801 28
„ 1802—1806 29
„ 1807, 1808 30
„ 1809 31
„ 1812—1813 32
„ 1814 33
Sachregister 33

Vorbemerkungen.

Die tagebuchartigen Aufzeichnungen von Gauß, welche im folgenden zum ersten Male zusammenhängend zur Veröffentlichung kommen, füllen 19 kleine Oktavseiten in einem unscheinbaren Heftchen, welches sich seit Gauß' Tode in der Familie weiter vererbt hat und uns durch Vermittelung von Herrn Stäckel im Sommer 1898 seitens des Enkels von Gauß, des Herrn C. Gauß in Hameln, zur Benutzung bei der Weiterführung der Gesamtausgabe von Gauß' Werken zur Verfügung gestellt wurde. Herr C. Gauß hat später — unter Wahrung seines persönlichen Eigentums-

rechts — in dankenswerter Weise verfügt, daß besagtes Heftchen dauernd im hiesigen Gauß-Archiv aufbewahrt werden soll.

Die außerordentliche wissenschaftliche Bedeutung dieses Tagebuchs oder *Notizenjournals* (wie es Gauß selbst gelegentlich in einem Brief an Olbers nennt; siehe Nr. 88 des folgenden Abdrucks) ist von mir bereits im zweiten derjenigen Berichte, welche ich der Kgl. Gesellschaft der Wissenschaften alljährlich über den Stand der Herausgabe von Gauß' Werken erstatte, unter Mitteilung einiger charakteristischer Stellen hervorgehoben worden,*) — sie tritt nicht minder in dem neuerschienenen Band VIII von Gauß' Werken hervor, wo wir vielfach auf die Angaben des Tagebuches rekurrieren konnten. Nach dem von der K. Gesellschaft angenommenen allgemeinen Plane für die Weiterführung der Gesamtausgabe soll dasselbe mit dem gesamten sonstigen in Betracht kommenden biographischen Material in Bd. X der Werke ausführlich publiziert und bearbeitet werden. Aber es ist bis dahin noch ein langer Weg, dessen Ende noch nicht mit Sicherheit abzusehen sein dürfte. Ich glaube also auf allgemeine Zustimmung rechnen zu dürfen, wenn ich das Tagebuch hier vorab als Beitrag zu der von der K. Gesellschaft der Wissenschaften anläßlich ihres 150jährigen Bestehens geplanten historischen Festschrift *in vorläufiger Form* veröffentliche. Die endgültige Bearbeitung in Bd. X wird damit nichts an ihrem Werte verlieren, sie wird aber dadurch, daß das Material schon jetzt zur öffentlichen Kenntnis und öffentlichen Diskussion kommt, erleichtert werden.

Zwei Dinge dürfen ja wohl gleich hier vorab hervorgehoben werden, welche dem Tagebuch einen unvergleichlichen biographischen Wert verleihen.

Das eine ist der unmittelbare, sozusagen persönliche Einblick, den wir gerade für die entscheidenden Jahre 1796—1800 in den wissenschaftlichen Werdegang des jungen Gauß gewinnen**). Da ist noch keine Spur der abgeschlossenen Reife des wissenschaftlichen Urteils oder auch der vornehmen Zurückhaltung, wie sie Gauß in späteren Lebensjahren zu eigen waren. Wichtiges und Unwichtiges wechselt ab; neben Entdeckungen von der größten Tragweite finden sich Trivialitäten, wie sie der Anfänger zu überwinden hat; überall aber tritt der persönliche Anteil, den Gauß an seinen Mühen und Erfolgen nimmt, in überquellender Weise zu Tage. Und dabei immer wieder die Eigenart seines mathematischen Genius: induktiv, an der Hand von Zahlenrechnungen, die Resultate zu finden, um hinterher langsam, in härtester Arbeit, die Beweise zu zwingen.

*) Nachrichten der K. Gesellschaft der Wissenschaften zu Göttingen 1899, Geschäftliche Mitteilungen, Heft 1. (Abgedruckt in Bd. 53 der Math. Annalen, p. 45—48.)

**) Gauß ist am 30. April 1777 geboren, war also, als er das Tagebuch am 30. März 1796 begann, noch nicht ganz 19 Jahre alt.

Das andere ist die Verknüpfung der einzelnen wissenschaftlichen Fortschritte, die Gauß gelingen, und die genaue Datierung bestimmter Entdeckungen. Man kann allerdings den Wunsch nicht unterdrücken, Gauß möchte bei seinen Aufzeichnungen mit größerer Konsequenz vorgegangen sein und sich außerdem nicht so vielfach mit bloßen Andeutungen begnügt haben. Manche Frage nach der Entstehung von Gauß' späteren mathematischen Auffassungen und Ideen wird sich auch mit Hilfe des Tagebuches niemals beantworten lassen und andererseits wird uns manche Tagebuchnotiz dauernd unverständlich bleiben. Trotzdem ist der Fortschritt, der sich aus einem genauen Vergleich der einzelnen Nummern des Tagebuches mit den erhaltenen Stücken des Nachlasses ergeben muß, zweifellos ein sehr bedeutender. Ich habe bei der folgenden Publikation als meine Hauptaufgabe angesehen, in dieser Hinsicht die Wege nur erst zu ebnen, und bin nur nach *einer* Seite weiter gegangen, indem ich nämlich das Material aus den Jahren 1797—1800 heranzog, welches sich auf die *Theorie der elliptischen Funktionen* bezieht. Das Hauptergebnis meiner betreffenden Studien findet sich in einer Fußnote zu Nr. 111 des Tagebuches (p. 26 unten); die Fachgenossen müssen entscheiden, wie weit sie dasselbe als gesicherten Besitz acceptieren und dementsprechend die bisher geltende Auffassung abändern wollen.

Hinsichtlich der Art der im folgenden gegebenen Veröffentlichung und der hinzugefügten Bemerkungen mögen übrigens folgende Angaben vorausgeschickt werden.

Zunächst, was die Notizen des Tagebuches selbst betrifft, so habe ich mich bei deren Wiedergabe keineswegs genau an die Äußerlichkeiten des Originals gebunden. Vor allen Dingen habe ich im Interesse der Übersichtlichkeit und der bequemeren Bezugnahme die sämtlichen Sätze durchlaufend numeriert (siehe auch das auf p. 33, 34 abgedruckte Sachregister). Die Angaben über Ort und Zeit wurden möglichst gleichförmig gestaltet, und auch dem Text, wo es wünschenswert schien, hin und wieder ein Wort oder eine Silbe (die dann in eckige Klammern [—] eingeschlossen sind) hinzugefügt. Leicht erkennbare sprachliche Unrichtigkeiten wurden kurzweg verbessert. Die Formeln wurden herausgehoben und in moderner Weise gedruckt. Einer Anzahl Nummern wurden horizontale Striche zugesetzt; dieselben sollen in freier Form gewisse Marken von wechselnder Gestalt reproduzieren, welche Gauß den einzelnen Notizen vorangestellt hat, um deren Wichtigkeit hervorzuheben. Eine große Zahl der Notizen, insbesondere derjenigen zahlentheoretischen Inhalts, ist im Original unterstrichen; ich habe im Druck diese Unterstreichungen weggelassen, weil es scheint, als seien dieselben erst hinterher angebracht und darauf bezüglich, ob Gauß die einzelne Notiz bei späteren Arbeiten benutzt

hat oder nicht. Im übrigen wolle man das als Tafel beigegebene Faksimile einer Seite des Tagebuchs vergleichen, welche die Nummern 92—100 der weiterhin eingehaltenen Zählung enthält.

Dann aber, was die Bemerkungen angeht, die ich einzelnen Nummern zugesetzt habe, so haben sie sämtlich den Zweck, den aktenmäßigen Wert des mitgeteilten Materials zu erhöhen. Hierzu schien mir vor allen Dingen der Hinweis auf parallellaufende Zeitangaben in den bisherigen Veröffentlichungen von Gauß' Werken oder Briefen erwünscht. Die Bände der Gesamtausgabe werden dabei durch bloße römische Ziffern zitiert; sonst finden sich noch abgekürzte Hinweise auf die Festrede, welche Schering 1877 gelegentlich der Feier von Gauß' hundertjährigem Geburtstage hielt (Abhandlungen der K. Gesellschaft der Wissenschaften, 22. Band), auf den Briefwechsel von Gauß mit W. Bolyai (herausgegeben von Fr. Schmidt und P. Stäckel, Leipzig 1899) und auf den Briefwechsel von Gauß mit Olbers (Wilhelm Olbers, sein Leben und seine Werke, herausgegeben von C. Schilling, zweiter Band, Berlin 1900). Besonderen Dank habe ich Herrn Dedekind für einige erläuternde Bemerkungen zu sagen, die ich mit der Chiffre D. versehen den in Betracht kommenden Nummern hinzufügte. Hierüber hinaus habe ich verschiedentlich auf den handschriftlichen Nachlaß von Gauß, wie er z. Z. im hiesigen Gauß-Archiv aufbewahrt wird, Bezug genommen und insbesondere bei denjenigen Nummern, die sich auf die elliptischen Funktionen in den Jahren 1797—1800 beziehen, solche Stücke des Nachlasses abgedruckt, die nun erst an der Hand des Tagebuches ihre volle Bedeutung gewinnen. Für die Jahre 1796, 1797 ist in dieser Hinsicht ein mit Schreibpapier durchschossenes Exemplar des Lehrbuches von Leiste: Die Arithmetik und Algebra, Wolfenbüttel 1790, (114 pag.) besonders wertvoll, indem Gauß damals auf dessen freie Seiten eine Reihe der interessantesten Eintragungen gemacht hat (wie er ja überhaupt in die Bücher seiner Bibliothek vielfach Notizen eintrug, gleich als wollte er jedes leere Blatt ausnutzen, das Dauer zu besitzen schien)*). Für die Jahre 1798—1800 kommen dann neben losen Zetteln, die sich zufällig erhalten haben, insbesondere die sogenannten *Schedae* in Betracht, d. h. Notizheftchen, welche in ungeregelter Aufeinanderfolge Zahlenrechnungen und Bemerkungen der verschiedensten Art, vielfach auch die Ansätze zu zusammenhängenden Darstellungen enthalten; das Nähere hierüber ist unten bei den einzelnen Nummern mitgetheilt. —

Ich habe noch nach verschiedenen Seiten hin für vielfache Unter-

*) Die Notizen aus Leiste werden in der Folge so zitiert, daß jedesmal die Druckseite angegeben wird, *neben* der sie sich in dem durchschossenen Exemplare befinden.

stützung, die ich bei meiner Arbeit fand, Dank auszusprechen. Das Faksimile einer Seite des Tagebuches, welches am Schlusse folgt, ist von Herrn Brendel dahier (dem jetzigen Generalredaktor der Gaußausgabe) besorgt worden; derselbe hat mich durch seine große Kenntnis des Nachlasses auch sonst weitgehend unterstützt. Nicht minder bin ich den Bearbeitern von Bd. VIII der Gaußischen Werke, den Herren Börsch, Fricke und Stäckel, sowie den Herren Fueter und Sommer dahier für vielfache Bemerkungen und sonstige Hilfe verpflichtet. Der Mitwirkung von Herrn Dedekind gedachte ich schon oben; dieselbe erstreckte sich schließlich auf fast alle Teile des Tagebuches und ist mir besonders wertvoll gewesen.

Göttingen, den 3. Juli 1901.

F. Klein.

Gauß' Tagebuch 1796—1814.

1796.

1) Principia quibus innititur sectio circuli, ac divisibilitas eiusdem geometrica in septemdecim partes etc.

Mart. 30. Brunsvigae.

Das gleiche Datum in I, p. 476 (nach dem Vermerk in Gauß' Handexemplar der Disquisitiones Arithmeticae, Anm. zu Art. 365), ebenso in Sartorius v. Waltershausen, Gauß zum Gedächtnis, p. 16*); v. Waltershausen bemerkt dort:

„Diese Entdeckung" [der Konstruktion des Siebzehnecks], „welche Gauß bis zum Ende seines Lebens sehr hoch schätzte, ist es vornehmlich gewesen, welche seinem Leben eine bestimmte Richtung gegeben hat, denn von jenem Tage an war er fest entschlossen, nur der Mathematik sein Leben zu widmen."

2) Numerorum primorum non omnes numeros infra ipsos residua quadratica esse posse demonstratione munitum.

Apr. 8. Brunsvigae.

Vergl. I, p. 475, wo die Worte des Artikels 130 der Disquisitiones arithmeticae: „Postquam rigorose demonstravimus, quemvis numerum primum formae $4n+1$ et positive et negative acceptum alicuius numeri primi ipso minoris non-residuum esse . . ." mit folgender Bemerkung begleitet werden: *hanc demonstrationem deteximus 1796 Apr. 8.* Im Anschluß an diesen Satz gibt Gauß in Art. 131 seiner Disq. a. den ersten seiner sechs Beweise des quadratischen Reziprozitätsgesetzes, bezüglich dessen

---

*) Die bald hernach erfolgte erste Veröffentlichung des Resultats (auf die bereits Schering in seiner Festrede von 1877 hinweist) ist seither noch nicht in extenso abgedruckt worden und mag daher hier reproduziert werden. Dieselbe findet sich im „Intelligenzblatt der allgemeinen Litteraturzeitung", Nr. 66 vom 1. Juli 1796 (p. 554 des Jahrgangs), und hat folgenden Wortlaut:

„Es ist jedem Anfänger der Geometrie bekannt, daß verschiedene ordentliche Vielecke, namentlich das Dreieck, Viereck, Fünfzehneck, und die, welche durch wiederholte Verdoppelung der Seitenzahl eines derselben entstehen, sich geometrisch konstruieren lassen. So weit war man schon zu Euklids Zeit, und es scheint, man habe sich seitdem allgemein überredet, daß das Gebiet der Elementargeometrie sich nicht weiter erstrecke: wenigstens kenne ich keinen geglückten Versuch, ihre Grenzen auf dieser Seite zu erweitern.

Desto mehr, dünkt mich, verdient die Entdeckung Aufmerksamkeit, daß *außer jenen ordentlichen Vielecken noch eine Menge anderer, z. B. das Siebenzehneck, einer geometrischen Konstruktion fähig ist.* Diese Entdeckung ist eigentlich nur ein Korollarium zu einer noch nicht ganz vollendeten Theorie von größerem Umfange und sie soll, sobald diese ihre Vollendung erhalten hat, dem Publikum vorgelegt werden."

„C. F. Gauß a. Braunschweig, Stud. der Mathematik zu Göttingen."

„Es verdient angemerkt zu werden, daß Herr Gauß jetzt in seinem 18. Jahre steht und sich hier in Braunschweig mit ebenso glücklichem Erfolg der Philosophie und der klassischen Litteratur als der höheren Mathematik gewidmet hat."

„Den 18. April 96." „E. A. W. Zimmermann, Prof."

in I, p. 476 (Anm. zu Art. 131) des weiteren mitgeteilt wird: *Theorema fundamentale per inductionem detectum 1795 Martio. Demonstratio prima, quae in hac sectione traditur, inventa 1796 Apr.*

3) Formulae pro cosinibus angulorum peripheriae submultiplorum expressionem generaliorem non admittent nisi in duab[us] periodis.

Apr. 12. Brunsvigae.

4) Amplificatio normae residuorum ad residua et mensuras non indivisibiles.

Apr. 29. Gottingae.

Wegen des Datums vergl. I, p. 476 (Bem. zu Art. 133 der Disq. a.).

5) Numeri cuiusvis divisibilitas varia in binos primos.

Mai. 14. Gottingae.

6) Coefficientes aequationum per radicum potestates additas facile dantur.

Mai. 23. Gottingae.

Bezügliche Formeln finden sich in Leiste neben der Druckseite 6.

7) Transformatio seriei

$$1 - 2 + 8 - 64 + \cdots$$

in fractionem continuam:

$$\cfrac{1}{1+\cfrac{2}{1+\cfrac{2}{1+\cfrac{8}{1+\cfrac{12}{1+\cfrac{32}{1+\cfrac{56}{1+\cfrac{128}{\cdots}}}}}}}}$$

$$1 - 1 + 1\cdot 3 - 1\cdot 3\cdot 7 + 1\cdot 3\cdot 7\cdot 15 - \cdots = \cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cfrac{2}{1+\cfrac{6}{1+\cfrac{12}{1+\cfrac{28}{\cdots}}}}}}$$

et aliae.

Mai. 24. Gottingae.

Vgl. unten Nr. 58.

8) Scalam simplicem in seriebus variatim recurrentibus esse functionem similem secundi ordinis scalarum componentium.

Mai. 26.

Als Skala einer rekurrenten Reihe bezeichnen die älteren Mathematiker die Koeffizienten des linearen Gesetzes, welches die aufeinanderfolgenden Reihenglieder verbindet.

9) Comparationes infinitorum in numeris primis et factoribus cont[entorum].
Mai. 31. Gottingae.

10) Scala ubi seriei termini sunt producta vel adeo functiones quaecunque terminorum quotcunque serierum.
Jun. 3. Gottingae.

11) Formula pro summa factorum numeri cuiusvis compositi f[actor] gener[alis] $\frac{a^{n+1}-1}{a-1}$.
Jun. 5. Gottingae.

12) Periodorum summa omnibus infra modulum numeris pro elementis sumtis fact[or] gen[eralis] $((n+1)a-na)a^{n-1}$.
Jun. 5. Gottingae.

Der Ausdruck $\big((n+1)a-na\big)a^{n-1}$ ist hier genau so abgedruckt worden, wie er im Original zu stehen scheint, trotzdem er in dieser Form ersichtlich keinen verständlichen Sinn gibt.

13) Leges distributionis.
Jun. 19. Gottingae.

14) Factorum summae in infinito $= \frac{\pi^2}{6}\cdot$ sum[ma] num[erorum].
Jun. 20. Gottingae.

Vergl. Nr. 31 unten.

15) Coepi de multiplicatoribus (in formis divisorum form[arum] qu[adraticarum]) connexis cogitare.
Jun. 22. Gottingae.

Vergl. I, p. 476, wo zur Überschrift der Sectio quinta der Disq. a. „de formis aequationibusque indeterminatis secundi gradus" vermerkt ist: *Inde a Jun. 22. 1796.*

16) Nova theorematis aurei demonstratio a priori toto coelo diversa eaque haud parum elegans.
Jun. 27.

Vergl. I, p. 476 (Bem. zu Art. 262 der Disq. a.), wo indes als Datum für die Auffindung dieses „zweiten Beweises" des quadratischen Reziprozitätsgesetzes, in Übereinstimmung mit Gauß' eigener Notiz in seinem Handexemplar der Disq. a., *1796 Juli 27* angegeben ist. Es handelt sich dabei offenbar um einen Schreibfehler.

17) Quaeque partitio numeri a in tria □ dat formam in tria □ separabilem.
Jul. 3.

□ ist so viel wie „quadrata".

18) *ΕΥΡΗΚΑ* num[erus] $= \Delta + \Delta + \Delta$.
Jul. 10. Gottingae.

$\Delta + \Delta + \Delta$ bedeutet ersichtlich: Summe dreier Dreieckszahlen.

19) Determinatio Euleriana formarum in quibus numeri compositi plus unâ vice continentur.

20) Principia componendi scalas serierum variatim recurrentium.

Jul. 16. Gottingae.

21) Methodus Euleriana pro demonstranda relatione inter rectangula sub segmentis rectarum sese secantium in sectionibus conicis ad omnes curvas applicatum.

Jul. 31. Gottingae.

22) $a^{2^n+1(p)} \equiv 1$ semper solvere in potestate.

Aug. 3. Gottingae.

Der Exponent von a ist nicht recht verständlich; er ist aber möglichst genau nach dem Original wiedergegeben.

23) Rationem theorematis aurei quomodo profundius perscrutari oporteat perspexi et ad hoc accingor supra quadraticas aequationes egredi conatus. Inventio formularum qui semper per primos: $\sqrt[n]{1}$ (numerice) dividi possunt.

Aug. 13. Gottingae.

Ansatz zum dritten und vierten Beweise des Reziprozitätsgesetzes quadratischer Reste; siehe unten, No. 30.

24) Obiter $(a+b\sqrt{-1})^{m+n\sqrt{-1}}$ evolutum.

Aug. 14.

25) Rei summa iamiam intellecta. Restat ut singula muniantur.

Aug. 16. Gottingae.

26) $(a^p) \equiv (a) \bmod. p$, a radix aequationis cuiusvis quomodocunque irrationalis.

[Aug.] 18.

Wahrscheinlich bedeutet (a) eine Funktion von x, die für $x = a$ verschwindet, und entsprechend (a^p) die Funktion, deren Wurzeln die p^{ten} Potenzen von den Wurzeln der ersten Funktion sind; p Primzahl. (D.)

27) Si P, Q functiones alg[ebraicae] quantitatis indeterminatae fuerint in-c[ognitae]. Datur:

$$tP + uQ = 1$$

in algebra tum speciata tum numerica.

[Aug.] 19. Gottingae.

Algebra speciata = Buchstabenrechnung.

28) Exprimuntur potestates radicum aequationis propositae aggregatae per coefficientes aequationis lege perquam simplici (cum aliis quibusdam geometr[icis] in Exercc:).

[Aug.] 21. Gottingae.

29) Summatio seriei infinitae

$$1 + \frac{x^n}{1 \cdots n} + \frac{x^{2n}}{1 \cdots 2n} + \cdots$$

eod[em] [die].

30) Minutiis quibusdam exceptis feliciter scopum attigi scil[icet] si

$$p^n \equiv 1 \pmod{\pi}$$

fore $x^\pi - 1$ compositum e factoribus gradum n non excedentibus et proin aequationem conditionalem fore solubilem; unde duas theor[ematis] aurei demonstr[ationes] deduxi.

Sept. 2. Gottingae.

Siehe oben, No. 23, und No. 68 unten. Die aequatio conditionalis ist vermutlich dieselbe, die sonst von Gauß aequatio auxiliaris genannt wurde, man vergl. in II, p. 229, 233, 234, die Artikel 360, 365, 366 der Analysis residuorum, sowie die Fußnote zu No. 68. (D.)

31) Numerus fractionum inaequalium quarum denominatores certum limitem non superant ad numerum fractionum omnium quarum num[eratores] aut denom[inatores] sint diversi infra eundem limitem in infinito ut $6 : \pi^2$.

Sept. 6.

Vgl. No. 14 oben.

32) Si $\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^3}}$ stat[uitur] $\Pi(x) = z$ et $x = \Phi(z)$

erit

$$\Phi(z) = z - \frac{z^4}{8} + \frac{z^7}{112} - \frac{z^{10}}{1792} + \frac{3 \cdot z^{13}}{1792 \cdot 52} - \frac{3 \cdot 185 \cdot z^{16}}{1792 \cdot 52 \cdot 14 \cdot 15 \cdot 16} + \cdots$$

Sept. 9.

Auf vorstehende Notiz nimmt Fricke in VIII, p. 95, ausdrücklich Bezug.

33) Si:

$$\Phi\left(\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^n}}\right) = x$$

erit:

$$\Phi(z) = z - \frac{1 \cdot z^{n+1}}{2(n+1)} \cdot A + \frac{(n-1)z^{2n+1}}{4(2n+1)} B - \frac{(n^2-n-1)z^{3n+1}}{2(n+1)(3n+1)} C + \cdots$$

Die Exponenten von z sind im Original unrichtig angegeben.

34) Methodus facilis inveniendi aeq[uationem] in y ex aeq[uatione] in x, si ponatur:

$$x^n + ax^{n-1} + bx^{n-2} + \cdots = y.$$

Sept. 14.

35) Fractiones quarum denominator continet quantitates irrationales (quomodocunque?) in alias transmutare ab hoc incommodo liberatas.

Sept. 16.

36) Coefficientes aeq[uationis] auxiliariae eliminationi inservientis ex radicibus aeq[uationis] datae determinati.

eo[dem] [die].

37) Nova methodus qua resolutionem aequationum universalem investigare

forsitanque invenire licebit. Scil[icet] transm[utare] aeq[uationem] in aliam cuius radices:

$$\alpha\varrho' + \beta\varrho'' + \gamma\varrho''' + \cdots$$

ubi:

$$\sqrt[n]{1} = \alpha, \beta \text{ etc.}$$

et n numerus aequationis gradum denotans.

Sept. 17.

38) In mentem mihi venit radices aeq[ationis] $x^n - 1$ ex aeq[ationibus] communes radices habentibus elicere ut adeo plerumque tantum aequationes coefficientibus rationalibus gaudentes resolvi oporteat.

Sept. 29. Brunsvigae.

39) Aequatio tertii gradus est haec:

$$x^3 + x^2 - nx + \frac{n^2 - 3n - 1 - mp}{3} = 0$$

ubi $3n + 1 = p$ et m numerus resid[uorum] cubic[orum] similes sui excipientes. Unde sequitur si $n = 3k$ fore $m + 1 = 3l$; si $n = 3k \pm 1$ fore $m = 3l$.

Sive

$$z^3 - 3pz + (p^2 - 8p - 9pm) = 0$$

hoc [modo] m penitus determinatum, $m + 1$ semper $\square + 3 \cdot \square$.

Oct. 1. Brunsvigae.

Statt „excipientes" muß es vermutlich „excipientium" heißen. — In Leiste finden sich neben der Druckseite 8 Einzelbeispiele. Vergl. übrigens No. 67.

40) Aequationis

$$x^p - 1 = 0$$

radices per integros multiplicatae aggregatae cifram producere non possunt.

⊙ *Oct. 9. Brunsvigae.*

41) Quaedam sese obtulerunt de multiplicatoribus aequationum ut certi termini eiiciantur, quae praeclara pollicentur.

⊙ *Oct. 16. Brunsvigae.*

42) Lex detecta: quando et demon[stra]ta erit, systema ad perfectionem evexerimus

Oct. 18. Brunsvigae.

43) Vicimus GEGAN.

Oct. 21. Brunsvigae.

Auf der Innenseite des vorderen Einbanddeckels des Tagebuches steht:
GEGAN
WAEGEGAN.

44) Formula interpolationis elegans.

Nov. 25. Gottingae.

45) Incepi expressionem:

$$1 - \frac{1}{2^\omega} + \frac{1}{3^\omega} - \cdots$$

in seriem transmutare secundum potestates ipsius ω progredientem.

Nov. 26. Gottingae.

46) Formulae trigonometricae per series expressae.

per Dec.

47) Differentiationes generalissimae.

Dec. 23.

48) Curvam parabolicam quadrare suscepi cuius puncta quotcunque dantur.

Dec. 26.

Hierher gehörige Formeln finden sich bei Leiste neben Druckseite 13.

49) Demonstrationem genuinam theorematis Lagrangiani detexi.

Dec. 27.

Vergl. den „Neuen Beweis des Lagrangischen Lehrsatzes" in VIII, p. 76—79, bei welchem Fricke (p. 79) ausdrücklich auf vorstehende Tagebuchnotiz verweist. In Leiste findet sich neben den Druckseiten 10 und 11 eine etwas andere Darstellung des betreffenden Beweises (mit weniger Text).

1797.

50)
$$\left.\begin{aligned} \int \sqrt{\sin x}\; dx &= 2\int \frac{y^2 dy}{\sqrt{1-y^4}} \\ \int \sqrt{\operatorname{tang} x}\, dx &= 2\int \frac{dy}{\sqrt{1-y^4}} \\ \int \sqrt{\frac{1}{\sin x}}\; dx &= 2\int \frac{dy}{\sqrt{1-y^4}} \end{aligned}\right\} \quad y^2 = \frac{\sin}{\cos} x.$$

Jan. 7.

51) Curvam (elasticam) lemniscatam a

$$\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^4}}$$

pendentem perscrutari coepi.

Jan. 8.

Dasselbe Datum in III, p. 493. Das Wort „elasticam" ist im Original durchstrichen und an seine Stelle „lemniscatam" gesetzt. In Leiste stehen neben den Druckseiten 16, 17, 18 einige Notizen, in denen das Additionstheorem der lemniskatischen Funktion und die Multiplikation mit 2 und 3 behandelt wird; *in der dazugehörigen Überschrift findet sich genau dieselbe Korrektur.*

52) Criterii Euleriani rationem sponte detexi.

Jan. 10.

53) Integrale complet[um]

$$\int \frac{dx}{\sqrt[n]{1-x^n}}$$

ad circ[uli] quadr[aturam] reducere commentus sum.

Jan. 12.

54) Methodus facilis

$$\int \frac{x^n\,dx}{1+x^m}$$

determinandi.

Bezügliche Formeln stehen in Leiste neben der Druckseite 27.

55) Supplementum eximium ad polygonorum descriptionem inveni. Sc[ilicet] si $a, b, c, d \cdots$ sint factores primi numeri primi p unitate truncati tunc ad polygoni p laterum [descriptionem] nihil aliud requiri quam ut:

1.° arcus indefinitus in $a, b, c, d \cdots$ partes secetur.

2.° ut polygona $a, b, c, d \cdots$ laterum describantur.

Jan. 19. Gottingae.

56) Theoremata de res[iduis] -1, ∓ 2 simili methodo demonstrata ut cetera.

Febr. 4. Gottingae.

Dasselbe Datum in I, p. 476 (Anmerkung zu Art. 145 der Disq. a.).

57) Forma:

$$a^2 + b^2 + c^2 - bc - ac - ab$$

quod ad divisores attinet, convenit cum hac:

$$a^3 + 3b^2.$$

Febr. 6.

58) Amplificatio prop[ositionis] penult[imae] p[aginae] 1 scilicet

$$1 - a + a^3 - a^6 + a^{10} - \cdots = \cfrac{1}{1+\cfrac{a}{1+\cfrac{a^2-a}{1+\cfrac{a^3}{1+\cfrac{a^4-a^2}{1+\cfrac{a^5}{1+\text{etc.}}}}}}}$$

Unde facile omnes series ubi exp[onentes] ser[iem] sec[undi] ordinis constituunt transformantur.

Febr. 16.

Vergl. oben, No. 7.

59) Formularum integralium formae:

$$\int e^{-t^\alpha}\,dt \quad \text{et} \quad \int \frac{du}{\sqrt[\beta]{1+u^\gamma}}$$

inter se comparationem institui.

Mart. 2.

60) Cur ad aequationem perveniatur gradus nn^{ti} dividendo curvam lemniscatam in n partes.

Mart. 19.

61) A potestatibus integr[alis]

$$\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x^4}}$$

pendet

$$\sum \left(\frac{m^2+6mn+n^2}{(m^2+n^2)^4}\right)^k.$$

Es muß jedenfalls heißen:

$$\sum \frac{m^4-6m^2n^2+n^4}{(m^2+n^2)^4},$$

(was soviel ist, wie

$$\frac{1}{2}\sum\left(\frac{1}{(m+ni)^4}+\frac{1}{(m-ni)^4}\right)\right).$$

In dieser Form steht die Summe bei Leiste neben Druckseite 88 und 89.

Im übrigen mögen hier folgende Formeln aus Leiste aufgenommen werden, welche zeigen, wie weit Gauß zu der in Betracht kommenden Zeit in die Theorie der lemniskatischen Funktionen eingedrungen war.

Neben Druckseite 62 steht:

$$\text{Sehne von } x = \left\{\begin{array}{l} x\left(1+\frac{x^4}{\pi^4}\right)\left(1+\frac{x^4}{16\pi^4}\right)\left(1+\frac{x^4}{81\pi^4}\right)\cdots\left(1-\frac{x^4}{\pi^4}\right)\left(1-\frac{x^4}{16\pi^4}\right)\cdots \\ \cdot \text{Prod. ex}\left(1-\frac{2(m^4-6m^2n^2+n^4)}{(m^2+n^2)^4}\left(\frac{x}{\pi}\right)^4+\frac{1}{(m^2+n^2)^4}\left(\frac{x}{\pi}\right)^8\right) \\ \text{sumtis pro } m, n \text{ omnibus numeris integris inaequalibus} \\ \hline \left(1+\frac{4x^4}{\pi^4}\right)\left(1+\frac{4x^4}{81\pi^4}\right)\left(1+\frac{4x^4}{625\pi^4}\right)\cdots\cdots\cdots\cdots \\ \cdot \text{Prod. ex}\left(1-\frac{2(m^4-6m^2n^2+n^4)}{(m^2+n^2)^4}\left(\frac{2x}{\pi}\right)^4+\frac{1}{(m^2+n^2)^4}\left(\frac{2x}{\pi}\right)^8\right) \\ \text{sumtis pro } m, n \text{ omnibus numeris imparibus inaequalibus} \end{array}\right\}$$

und gleich dahinter neben der Druckseite 63:

$$\sin x = x\cdot\frac{1-\frac{1}{60}x^4-\frac{1}{10080}x^4+\frac{1}{10080\cdot 11700}x^{12}+\cdots}{1+\frac{1}{12}x^4-\frac{1}{10080}x^8+\quad\frac{1}{1296000}\quad x^{12}-\cdots}$$

(wo die Koeffizienten von x^{12} unrichtig sind).

Dann wieder neben Druckseite 89:

$$\cos x = \frac{\left(1-\frac{4x^2}{\pi^2}\right)\left(1-\frac{4x^2}{9\pi^2}\right)\left(1-\frac{4x^2}{25\pi^2}\right)\cdots}{\left(1+\frac{4x^2}{\pi^2}\right)\left(1+\frac{4x^2}{9\pi^2}\right)\left(1+\frac{4x^2}{25\pi^2}\right)\cdots}$$

$$\cdot \text{Prod. ex}\left(\frac{1-\frac{2(m^2-n^2)}{(m^2+n^2)^2}\frac{x^2}{\pi^2}+\frac{1}{(m^2+n^2)^2}\frac{x^4}{\pi^4}}{1+\frac{2(m^2-n^2)}{(m^2+n^2)^2}\frac{x^2}{\pi^2}+\frac{1}{(m^2+n^2)^2}\frac{x^4}{\pi^4}}\right)$$

$$\text{positis pro } \binom{m}{n} \text{ omnibus numeris } \binom{\text{imparibus}}{\text{paribus}},$$

und unmittelbar dahinter:

$$\frac{1-\frac{1}{2}x^2-\frac{1}{24}x^4-\frac{1}{240}x^6-\cdots}{1+\frac{1}{2}x^2-\frac{1}{24}x^4+\frac{1}{240}x^6-\cdots}.$$

In diesen Formeln ist π dieselbe Größe, wie in No. 63 π', nämlich die später mit ϖ bezeichnete lemniskatische Periode

$$\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x^4}}.$$

Man wolle übrigens die ältesten Stücke, betreffend lemniskatische Funktionen, vergleichen, welche Schering in III, p. 404—406, in den Nummern 1—4 des Artikels: „Elegantiores Integralis $\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^4}}$ Proprietates" von losen Blättern, die sich im Nachlaß finden, abgedruckt hat. Die Potenzentwickelungen für den Zähler und Nenner der sin x und cos x sind dort weiter ausgeführt, dagegen fehlen die doppelt unendlichen Produkte*). (Diese Potenzentwickelungen decken sich für den Fall der lemniskatischen Funktionen sowohl mit den *Al*- wie mit den σ-Reihen von Weierstraß.)

62) Lemniscata geometrice in quinque partes dividitur.

Mart. 21.

In Leiste finden sich bezügliche Notizen neben den Druckseiten 102 und 100. Zunächst wird die Gleichung der Fünfteilung, deren Wurzeln coslemn. 36° ist, in der Form mitgeteilt:

$$\frac{9-36x^4+30x^8+12x^{12}+x^{16}}{1+12x^4+30x^8-36x^{12}+9x^{16}} = \frac{4(1-x^4)}{1+2x^4+x^8},$$

die dann zu

$$5-62x^4-105x^8+300x^{12}-125x^{16}+50x^{20}+x^{24}=0$$

zusammengezogen wird. Es folgen Näherungsrechnungen zur Auffindung der Wurzeln; zwischendurch treten auch Quadratwurzelausdrücke auf; schließlich kommt cos 36° = 0,52047024.

63) Inter multa alia curvam lemniscatam spectantia observavi:

Numeratorem sinus decompositi arcus duplicis esse

= 2 · num. denom. sinus $\times$ num. den[om]. cos arcus simpl[icis].

Denominator[em] vero = (num. sin)^4 + (denom. sin)^4.

Iam si hic denominator pro arcu π' ponatur Θ erit denom[inator] sin arcus $k\pi' = \Theta^k$. Iam

---

*) In Leiste findet sich neben p. 39 im Anschlusse an allerlei Rechnungen, die sich auf das Integral $\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^8}}$ beziehen, auch noch folgender Ansatz zu einer Produktentwickelung:

$$\frac{x\left(1-\frac{x^6}{729\cdot u^6}\right)\left(1-\frac{x^6}{729\cdot 2^6\cdot u^6}\right)\left(1-\frac{x^6}{729\cdot 3^6\cdot u^6}\right)\cdots}{\left(1-\frac{x^3}{2^3\cdot u^3}\right)\left(1-\frac{x^3}{5^3\cdot u^3}\right)\left(1-\frac{x^3}{8^3\cdot u^3}\right)\cdots\left(1+\frac{x^3}{u^3}\right)\left(1+\frac{x^3}{4^3\cdot u^3}\right)\cdots}.$$

$$\Theta = 4{,}810\,480$$

cuius numeri logarithmus hyperbolicus est =

$$1{,}570\,796 \text{ i. e. } = \frac{\pi}{2},$$

quod maxime est memorabile, cuiusque proprietatis demonstratio gravissima analyseos incrementa pollicetur.

Mart. 29.

Die Einzelheiten der hier angedeuteten Rechnung finden sich in Leiste neben Druckseite 71. Zunächst wird vermöge der bei No. 61 mitgeteilten Reihenentwickelungen der Zähler M und Nenner N für $x = 45^0$ berechnet und hieraus dann $N\pi$ nach der allgemeinen Formel $N4 = (M^4 + N^4)^4$. Die Rechnung schließt mit der charakteristischen Wendung:

$$4{,}81048 = N\pi,$$

$$\text{log. hyp. dieser Zahl} = 1{,}5708 = \frac{1}{2}\pi \text{ Circuli?}$$

Offenbar kommt diese Berechnung von Θ darauf hinaus, daß für den besonderen Wert $x = 0$ der Exponentialfaktor bestimmt wird, der dem Nenner (oder Zähler) von sinlemn. x zutritt, wenn x um eine Periode vermehrt wird.

Übrigens finden sich in Leiste neben Druckseite 26 Multiplikationsformeln allgemeinerer Art, z. B.

$$Pnx = nQ^{n^2-1}P - \frac{n(n^2-1)(n^2+6)}{60}Q^{n^2-5}P^5 - \frac{n^6 - 13n^4 + 36n^2 + 420n(n^2-1)}{10\,080}Q^{n^2-9}P^9 - \ldots$$

64) Demonstrationes elegantiores pro nexu divisorum formae $\square - \alpha$, $+1$ cum -1, ± 2 inveni.

Jun. 17. Gottingae.

Das $+1$ ist nicht recht verständlich, steht aber im Original.

65) Deductionem secundam theoriae polygonorum excolui.

Jul. 17. Gottingae.

66) Per utranque methodum monstrari potest puras tantum aequationes solvi oportere.

67) Quod Oct. 1. per ind[uctionem] invenimus demonstratione munivimus.

Jul. 20.

Siehe oben, No. 39.

68) Casum singularem solutionis congruentiae

$$x^n - 1 \equiv 0$$

(scilicet quanto cong[ruentia] auxi[liaria] radices aequales habet), qui tam diu nos vexavit felicissimo successu vicimus ex congruentiarum solutione si modulus est numeri primi potestas.

Jul. 21.

Vergl. eine Bemerkung von Dedekind in II, p. 241 (Erläuterung zu § 251 der Analysis residuorum)*).

69) Si

$$x^{m+n} + ax^{m+n-1} + bx^{m+n-2} + \cdots + n \quad \text{(A)}$$

per

$$x^m \quad + \alpha x^{m-1} \quad + \beta x^{m-2} \quad + \cdots + m \quad \text{(B)}$$

dividatur atque omnes coefficientes in (A) a, b, c etc. sint numeri integri coefficientes vero omnes in (B) rationales etiam hi omnes erunt integri ultimumque n ultimus m metietur.

Jul. 23.

Vergl. I, p. 475, Anmerkung zu Art. 42 (wo das Datum als *1797 Juli 22* angegeben ist).

70) Forsan omnia producta ex

$$(a + b\varrho + c\varrho^2 + d\varrho^3 + \cdots)$$

designante ϱ omnes radices prim[itivas] aeq[uationis] $x^n = 1$ ad formam

$$(x - \varrho y)(x - \varrho^2 y) \cdots$$

reduci potest. Est enim:

$$(a + b\varrho + c\varrho^2)(a + b\varrho^2 + c\varrho) = (a-b)^2 + (a-b)(c-a) + (c-a)^2$$
$$(a + b\varrho + c\varrho^2 + d\varrho^3)(a + b\varrho^3 + c\varrho^2 + d\varrho) = (a-c)^2 + (b-d)^2$$
$$(a + b\varrho + c\varrho^2 + d\varrho^3 + e\varrho^4 + f\varrho^5)(\quad) = (a + b - d - e)^2$$
$$- (a + b - d - e)(a - c - d + f) + (a - c - d + f)^2$$
$$= (a + b - d - e)^2$$
$$- (a + b - d - e)(b + c - e - f) + (b + c - e - f)^2.$$

Vid. Febr. 4.

Falsum est. Hinc enim sequeretur e binis numeris in forma pr[oductum] e $(x - \varrho y)$ contentis productum in eadem forma esse quod facile refutatur.

In den Formeln sind beim Abdruck einige Einzelheiten verbessert.

71) Radicum aeq[uationis] $x^n = 1$ periodi plures eandem summam habere non possunt demonstratur.

Jul. 27. Gottingae.

Vergl. No. 73.

---

*) Diese „Analysis residuorum" wird von Dedekind, II, p. 240, als ein „umfangreiches Manuskript" bezeichnet, „welches vermutlich aus dem Jahre 1797 oder 1798 stammt; durch eine gänzliche Umarbeitung sind aus demselben später die Disquisitiones arithmeticae entstanden". In II sind davon nur diejenigen beiden Abschnitte (auf p. 199—240) abgedruckt, welche in den Disquisitiones arithmeticae, sowie dieselben schließlich publiziert wurden, fehlen; diese Abschnitte tragen die Überschriften: *Solutio congruentiae* $x^n - 1 \equiv 0$ und: *Disquisitiones generales de congruentiis*. Es wird interessant sein, einen genauen Vergleich des Gesamtmanuskripts mit den Angaben des Tagebuchs vorzunehmen.

72) Plani possibilitatem demonstravi.

Jul. 28. Gottingae.

Vergl. die Angaben in VIII, p. 162, 194, 199, 200. (Abschnitt: Grundlagen der Geometrie.)

73) Quod Jul. 27. inscrips[imus] errorem involvit: sed eo felicius nunc rem exhausimus, quoniam probare possumus nullam periodum esse posse numerum rationalem.

Aug. 1.

Vergl. oben, No. 71.

74) Quomodo periodorum numerum duplicando signa adornare oporteat.

75) Functionum primarum multitudinem per analysin simplicissimam erui.

Aug. 26.

In Leiste findet sich neben der Druckseite 5 der Anfang einer bez. Tabelle: man vergl. auch II, p. 218 (Analysis residuorum, Art. 343, 344). (D.)

76) Theorema: Si

$$1 + ax + bx^2 + \text{etc.} \cdots + mx^\mu$$

est functio secundum modulum p prima, erit:

$$d + x + x^p + x^{p^2} + \cdots + x^{p^{\mu-1}}$$

per hanc f[un]ct[io]nem s[e]c[un]d[u]m hunc modulum divisibilis etc. etc.

Aug. 30.

77) Demonstratum, viaque ad multa maiora per introd[uctionem] modulorum multiplicium strata.

Aug. 31.

Zu No. 76 gehörig.

78) Aug. 1. generalius ad quosvis modulos adaptatur.

Sept. 4.

Vergl. oben, No. 73.

79) Principia detexi, ad quae congruentiarum secundum modulos multiplices resolutio ad congruentias secundum modulum linearem reducitur.

Sept. 9.

80) Aequationes habere radices imaginarias methodo genuina demonstratum.

Oct. Brunsvigae.

Prom[ulgatum] in dissert[atione] pecul[iari] mense Aug. 1799.

Vergl. den Abdruck der Dissertation in III, p. 1—30, wo zum Schluß aus einem der drei im Nachlasse erhaltenen Exemplare von Gauß' Dissertation die handschriftliche Bemerkung aufgenommen ist: *Principia quibus haecce demonstratio innititur deteximus initio Octobr. 1797.*

81) Nova theorematis Pythagoraei dem[onstratio].

Oct. 16. Brunsvigae.

Im Nachlaß vorhanden. Ein ganz elementarer Beweis mit Hilfe von ähnlichen Dreiecken, der nichts Charakteristisches hat.

82) Seriei

$$x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{12} - \frac{x^4}{144} + \cdots$$

summam consideravimus invenimusque eam $= 0$, si

$$2\sqrt{x} + \frac{3}{16}\frac{1}{\sqrt{x}} - \frac{21}{1024}\frac{1}{\sqrt{3x}} + \cdots = \left(\varkappa + \frac{1}{4}\right)\pi.$$

Oct. 16. Brunsvigae.

In Leiste finden sich neben der Druckseite 58 u. a. folgende Formeln:

$$1 - x + \frac{x^2}{4} - \frac{x^3}{36} + \cdots = \varphi, \qquad x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{12} - \cdots = \psi,$$

$$\varphi' = -\frac{\psi}{x}, \qquad \psi' = \varphi.$$

1798.

83) Positis:

$$l(1+x) = \varphi'(x); \quad l(1+\varphi' x) = \varphi''(x); \quad l(1+\varphi'' x) = \varphi'''(x) \text{ etc.}$$

erit

$$\varphi^{(i)}(x) = \sqrt[3]{\frac{1}{\frac{3}{2}i}} + \cdots$$

Apr. Brunsvigae.

84) Classes dari in quovis ordine; hincque numerorum in terna quadrata discerpibilitas ad theoriam solidam reducta.

Apr. Brunsvigae.

Vergl. die Angabe in I, p. 476, zu Art. 287, III der Disq. a. *(Demonstratione primum munita sunt Mense Aprili 1798.)*

85) Demonstrationem genuinam compositionis virium eruimus.

Mai. Gottingae.

Dieser Beweis wird in einem Brief von Wachter an Gauß vom 16. Dez. 1814 erwähnt.

86) Theorema Lagrange de transformatione functionum ad functiones quotcunque variabilium extendi.

Mai. Gottingae.

87) Series

$$1 + \frac{1}{4} + \left(\frac{1\cdot 1}{2\cdot 4}\right)^2 + \left(\frac{1\cdot 1\cdot 3}{2\cdot 4\cdot 6}\right)^2 + \text{etc.} = \frac{4}{\pi}$$

simul cum theoria generali serierum involventium sinus et cosinus angulorum arithmetice crescentium.

Jun.

88) Calculus probabilitatis contra Laplace defensus.

Jun. 17. Gottingae.

Vergl. einen Brief von Gauß an Olbers vom 24. Januar 1812 (Gesamtausgabe des Briefwechsels No. 255, p. 493; die hier in Betracht kommende Stelle ist in VIII, p. 140, abgedruckt). Es wird dort ausdrücklich auf die vorliegende Nummer des „Notizenjournals" Bezug genommen.

89) Problema eliminationis ita solutum ut nihil amplius desiderari possit.
Jun. Gottingae.

90) Varia elegantiuscula circa attractionem sphaerae.

91a) $$1+\frac{1}{9}\cdot\frac{1\cdot 3}{4\cdot 4}+\frac{1}{81}\cdot\frac{1\cdot 3\cdot 5\cdot 7}{4\cdot 4\cdot 8\cdot 8}+\frac{1}{729}\cdot\frac{1\cdot 3\cdot 5\cdot 7\cdot 9\cdot 11}{4\cdot 4\cdot 8\cdot 8\cdot 12\cdot 12}+\cdots=1{,}02220\cdots$$
$$=\frac{1{,}3110\cdots}{3{,}1415\cdots}\cdot\sqrt{6}.$$
Jul.

Das Datum „Juli" gehört möglicherweise zu No. 90; No. 91a würde dann (was Tinte und Schreibweise anzudeuten scheinen) eine spätere Eintragung sein. In der Tat findet sich die betreffende Formel (siehe III, p. 423, Art. 15) in dem weiter unten zu nennenden Notizheft Ac von 1799, dazu mit dem Fehler, daß statt $\sqrt{6}$ geschrieben ist $\sqrt{\frac{3}{2}}$, was ursprünglich auch im Tagebuche stand, dort aber von Gauß selbst später verbessert ist.

Umgekehrt ist die folgende Nummer 91b, so viel zu erkennen, wahrscheinlich älteren Ursprungs, was auch dadurch bestätigt wird, daß die betreffenden Rechnungen in Leiste weiter ausgeführt sind. (Die Aufzeichnungen in Leiste gehen im allgemeinen nicht über das Jahr 1797 hinaus.) Jedenfalls liegt der charakteristische Unterschied gegen No. 92 vor, daß dort Zähler und Nenner von sinlemn. getrennt in trigonometrische Reihen entwickelt werden, hier aber nur erst der sinlemn. selbst.

91b) $$\text{arcsinlemn. sin}\,\varphi-\text{arcsinlemn. cos.}\,\varphi=\varpi-\frac{2\varphi\varpi}{\pi}.$$

$$\begin{aligned}
\text{sinlemn. }\varphi = {} & 0{,}955\,005\,99 \sin 1\varphi\\
& -0{,}043\,049\,50 \sin 3\varphi\\
& +0{,}001\,860\,48 \sin 5\varphi\\
& -0{,}000\,080\,40 \sin 7\varphi\\
& +0{,}000\,003\,47 \sin 9\varphi\\
& -0{,}000\,000\,15 \sin 11\varphi\\
& +0{,}000\,000\,01 \sin 13\varphi\\
\sin^2\text{lemn.} = {} & 0{,}456\,947\,2 \quad \left(=\frac{\pi}{\varpi^2}\right)\\
& -\cdots\cdots\cdot\cos 2\varphi.\\
\text{arcsinlemn. sin}\,\varphi = {} & \frac{\varpi}{\pi}\varphi\\
& +\left(\frac{\varpi}{\pi}-\frac{2}{\varpi}\right)\sin 2\varphi\\
& +\left(\frac{11}{2}\cdot\frac{\varpi}{\pi}-\frac{12}{\varpi}\right)\sin 4\varphi\\
\sin^5\varphi = {} & 0{,}477\,503\,1\cdots\sin\varphi\\
& +0{,}03\cdots\cdots\cdots\sin 3\varphi\cdots
\end{aligned}$$

Die vorstehende Formel für sinlemn. φ ist nach den Angaben, die sich in Leiste neben Druckseite 92 finden, vervollständigt worden. Ebenda, neben Druckseite 93, steht:

$$\begin{aligned}\text{arcus cuius sinus lemn.} &= \sin\varphi\\ = \varphi &+ 4^{\circ},933\,559 \sin 2\varphi\\ &+ 0^{\circ},317\,820 \sin 4\varphi\\ &+ 0^{\circ},030\,313 \sin 6\varphi\\ &+ 0^{\circ},003\,414 \sin 8\varphi\\ &+ 0^{\circ},000\,422 \sin 10\varphi\\ &+ 0^{\circ},000\,055 \sin 12\varphi\\ &+ 0^{\circ},000\,007 \sin 14\varphi\\ &+ 0^{\circ},000\,001 \sin 16\varphi.\end{aligned}$$

92) De lemniscata elegantissima omnes exspectationes superantia acquisivimus et quidem per methodos quae campum prorsus novum nobis aperiunt*).
Jul. Gottingae.

Unter dem gleichen Datum (Juli 1798) beginnt Gauß die im Nachlaß noch vorhandenen von ihm als Schedae bezeichneten Notizheftchen, von denen das hier in Betracht kommende erste zur Zeit mit Aa bezeichnet ist. Aus diesem Heftchen hat Schering einen Teil der lemniskatischen Entwickelungen entnommen, die er in III, p. 413—432, unter dem Titel: „De curva lemniscata" zusammengestellt hat; siehe seine Einzelangaben in III, p. 494. Der wesentliche Fortschritt ist, daß Gauß jetzt sinlemn. φ und coslemn. φ als Quotienten einfach unendlicher trigonometrischer Produkte darstellt und diese Produkte dann in Reihen umsetzt, welche nach den trigonometrischen Funktionen der Multipla von φ fortschreiten, Es handelt sich also (immer nur erst für den speziellen Fall der Lemniskate) um die Einführung der Thetafunktionen. Gauß scheint auch diesen entscheidenden Schritt zunächst induktiv, auf Grund numerischer Rechnungen, vollzogen zu haben. So findet sich auf p. 25 des Heftchens Aa für den Zähler von sinlemn. φ zuerst folgende Formel:

$$\begin{aligned}P\varphi = 0,&\,839\,329\,0109\,2669\,1403 \sin\varphi\\ -\quad &1\,567\,3988\,6096\,6741 \sin 3\varphi\\ +\quad &54\,6605\,6449 \sin 5\varphi\\ -\quad &37 \sin 7\varphi,\end{aligned}$$

und dann erst kommt inmitten von allerlei Zahlenrechnungen, die sich auf e^{π}, $e^{-\pi}$, $e^{-\frac{1}{4}\pi}$ und $\frac{\pi}{\varpi}$ beziehen und die zum Teil in III, p. 431—432 abgedruckt sind, auf p. 27 die Formel:

$$\text{sinlemn. } \varphi = \sqrt{\frac{4}{\frac{\pi}{e^{\frac{1}{2}}}}} \cdot \frac{\sin\varphi - \frac{1}{e^{3\pi}}\sin 3\varphi + \frac{1}{e^{6\pi}}\sin 5\varphi \cdots}{1 + \frac{2}{e^{\pi}}\cos 2\varphi + \frac{2}{e^{4\pi}}\cos 4\varphi \cdots},$$

*) Zu den hier abgedruckten Nummern 92—100 wolle man das als Tafel beigegebene Faksimile vergleichen.

endlich auf p. 28 das Schlußresultat:

$$P\varphi = 2^{3/4}\sqrt{\frac{\pi}{\varpi}}\left(\frac{\sin\varphi}{e^{1/4\pi}} - \frac{\sin 3\varphi}{e^{9/4\pi}} + \frac{\sin 5\varphi}{e^{25/4\pi}} - \cdots\right),$$

$$Q\varphi = \frac{\sqrt{\frac{\pi}{\varpi}}}{2^{1/4}}\left(1 + \frac{2\cos 2\varphi}{e^{\pi}} + \frac{2\cos 4\varphi}{e^{4\pi}} + \cdots\right),$$

(Diese neuen $P\varphi$, $Q\varphi$ unterscheiden sich von den früher so bezeichneten Größen, also den *Al* der Lemniskate, um einen Exponentialfaktor; vergl. III, p. 416, letzte Zeile. Wegen der Zahlenrechnungen betr. e^{π} u. s. w. siehe No. 112.)

93) Solutio problematis ballistici.

Jul. Gottingae.

94) Cometarum theoriam perfectiorem reddidi.

Jul. Gottingae.

In dem bei No. 92 genannten Heftchen Aa findet sich auf p. 16 als Überschrift einer bald abbrechenden Entwickelung:

Scheda secunda, De motu cometarum.

95) Novus in analysi campus se nobis aperuit scilicet investigatio functionum etc.

Oct.?

In die Zwischenzeit zwischen No. 95 und No. 96 fallen zwei Briefe von Gauß an W. Bolyai (vom 29. Nov. 1798, bez. 9. Jan. 1799), in denen er über seine Arbeit an den Disquisitiones arithmeticae berichtet, bez. über die Langsamkeit klagt, mit welcher der kurz vorher begonnene Druck derselben fortschreitet (siehe Gesamtausgabe des Briefwechsels, p. 11, 12, 15). — Die Disq. a. sind erst im Sommer 1801 erschienen (Datum der Widmung an den Herzog Carl Wilhelm Ferdinand: Juli 1801). Übrigens ist das Datum (Oct.) bei No. 95 im Original kaum erkennbar.

1799.

96) Formas superiores considerare coepimus.

Febr. 14. Brunsvigae.

Das Datum auch in I, p. 476 (Bemerkung zu Art. 266 der Disq. a.). Es handelt sich um die ternären quadratischen Formen. Man vergl. das im Nov. 1798 begonnene Heftchen Ab des Nachlasses, wo p. 9 eine Reihe auf diese Formen bezüglicher Notizen folgendermaßen beginnt:

„Hujusmodi functiones:

$$ax^2 + a'x'^2 + a''x''^2 + 2bx'x'' + 2b'xx'' + 2b''xx'$$

formas superiores vocamus."

97) Formulas novas exactas pro parallaxi eruimus.

Apr. 8. Brunsvigae.

98) Terminum medium arithmetico-geometricum inter 1 et $\sqrt{2}$ esse $= \frac{\pi}{\varpi}$ usque ad figuram undecimam comprobavimus, quare demonstrata prorsus novus campus in analysi certo aperietur.

Mai. 30. Brunsvigae.

Vergl. die Berechnung in III, p. 364.

99) In principiis Geometriae egregios progressus fecimus.

Sept. Brunsvigae.

Auf diese Notiz wird in VIII, p. 162, Bezug genommen. Ebenda, p. 159—160, findet sich die in Vergleich kommende Stelle aus dem berühmten Briefe von Gauß an W. Bolyai vom 16. Dez. 1799 abgedruckt (Gesamtausgabe des Briefwechsels, p. 34, 35).

100) Circa terminos medios arithmetico-geometricos multa nova deteximus.

Nov. Brunsvigae.

101) Medium arithmetico-geometricum tamquam quotientem duarum functionum transcendentium repraesentabile esse iam pridem inveneramus: nunc alteram harum functionum ad quantitates integrales reducibilem esse deteximus.

Dec. 14. Helmstadii.

102) Medium arithmetico-geometricum ipsum est quantitas integralis. Dem[onstratum].

Dec. 23.

Zu den Nummern 100—102 kommen als Belege insbesondere die ersten Seiten eines jetzt mit Ac bezeichneten Notizbuches in Betracht, das im November 1799 begonnen wurde und dessen Titelblatt die Aufschrift trägt: „Varia, imprimis de integrali $\int \frac{d\varphi}{\sqrt{1-\mu\mu\sin\varphi^2}}$;" in Bd. III sind diesem Notizbuch einerseits eine Reihe lemniskatischer Entwickelungen, andererseits die Grundformeln für die Inversion des allgemeinen elliptischen Integrals entnommen, wovon sogleich noch (bei No. 111) die Rede sein wird; siehe die Angaben in III, p 494. Was speziell No. 102 angeht, so wolle man p. 10 und 11 des genannten Notizbuches vergleichen. Es heißt dort p. 10:

„Medium arithmetico-geometricum inter 1 et x per hujusmodi formulam exhiberi potest, apprime utilem quoties x est numerus satis magnus:

$$Mx = \frac{C(x - \alpha x^{-1} - \beta x^{-3} - \gamma x^{-5} - \dots)}{\log(4x - ax^{-1} - bx^{-3} - cx^{-5} - \dots)}.$$

Hic factor constans

$$C = \frac{\pi}{2}, \quad \alpha = \frac{1}{4}, \quad \beta = \frac{5}{64}, \quad \gamma = \frac{11}{256}, \quad \delta = \frac{469}{36\,384}, \quad \varepsilon = \frac{1\,379}{2^{16}},$$

$$a = 1, \quad b = \frac{9}{32}, \quad c = \frac{19}{128}, \quad d = \frac{4\,769}{49\,152}"$$

und eine Seite später

„Posito numeratore $= \frac{C}{Q}$ erit

$$Q = \frac{1}{x} + \left(\frac{1}{2}\right)^2 x^{-3} + \left(\frac{1\cdot 3}{2\cdot 4}\right)^2 x^{-5} + \left(\frac{1\cdot 3\cdot 5}{2\cdot 4\cdot 6}\right)^2 x^{-7} + \cdots$$

$$= \text{pars ipsius } (x^2 - \cos\varphi^2)^{-\frac{1}{2}}, \text{ quae a } \varphi \text{ est libera,}$$

$$= \frac{1}{4\pi} \cdot \text{valor integralis } \int_0^1 \frac{dr}{\sqrt{(1-r^2)(x^2-r^2)}}.“$$

Dieselbe Methode der Vergleichung der Potenzentwickelungen führt Gauß dann auf p. 12 zu dem einfacheren in No. 102 bezeichneten Resultate:

„Posito termino constante expressionis $(1+\mu\cos\varphi^2)^{-\frac{1}{2}} = A$ erit $M\sqrt{1+\mu} = \frac{1}{A}$.“

In Band III ist statt dieser vorläufigen Notizen die zusammenhängende Darstellung aufgenommen, welche Gauß (wie es scheint, bald hernach; siehe III, p. 492—493) in einem 1800 begonnenen Handbuche (welches zur Zeit mit Ba bezeichnet ist) unter dem Titel:

De origine proprietatibusque generalibus numerorum mediorum arithmetico-geometricorum

niedergeschrieben hat; siehe III, p. 361—371; der Zusammenhang zwischen dem arithmetisch-geometrischen Mittel und dem bestimmten elliptischen Integral wird dort ebenfalls aus der Identität der Potenzentwickelungen erschlossen (p. 370—371).

1800.

103) In theoria formarum trinariarum formas reductas assignare contigit.

Febr. 13.

Dasselbe Datum in I, p. 476 (Bemerkung zu Art. 272 der Disq. a.).

104) Series:

$$a\cos A + a'\cos(A+\varphi) + a''\cos(A+2\varphi) + \text{etc.}$$

ad limitem convergit, si a, a', a'' etc. constituunt progressionem sine mutatione signi ad 0 continuo convergentem. Demonstratum.

Apr. 27. Brunsvigae.

105) Theoriam quantitatum transcendentium:

$$\int \frac{dx}{\sqrt{(1-\alpha x^2)(1-\beta x^2)}}$$

ad summam universalitatem perduximus.

Mai. 1. Brunsvigae.

106) Incrementum ingens huius theoriae invenire contigit, per quod simul omnia praecedentia nec non theoria mediorum arithmetico-geometricorum pulcherrime nectuntur infinitiesque augentur.

Mai. 22. Brunsvigae.

) Iisdem diebus circa (Mai. 16) problema chronologicum de festo paschalis eleganter resolvimus. (Promulg[atum] in Zachii Comm. liter. Aug. 1800 p. 120, 299.)

Abgedruckt in VI, p. 73—79.

) Numeratorem et denominatorem sinus lemniscatici (universalissime accepti) ad quantitates integrales reducere contigit; simul omnium functionum lemniscaticarum quae excogitari possunt evolutiones in series infinitas ex principiis genuinis haustae; inventum pulcherrimum sane nullique praecedentium inferius.

Praeterea iisdem diebus principia deteximus secundum quae series arithmetico-geometricae interpolari debent ita ut terminos in progressione data ad indicem quemcunque rationalem pertinentes per aequationes algebraicas exhibere iam in potestate sit.

Mai. ultim. Jun. 2. 3.

Der „Sinus lemniscaticus universalissime acceptus" ist jedenfalls die Umkehr des allgemeinen, in No. 105 genannten Integrals. Demgegenüber werden die in No. 110 genannten „transcendentes ellipticae" (dem heutigen Sprachgebrauch entgegen) als diejenigen Transcendenten aufzufassen sein, welche bei der Ellipse als solcher auftreten.

) Inter duos numeros datos semper dantur infinite multi termini medii tum arithmetico-geometrici tum harmonico-geometrici, quorum nexum mutuum ex asse perspiciendi felicitas nobis est facta.

Jun. 3. Brunsvigae.

Das harmonische Mittel zwischen zwei Größen a und b ist nach der Ausdrucksweise der älteren Mathematiker diejenige Größe x, welche durch die Gleichung $\frac{1}{x} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b}\right)$ gegeben ist.

) Theoriam nostram iam ad transcendentes ellipticas immediate applicavimus.

Jun. 5.

) Rectificatio Ellipseos tribus modis diversis absoluta.

Jun. 10.

Auch für die Nummern 105—111 bietet das soeben genannte Heftchen Ac die interessantesten Belege. Schering hat davon in III, p. 433—435, abgedruckt, was sich auf die Inversion des allgemeinen elliptischen Integrals erster Gattung bezieht (indem er dabei den Gesamttitel des Heftchens „Varia, imprimis de integrali $\int \frac{d\varphi}{\sqrt{1-\mu\mu\sin^2\varphi}}$" als Spezialüberschrift wählte): man kann die von ihm mitgeteilten Formeln kurz dahin zusammenfassen, daß Gauß nunmehr für die allgemeinen elliptischen Integrale erster Gattung dieselben Entwickelungen findet, die er früher nur erst für den lemniskatischen Fall besessen hatte, wobei er die allgemeinen elliptischen Thetafunktionen sowohl in Produktform wie in Reihenform benutzt

Das Heftchen enthält aber insbesondere auch Formeln für die Nullwerte der Theta (welche Schering in seine zusammenfassende Darstellung des arithmetisch-geometrischen Mittels III, p. 375—403, eingearbeitet hat). So findet sich auf p. 34 folgende Aussage:

„Sit $$\frac{1}{e^{\frac{\pi}{2}\frac{M\cos\varphi}{M\sin\varphi}}} = z,$$

$$1 + 2z^4 + 2z^{16} + 2z^{36} + \cdots = p,$$

$$2z + 2z^9 + 2z^{25} + \cdots = q,$$

eritque

$$\frac{\cos{}^1/_2\,\varphi}{\sqrt{M\cos\varphi}} = p, \quad \frac{\sin{}^1/_2\,\varphi}{\sqrt{M\cos\varphi}} = q, \quad \varpi = \frac{\pi\cos\varphi}{M\cos\varphi}, \quad \varpi' = \frac{\pi\cos\varphi}{M\sin\varphi}$$ ".*)

Übrigens sind außer dem Heftchen Ac im Nachlasse noch einige andere auf elliptische Funktionen bezügliche Stücke vorhanden, deren Entstehung auf Frühjahr und Sommer 1800 zu setzen sein dürfte, nämlich erstens ein Heftchen Ad, wesentlich Zahlenrechnungen enthaltend, und dann eine Reihe loser Blätter. Es muß einer besonderen Arbeit vorbehalten bleiben, aus der Menge dieser zusammenhangslosen und sich dabei häufig wiederholenden Notizen vielleicht doch noch einiges Interessante herauszufinden, was nicht schon in III oder VIII Aufnahme gefunden hat. Hier beschränke ich mich auf folgendes Detail. In VIII, p. 97, hat Fricke unter ausdrücklicher Bezugnahme auf die Tagebuchnotiz No. 105 eine Entwickelung, betreffend die

---

*) Über den Zusammenhang des arithmetisch-geometrischen Mittels mit den „Potenzreihen, in denen die Exponenten mit den Quadratzahlen fortschreiten", gibt Schering in III, p. 493 oben, an, daß Gauß ihn „nach Mitteilungen über eine mündliche Äußerung desselben schon im Jahre 1794 gekannt zu haben scheine". Es ist mir nicht gelungen, über diese mündliche Äußerung Genaueres zu erfahren; aber es kann kaum anders sein, als daß sich hier ein Mißverständnis eingeschlichen hat (wie denn ja auch Schering die ganze Angabe nur in sehr unsicherer Form macht). In der Tat scheint aus der Reihenfolge der Tagebuchnotizen mit Sicherheit hervorzugehen, daß Gauß die vorstehenden Formeln frühestens im Mai 1800 gefunden hat. Man überlege nur dieses: Gauß besaß die Thetafunktionen im lemniskatischen Falle seit Juli 1798 (siehe oben No. 92); hätte er nun andererseits den Zusammenhang des arithmetisch-geometrischen Mittels mit den Thetanullwerten vorher gekannt, so wäre No. 98 nach Inhalt und Form gleich unbegreiflich. —

Ich bringe diese Einzelheit hier zur Sprache, weil dieselbe für die Beurteilung der historischen Entwickelung von Gauß' Theorie der elliptischen Funktionen von entscheidender Bedeutung sein dürfte. Bisher war die Meinung die, daß Gauß zuerst von seiten des arithmetisch-geometrischen Mittels in die Theorie eingedrungen sei (vergl. III, p. 492—494, VIII, p. 102—105, sowie insbesondere den Aufsatz von P. Günther in den Nachrichten der K. Ges. d. Wiss. 1894). Demgegenüber scheint sich aus den aufeinanderfolgenden Tagebuchnotizen folgende Auffassung zu ergeben: Den Anfang machen in jedem Betracht die lemniskatischen Funktionen. Dann wird Gauß (Ende 1799) sozusagen zufällig auf die Beziehung zum arithmetisch-geometrischen Mittel aufmerksam, die ebensowohl im lemniskatischen Falle, wie im allgemeinen Falle statt hat. Und hierin liegt für ihn die Veranlassung, die Theorie der allgemeinen elliptischen Funktionen aufzunehmen und genau nach dem Muster der lemniskatischen Funktionen durchzuführen, — andererseits aber den Algorithmus des arithmetisch-geometrischen Mittels theoretisch zu vertiefen und nach allen für die Theorie der elliptischen Funktionen in Betracht kommenden Richtungen auszugestalten. —

Umkehrung des allgemeinen elliptischen Integrals erster Gattung, zum Abdruck gebracht, die in der Einführung der später von Weierstraß als Al_1 und Al_0 bezeichneten Potenzreihen gipfelt; diese Entwickelung wurde von Gauß auf die letzte Seite des Einbandes des in seiner Bibliothek befindlichen Buches: Maupertuisiana, Hamburg 1753, eingetragen, und es ist darum ihre Entstehungszeit nicht ohne weiteres anzugeben. Ich möchte hier ergänzend zufügen, daß sich die Reihenentwickelungen der Al in der Tat an einer Stelle der vorgenannten losen Blätter vorfinden, und zwar merkwürdigerweise gerade die beiden in VIII, p. 97, nicht genannten Reihen Al_2 und Al_3. Wegen der Al im Falle der Lemniskate vergl. die Bemerkung zu No. 61 oben.

Vielleicht kann man den bedeutsamen Inhalt der Nummern 105—111 in moderner Ausdrucksweise folgendermaßen resumieren: In No. 105 handelt es sich um die doppelte Periodizität des dort genannten allgemeinen elliptischen Integrals erster Gattung, aber nur erst in der Form, daß eine reelle und eine imaginäre Periode und damit eine Einteilung der komplexen Ebene in Periodenrechtecke gefunden werden. No. 106 bezieht sich auf die bei diesem Ausgangspunkte sich zunächst darbietenden Transformationen höherer Ordnung (bei denen ebenfalls nur erst rechteckige Figuren in Betracht gezogen werden). No. 108 bringt sodann die Reihenentwickelungen für Zähler und Nenner der Umkehrfunktion, insbesondere die allgemeinen Θ, ferner aber die Existenz der Teilungsgleichungen. In No. 109 hat Gauß die Prinzipien der allgemeinen linearen Periodentransformation gefunden (bei der die Rechtecke durch irgendwelche Parallelogramme ersetzt werden). Endlich folgt in No. 110, 111 die Anwendung auf Integrale der zweiten Gattung.

12) Calculum numerico-exponentialem omnino novum invenimus.

Jun. 12.

Es handelt sich vermutlich um die numerischen Berechnungen von Potenzen der Zahl e (mit Hilfe der Primzahllogarithmen, insbesondere der 48-stelligen Wolframschen), wie sie in III, p. 426—431, aus dem Nachlasse abgedruckt sind.

13) Problema e calculo probabilitatis circa fractiones continuas olim frustra tentatum solvimus.

Oct. 25.

14) Felix fuit dies quo multitudinem classium formar[um] binar[iarum] per triplicem methodum assignare largitum est nobis; puta:

1. per prod[uctum] infin[itum]
2. per aggregatum infinitum
3. per aggregatum finitum cotangentium seu logarithm[orum] sinuum.

Nov. 30. Brunsvigae.

15) Methodum quartam ex omnibus simplicissimam deteximus pro deter[minantibus] negativis ex sola multit[udine] numeror[um] ϱ, ϱ', etc. petitam, si $Ax + \varrho$, $Ax + \varrho'$ etc. sunt formae lineares divisor[um] for[mae] $\square + D$.

Dec. 3. Brunsvigae.

Mit diesen Nummern 114, 115 wolle man in I, p. 476, die Anmerkung zu Art. 306, X der Disq. a. vergleichen.

Ex voto nobis ac sic successit ut nihil amplius desiderandum supersit. Nov. 30 — Dec. 3. 1800.

In einem Additamentum zu Art. 306, X der Disq. a. äußert sich Gauß (I, p. 466) über denselben Gegenstand folgendermaßen: *Quaestionem hic propositam plane solvere nuper successit.*

1801.

116) Impossibile esse ut sectio circuli ad aequationes inferiores quam theoria nostra suggerit reducatur demonstratum.

Apr. 6. Brunsvigae.

Vergl. Disq. a., Art. 365 (I, 462), die gesperrten Worte: Omnique rigore demonstrare possumus, has aequationes elevatas nullo modo nec evitari nec ad inferiores reduci posse.

117) Iisdem diebus Pascha Judaeorum per methodum novam determinare docuimus. *(Apr. 1.)*

Vergl. die Veröffentlichung in Zach's monatlicher Korrespondenz, Mai 1802 (abgedruckt in VI, p. 80—81).

118) Methodus quinta theorema fundamentale demonstrandi se obtulit adiumento theorematis elegantissimi theoriae sectionis circuli. Puta

$$\sum \begin{matrix}\sin\\ \cos\end{matrix}\Big\}\frac{n^2}{a}P = \begin{vmatrix} +\sqrt{a} & & 0 & 0 & +\sqrt{a} \\ & +\sqrt{a} & & 0 & \end{vmatrix}$$

prout: $a \equiv 0 \quad 1 \quad 2 \quad 3 \pmod 4$

substituendo pro n omnes numeros a 0 usque ad $(a-1)$.

Mai. medio. Brunsvigae.

Vergl. unten, No. 123.

119) Methodus nova simplicissima expeditissima elementa orbitarum corporum coelestium investigandi.

Sept. m[edio]. Brunsvigae.

Zu den von hier an immer zahlreicher werdenden astronomischen Notizen des Tagebuchs wolle man außer Bd. VI der Werke und der Theoria Motus vor allen Dingen den Briefwechsel von Gauß und Olbers vergleichen, der mit dem 18. Januar 1802 beginnt.

120) Theoriam motus Lunae aggressi sumus.

Aug.

Im Nachlasse vorhanden.

121) Formulas permultas novas in Astronomia theorica utilissimas eruimus.

Oct.

1802. 1803. 1804.

122) Annis insequentibus 1802, 1803, 1804 occupationes astronomicae maximam otii partem abstulerunt, calculi imprimis circa planetarum novorum theoriam instituti. Unde evenit, quod hisce annis catalogus hicce neglectus est. Dies itaque, quibus aliquid ad matheseos incrementa conferre datum est, memoriae exciderunt.

In die vorgenannten Jahre fallen nicht nur Gauß' Bahnbestimmungen von Ceres, Pallas und Juno, sondern auch der Beginn seiner Störungsrechnungen. Genauere Angaben über Gauß' Arbeiten zur Störungstheorie findet man im „Vierten Bericht über den Stand der Herausgabe von Gauß' Werken" in den Nachrichten der K. Gesellschaft der Wiss. zu Göttingen, 1901, Geschäftliche Mitteilungen. (Abgedruckt in Bd. 55 der Math. Annalen, p. 139—142.)

1805.

123) Demonstratio theorematis venustissimi supra 1801 Mai. commemorati quam per 4 annos et ultra omni contentione quaesiveramus tandem perfecimus. Comment[ationes] rec[entiores], I.

Aug. 30.

Vergl. oben, No. 118. — Die zugehörige Abhandlung (Summatio serierum quarundam singularium) wurde der K. Ges. d. Wiss. am 24. August 1808 überreicht. Siehe II, p. 9ff. sowie p. 155—158. — Vergl. weiter einen Brief von Gauß an Olbers vom 3. September 1805 (Gesamtausgabe des Briefwechsels No. 133, p. 268, — die in Betracht kommende Stelle ist auch in Scherings Festrede von 1877 abgedruckt), wo Gauß seine fortgesetzten vergeblichen Bemühungen um den Beweis des Theorems und seinen endlichen Erfolg in lebhaftester Weise schildert.

124) Theoriam interpolationis ulterius excoluimus.

Nov.

Vergl. die in III, p. 265—327, abgedruckte Abhandlung aus dem Nachlaß: Theoria interpolationis methodo nova tractata, deren ersten Entwurf Schering, ebenda p. 328, auf Oktober 1805 setzt.

1806.

125) Methodum ex duobus locis heliocentricis corporis circa solem moventis eiusdem elementa determinandi novam perfectissimam deteximus.

Jan.

126) Methodum e tribus planetae locis geocentricis eius orbitam determinandi ad summum perfectionis gradum eveximus.

Mai.

127) Methodus nova ellipsin et hyperbolam ad parabolam reducendi.

Apr.

128) Eodem circiter tempore resolutionem functionis $\frac{x^p - 1}{x - 1}$ in factores quatuor absolvimus.

1807.

129) Methodus nova e quatuor planetae locis geocentricis, quorum duo extremi sunt incompleti, eius orbitam determinandi.

Jan. 21.

130) Theoria residuorum cubicorum et biquadraticorum incepta.

Febr. 15.

Gauß setzt in seiner ersten Kommentation über die Theorie der biquadratischen Reste (1828, siehe II, p. 67, 165), wie auch in dem unten bei No. 144 abgedruckten Satze eines Briefes an Dirichlet, den Anfang seiner Beschäftigung mit den biquadratischen Resten auf 1805.

Vergl. übrigens zu den Nummern 130—138 des Tagebuchs die in VIII, p. 3—11 und p. 15—19 abgedruckten Stücke des Nachlasses, sowie die Erläuterungen von Fricke auf p. 11—14 und p. 19—20 daselbst.

131) Ulterius exculta et completa reddita. Demonstratione adhuc eget.

Febr. 17.

132) Demonstratio huius theoriae per methodum elegantissimam inventa ita ut penitus perfecta sit nihilque amplius desideretur. Hinc simul residua et non residua quadratica egregie illustrantur.

Febr. 22.

133) Theoremata, quae theoriae praecedenti incrementa maximi pretii adjungunt, demonstratione eleganti munita (scilicet pro quibusnam radicibus primitivis statuere oporteat ipsum b positivum pro quibusque negativum, $a^2 + 27b^2 = 4p$, $a^2 + 4b^2 = p$).

Febr. 24.

134) Demonstrationem omnino novam theorematis fundamentalis principiis omnino elementaribus innixam deteximus.

Mai. 6.

Vergl. den Brief von Gauß an Olbers vom 12. Mai 1807 (No. 173 der Gesamtausgabe, p. 360). — Nach der durch das Tagebuch gegebenen Zählung handelt es sich bei der vorliegenden Nummer um den sechsten Gaußischen Beweis des Reziprozitätsgesetzes quadratischer Reste. Da aber die zugehörige Abhandlung (siehe II, p. 1ff, sowie p. 151—154) der K. Gesellschaft d. W. am 15. Januar 1808 vorgelegt wurde, also früher als die „Summatio serierum quarundam singularium" (No. 123), so wird dieser Beweis häufig als fünfter zitiert. Vergl. Gauß' eigene Angaben in II, p. 153.

1808.

135) Theoria divisionis in periodos tres (art. 358) ad principia longe simpliciora reducta.

Mai. 10.

Die Artikelnummer bezieht sich auf die Disquisitiones arithmeticae.

) Aequationem

$$X - 1 = 0,$$

quae continet omnes radices primitivas aequationis

$$x^n - 1 = 0,$$

in factores cum coefficientibus rationalibus discerpi non posse demonstr[atum] pro valoribus compositis ipsius n.

Jun. 12.

Die Gleichung sollte wohl $X = 0$ heißen. (D.)

7) Theoriam formarum cubicarum, solutionem aequ[ationis]

$$x^3 + ny^3 + n^2z^3 - 3nxyz = 1$$

aggressus sum.

Dec. 23.

Vergl. die Ausführungen bei Fricke in VIII, p. 24—26, sowie eine Bemerkung von Schering in II, p. 398. (Die dort zitierte, in II, p. 243—265, abgedruckte Abhandlung: „Disquisitionum circa aequationes puras ulterior evolutio", soll nach der Bemerkung von Dedekind auf p. 265 in der Tat aus dem Jahre 1808 stammen.)

1809.

3) Theorema de residuo cubico 3 per methodum specialem elegantem demonstratum per considerat[iones] valorum $\frac{x+1}{x}$ ubi terni semper habent a, $a\varepsilon$, $a\varepsilon^2$ exceptis duobus qui dant ε, ε^2, hi vero sunt

$$\frac{1}{\varepsilon - 1} = \frac{\varepsilon^2 - 1}{3}; \quad \frac{1}{\varepsilon^2 - 1} = \frac{\varepsilon - 1}{3}$$

adeoque productum $\equiv \frac{1}{3}$.

Jan. 6.

Hier ist ε nicht als dritte Wurzel aus 1, sondern als rationale Wurzel der Kongruenz $\varepsilon^2 + \varepsilon + 1 \equiv 0 \pmod{p}$ aufzufassen (wo p eine natürliche Primzahl von der Form $3n + 1$ bedeutet). (D.)

) Series ad media arithmetico-geometrica pertinentes fusius evolutae.

Jun. 20.

) Quinquesectionem pro mediis arithm[etico]-geom[etricis] absol[vimus].

Jun. 29.

Man vergl. hierzu die Abhandluug „Zur Theorie der neuen Transcendenten", die in III, p. 446—460, abgedruckt ist. Das betr. Manuskript findet sich (wie auch Schering in III, p. 494, hervorhebt) in einem Handbuche unmittelbar nach einer astronomischen Rechnung, der die Bemerkung beigefügt ist: „geendigt den 28. April 1809" (dieses Handbuch trägt z. Z. die Bezeichnung Bd). Dem Datum nach kann also die Abhandlung mit den vorstehenden beiden Tagebuchnotizen in Zusammenhang

gebracht werden; und in der Tat scheint auch inhaltlich eine Beziehung vorzuliegen. Übrigens ist nach den Darlegungen von Schering in III, pag. 494 anzunehmen, daß Gauß bereits 1808 zu den elliptischen Funktionen zurückgekehrt ist und diejenigen Entwickelungen begonnen hat, die sich auf Identitäten zwischen Θ-Funktionen stützen.

1812.

141) Catalogum praecedentem per fata iniqua iterum interruptum initio anni 1812 resumimus. In mense Nov. 1811 contigerat demonstrationem theorematis fundamentalis in doctrina aequationum pure analyticam completam reddere; sed quum nihil chartis servatum fuerit, pars quaedam essentialis memoriae penitus exciderat. Hanc per satis longum temporis intervallum frustra quaesitam tandem feliciter redinvenimus.

Febr. 29.

Es handelt sich um den sogenannten „zweiten" Beweis des Fundamentalsatzes der Algebra, den Gauß der K. Gesellschaft d. W. am 7. Dezember 1815 vorlegte. Vergl. III, p. 31ff, sowie p. 105—106.

142) Theoriam attractionis sphaeroidis elliptici in puncta extra solidum sita prorsus novam invenimus.

Sept. 26. Seebergae.

Gemeint ist Sternwarte Seeberg bei Gotha.

143) Etiam partes reliquas eiusdem theoriae per methodum novam mirae simplicitatis absolvimus.

Oct. 15. Gottingae.

Die Abhandlung über die Attraktion der elliptischen Sphäroide wurde der K. Gesellschaft d. W. am 18. März 1813 überreicht. Vergl. V, p. 1ff und p. 279—286.

1813.

144) Fundamentum theoriae residuorum biquadraticorum generalis, per septem propemodum annos summa contentione sed semper frustra quaesitum tandem feliciter deteximus eodem die quo filius nobis natus est.

Oct. 23. Gottingae.

Hiermit wolle man eine Stelle in dem Briefe von Gauß an Dirichlet vom 30. Mai 1828 vergleichen, der in II, p. 516—518 abgedruckt ist. Es heißt dort p. 516 im Anschluß an die 1825 publizierte erste Commentatio über die biquadratischen Reste:

„Die ganze Untersuchung, deren Stoff ich schon seit 23 Jahren vollständig besitze, die Beweise der Haupttheoreme aber (zu welchen das in der ersten Kommentation noch *nicht* zu rechnen ist) seit etwa 14 Jahren — (obwohl ich wünsche und hoffe, an letzteren, den Beweisen, noch einiges vereinfachen zu können) — etc. etc."

Siehe übrigens die Bemerkung zu No. 130.

45) Subtilissimum hoc est omnium eorum quae umquam perfecimus. Vix itaque operae pretium est, his intermiscere mentionem quarumdam simplificationum ad calculum orbitarum parabolicarum pertinentium.

1814.

46) Observatio per inductionem facta gravissima theoriam residuorum biquadraticorum cum functionibus lemniscaticis elegantissime nectens. Puta si $a+bi$ est numerus primus, $a-1+bi$ per $2+2i$ divisibilis, multitudo omnium solutionum congruentiae

$$1 \equiv x^2 + y^2 + x^2y^2 \,(\text{mod. } a+bi)$$

inclusis $x = \infty$, $y = \pm i$; $x = \pm i$, $y = \infty$ fit $= (a-1)^2 + b^2$.

Jul. 9.

Schlußbemerkung: Hinter der Nummer 146, mit der die Aufzeichnungen des Tagebuchs als solche schließen, sowie auch zwischendurch eingeheftet, finden sich im Original noch einige Blätter, die mit verschiedenartigen, vielfach nicht mathematischen Notizen bedeckt sind; eine besondere Bedeutung scheinen dieselben nicht zu besitzen. Auf der Rückseite des Umschlags endlich stehen (in eine Falte hineingeschrieben) die folgenden Sentenzen:

„Nil Desperare"
„Habeant sibi"
„QUA EXEAS HABES".

Sachregister.

I. Zahlentheorie.
A) Elementare Beziehungen zwischen Zahlen. Asymptotische Gesetze: No. 5, 9, 11, 12, 14, 31.
B) Quadratische Reste. a) Restcharaktere von -1, ± 2: No. 56, 64.
b) Reziprozitätsgesetz. 1. Beweis: No. 2.
2. Beweis: No. 16.
3. und 4. Beweis: No. 23, 30.
5. Beweis: No. 118, 123.
6. Beweis: No. 134.
c) Allgemeine Restcharaktere: No. 4.
C) Kubische und biquadratische Reste: No. 130, 131, 132, 133, 138, 144, 145, 146.
D) Kongruenzen. a) No. 22, 26, 52.
b) No. 68, 69, 75, 76, 77, 79, 146.
E) Formen. a) Quadratische binäre Formen: No. 15, 19.
Insbes. Klassenanzahl: No. 84, 114, 115.
b) Quadratische ternäre Formen: No. 17, 18, 57, 96, 103.
c) Kubische Formen: No. 137.
F) Kreisteilungszahlen: No. 70.

II. Algebra.
A) Existenz der Wurzeln: No. 80, 141.
B) Potenzsummen der Wurzeln: No. 6, 28.
C) Umformung der Gleichungen: No. 34, 35, 36, 37, 41.
D) Elimination: No. 89.
E) Algebraische Kettenbrüche: No. 27.
F) Kreisteilung. a) Allgemeine Auflösung, Konstruktion der Polygone: No. 1, 38, 55, 65, 74.
b) Kubische und biquadratische Resolvente: Nr. 39, 67, 128, 135.
c) Irreduzibilität und Verwandtes: No. 3, 40, 66, 71, 73, 78, 116, 136.

III. Analysis.
A) Kettenbrüche: No. 7, 58, 113.
B) Interpolation und mechanische Quadratur: No. 44, 48, 124.
C) Differentialrechnung: No. 47.
D) Integralrechnung: No. 32, 33, 50, 53, 54, 59.
E) Reihen. a) Lagrangesches Theorem: No. 49, 86.
b) Skalen von Reihen: No. 8, 10, 20.
c) Spezielle Reihenentwickelungen: No. 24, 32, 33, 45, 46.
d) Summierung spezieller Reihen: No. 29, 82, 87.
e) Trigonometrische Reihen: No. 87, 104.
F) Lemniskatische Funktionen: No. 51, 60, 61, 62, 63, 91a, 91b, 92, 98, 112, 146.
G) Arithmetisch-geometrisches Mittel: No. 98, 100, 101, 102, 106, 108, 109, 139, 140.
H) Allgemeine elliptische Funktionen: No. 105, 106, 108, 110, 111.

IV. Geometrie.
A) Elemente der Geometrie: No. 72, 81, 99.
B) Algebraische Kurven: No. 21.

V. Wahrscheinlichkeitsrechnung: No. 88, 113.

VI. Mechanik.
A) Zusammensetzung von Kräften: No. 85.
B) Anziehung von Kugel und Ellipsoid: No. 90, 142, 143.
C) Ballistisches Problem: No. 93.

VII. Astronomie.
A) Kometenbahnen: No. 94, 121, 127, 145.
B) Planetenbahnen: No. 119, 121, 122, 125, 126, 129.
C) Mondbewegung: No. 120.
D) Parallaxe: No. 97.
E) Osterfestberechnung: No. 107, 117.

(In dieses Register nicht mit aufgenommen sind die Nummern: 13, 25, 42, 43, 83, 95, deren Bedeutung unklar blieb.)

Über den Stand der Herausgabe von Gauß' Werken.

Fünfter Bericht*).

Von

Felix Klein in Göttingen.

An neuem Material ist uns im verflossenen Jahre zugegangen:

1) 10 Originalbriefe Gauß an Schumacher.
2) Manuskripte zu zwei Aufsätzen in den Astronomischen Nachrichten.

} Aus dem Nachlaß von Rich. Schumacher, Kiel.

3) Zwei Kopien von Briefen Gauß an den Prorektor R. Wagner, geschenkt von Herrn Professor Stäckel.

4) Ein Originalbrief Gauß an ?, angekauft.

5) Ein Originalbrief Olbers an Heeren, betr. Vorschlag von Gauß für den Direktorposten der Sternwarte in Göttingen (3. November 1802). Von Herrn Hermann Kieser in Stuttgart geschenkt.

6) Ein Originalbrief Gauß an seinen Sohn Joseph (1. Dez. 1842), geschenkt von Herrn Kieser.

7) Kopie eines Briefes Gerling an Pfaff vom 21. Oktober 1810, geschenkt von Herrn Professor von Brill.

8) Konzept zu Scherings Gedächtnisrede auf Gauß, vom 4. Dezember 1867, geschenkt von Frau Geheimrat Schering.

Zur Einsicht und Anfertigung von Kopien erhielten wir leihweise:

9) Zwei Originalbriefe Gauß an Voigtländer, durch Herrn Professor Zincke, Braunschweig.

Durch Verlegung des geophysischen Instituts in den auf dem Hainberg errichteten Neubau sind in der Sternwarte im Laufe des Winters die sogenannten Gaußzimmer frei geworden; es bietet sich daher jetzt die

---

*) Abgedruckt aus den Nachrichten der K. Gesellschaft der Wissenschaften zu Göttingen, Geschäftliche Mitteilungen, 1902, Heft 1 (Öffentliche Sitzung vom 26. April 1902).

Möglichkeit, in denselben den gesamten wissenschaftlichen Nachlaß von Gauß in übersichtlicher Weise aufzustellen. Hierüber ist zwischen dem Prorektor der Universität, dem geschäftsführenden Sekretär der Gesellschaft der Wissenschaften und dem Direktor der Sternwarte eine vom 5. März 1902 datierte Vereinbarung zustande gekommen, deren wesentliche Bestimmungen folgendermaßen lauten:

1. Die wissenschaftliche Hinterlassenschaft von Gauß, welche im Mai 1856 vom Staate für die Universität erworben wurde, war bisher getrennt in den schriftlichen Nachlaß, der der K. Gesellschaft der Wissenschaften zur Verwahrung und Bearbeitung anvertraut war, und die Bibliothek, die der Sternwarte zur Aufbewahrung und Benutzung überwiesen war.

2. Diese Trennung soll jetzt rückgängig gemacht und sollen beide Teile des Nachlasses bis auf weiteres unter der Verwaltung des Direktors der K. Sternwarte im Gebäude der Sternwarte aufbewahrt werden.

3. Beide Teile werden daselbst in den ursprünglichen Gaußzimmern vereinigt unter der gemeinsamen Bezeichnung „Gaußarchiv" eine würdige Aufstellung finden.

4. Der Direktor der Sternwarte übernimmt die Verpflichtung, diesen Gesamtnachlaß der K. Gesellschaft der Wissenschaften für die Zwecke der Herausgabe beständig zur Verfügung zu halten und dessen literarische Verwertung bis auf weiteres ohne Genehmigung der Gesellschaft der Wissenschaften keinem andern zu gewähren.

Die hiermit festgelegte Transferierung des Gesamtnachlasses in die Gaußzimmer der Sternwarte ist im Monat April erfolgt.

Was den Fortschritt der Bearbeitung des Gaußnachlasses angeht, so ist vorab zu bemerken, daß das im 2. Berichte (1899) genannte, Hrn. Gauß in Hameln gehörige Tagebuch von Gauß (das von Gauß' wissenschaftlichen Entdeckungen in den Jahren 1796 bis 1800, bez. mit großen Unterbrechungen bis 1814, handelt) durch den Berichterstatter unter Benutzung einschlägiger Teile des sonstigen Nachlasses in der historischen Festschrift, welche die Gesellschaft der Wissenschaften zur Feier ihres 150jährigen Bestehens herausgab, mit Anmerkungen versehen veröffentlicht worden ist (Festschrift, p. 1—44)*). Diese Veröffentlichung ist nur erst eine vorläufige, die später, in Band X der Werke, durch eine definitive zu ersetzen sein wird. Immerhin hat dieselbe jetzt bereits für unsere Kenntnis der geschichtlichen Aufeinanderfolge von Gauß' Entdeckungen einige bemerkenswerte Beiträge geliefert, insbesondere was die Theorie

*) Vergl. den Wiederabdruck im 56ten Bande der Math. Annalen, p. 509 ff.

der elliptischen Funktionen angeht*). Ferner ist zu berichten, daß der Druck von Bd. VII (Astronomie) durch Herrn Brendel entsprechend dem im vorigen Bericht aufgestellten Programm planmäßig weitergeführt wurde, sowie, daß die Herren Krüger und Börsch die in Bd. IX zu veröffentlichende Bearbeitung des geodätischen Teils von Gauß' Nachlaß jetzt vollendet haben; das fertig vorliegende Manuskript soll baldigst in Druck genommen werden. Über den Inhalt desselben erstatten die Herren Krüger und Börsch folgenden Bericht:

„Gauß' theoretische Arbeiten in der Geodäsie scheinen im zweiten Jahrzehnt des vergangenen Jahrhunderts begonnen zu sein. Die Anfänge seiner geodätischen Tätigkeit liegen aber weiter zurück. Schon 1803 hatte Gauß aus eigenem Antriebe an eine Aufnahme des braunschweigischen Landes gedacht und zu diesem Zwecke Winkelmessungen ausgeführt. In demselben Jahre nahm er auch an den Beobachtungen der Pulversignale zu Längenbestimmungen und an Breitenbestimmungen für die von v. Zach geleitete trigonometrische und astronomische Aufnahme von Thüringen teil. Für die kurz vorher stattgehabte Vermessung Westphalens durch den preußischen Generalmajor von Lecoq sind von ihm Berechnungen astronomischer Bestimmungen geliefert worden. In dem darüber in Zachs monatlicher Korrespondenz, 1803, erschienenen Aufsatze Lecoqs wird gesagt: „Im astronomischen Teile ist mir der Doktor Gauß von großem Nutzen gewesen, seine Ausrechnungen und Briefe haben zu meinem Unterrichte viel beigetragen."

„Aber erst die in Aussicht genommene dänische Gradmessung, mit deren Ausführung Schumacher im Sommer 1816 betraut worden war, und die dadurch angeregte Hoffnung, sie durch Hannover fortzusetzen, dürfte Gauß veranlaßt haben, ein größeres Interesse geodätischen Untersuchungen zuzuwenden. Am 5. Juli 1816 schreibt er an Schumacher; „Über die Art, die gemessenen Dreiecke im Kalkül zu behandeln, habe ich mir eine eigene Methode entworfen." In demselben Briefe heißt es: „Mir ist eine interessante Aufgabe eingefallen, nämlich: allgemein eine gegebene Fläche so auf einer andern (gegebenen) zu projizieren (abzubilden), daß das Bild

*) Bei dieser Gelegenheit möge erwähnt werden, daß sich infolge von Studien, mit denen mein früherer Assistent, Herr Conrad Müller hier, über die an der Göttinger Universität um die Wende des 18. Jahrhunderts wirkenden Mathematiker beschäftigt ist, herausgestellt hat, daß die sog. „Dissertatiuncula", die unter dem Namen von Gauß 1893 in den Göttinger Nachrichten publiziert wurde und die dementsprechend in Bd. VIII der Werke wieder abgedruckt ist, nicht von Gauß, sondern von Thibaut herrührt. Letzterer hat dieselbe der Gesellschaft der Wissenschaften im Jahre 1799 eingereicht, und es folgt dann 1800 in den Göttinger Anzeigen, Stück 31, eine Besprechung durch Kästner, die im wesentlichen eine vom Verf. selbst herrührende Inhaltsangabe reproduziert.

dem Original in den kleinsten Teilen ähnlich werde"; die Aufgabe scheint ihm „eine schickliche Preisfrage für eine Sozietät" zu sein. Die in der Bearbeitung derselben, die von Gauß am 11. Dezember 1822 an die Königliche Sozietät der Wissenschaften in Kopenhagen eingeschickt wurde, festgestellten Prinzipien haben ihm dazu gedient, die Ergebnisse geodätischer Messungen darzustellen.

„Bekanntlich hat Gauß als Projektionsmethode für die hannoversche Gradmessung und die sich anschließende Landesvermessung die konforme Übertragung des Rotationsellipsoids auf die Ebene gewählt. Hierbei wird die Abbildungsfunktion dadurch bestimmt, daß ein Meridian durch eine Gerade, die Abscissenachse, dargestellt wird, deren Abschnitte gleich den entsprechenden elliptischen Meridianbögen sind. Die Ergebnisse der Messungen erscheinen bei dieser Projektion in der Form von ebenen rechtwinkligen Koordinaten der Beobachtungspunkte. Der Anfangspunkt des Koordinatensystems entspricht dem Mittelpunkte der Achse des Reichenbachschen Meridiankreises der Göttinger Sternwarte (bei der früheren Aufstellung). Wenn sich nun auch im Nachlaß keine zusammenhängende Darstellung dieser Übertragungsmethode gefunden hat, so ließ sich doch mit Hülfe der Niederschriften in Handbüchern und auf losen Rechenzetteln ein Bild des Gaußschen Verfahrens herstellen. Gauß entwickelt zunächst die Reihen, welche die geographische Länge und Breite, die Meridiankonvergenz und das Vergrößerungsverhältnis aus den ebenen rechtwinkligen Koordinaten, und umgekehrt diese sowie die Meridiankonvergenz aus den geographischen Koordinaten zu berechnen gestatten. Für das Vergrößerungsverhältnis werden verschiedene Entwicklungen gegeben. Die Ableitung der Unterschiede in den Azimuten und in der linearen Länge zwischen einer geodätischen Linie des Ellipsoids und der Geraden in der Ebene, die durch die Projektionen der Endpunkte der ersteren geht, erfolgt nicht wie in den späteren „Untersuchungen über Gegenstände der höheren Geodäsie, erste Abhandlung, 1843", Art. 12 und 13, sondern nach einem auch jetzt noch ganz neuen Verfahren. Es werden allgemein für eine geodätische Linie, die einer beliebigen Fläche angehört, diese Reduktionen bei der konformen Abbildung auf die Ebene abgeleitet, aus denen sich dann leicht die speziellen, für die geodätische Linie des Erdellipsoids herstellen lassen. Bei den Reihen für die ebenen rechtwinkligen Koordinaten und für die geographischen Koordinaten braucht man die geographische Breite, die einer bestimmten Abscisse entspricht, und umgekehrt die Abscisse, die zu einer gegebenen Breite gehört. Um diese Übergänge leicht zu erhalten, werden Reihen zwischen der ellipsoidischen Breite φ und der Breite ψ auf einer Kugel, die gleichen Meridianumfang mit dem Erdellipsoid hat, und wobei die Bögen zwischen dem Äquator und den Breiten φ und ψ

gleich sind, gegeben. Außerdem werden aber noch Reihen zwischen ψ, φ und einer fingierten Polhöhe ω, die mit φ durch die Beziehung $\frac{d\omega}{\cos\omega} = \frac{d\varphi}{\cos\varphi} \cdot \frac{1-e^2}{1-e^2\sin^2\varphi}$ verbunden ist, entwickelt, mit deren Hilfe eine andere, neue Berechnung der ebenen Koordinaten aus den geographischen und umgekehrt ermöglicht wird.

„Gleichzeitig mit der konformen Übertragung des Ellipsoids auf die Ebene hat Gauß noch die folgenden Abbildungen in Betracht gezogen: Erstens die konforme Doppelprojektion des Ellipsoids auf die Kugel und der Kugel durch stereographische und Mercatorsche Projektion auf die Ebene, zweitens die konforme Übertragung des Ellipsoids auf einen Kegelmantel, und drittens die stereographische Darstellung des Ellipsoids auf der Ebene. Namentlich für die ersten beiden sind Gebrauchsformeln gegeben worden. Die Abbildung der Oberfläche des Erdellipsoids auf die Kugeloberfläche erfolgt hier jedoch noch mit Hilfe der im Art. 13 der „Allgemeinen Auflösung der Aufgabe, die Teile einer gegebenen Fläche auf einer andern gegebenen Fläche so abzubilden etc." enthaltenen Entwicklungen. Besonders reichhaltig sind die Formelaufstellungen für die Mercatorsche Projektion der Kugel auf die Ebene, die, indem die Strecken eines Hauptmeridians den entsprechenden Strecken auf der Abscissenaxe gleich sind, das Analogon der Projektionsmethode der hannoverschen Vermessung ist. Besonders für die Unterschiede der Richtungen eines auf die Ebene projizierten Bogens eines größten Kreises und der zwischen denselben Endpunkten verlaufenden Geraden, wie auch für die Entfernungsreduktion finden sich elegante Entwicklungen.

„Da es sich beim Beginn der hannoverschen Messungen allein um eine Breitengradmessung handelte, die sich nur wenig von demselben Meridian entfernt, so war die von Gauß gewählte Projektionsmethode die günstigste; während, wenn man von vornherein eine Landesvermessung ins Auge gefaßt hätte, sowohl eine der obigen Abbildungen, wie auch ein anderer Anfangspunkt als Göttingen vorzuziehen gewesen wäre.

„Für die Übertragung der geographischen Koordinaten vermittelst der geodätischen Linie hat Gauß verschiedene Entwicklungen nebst dazu gehörigen Beispielen gegeben. Die von ihm zur successiven Berechnung der Breiten und Längen der Dreieckspunkte sowie der Azimute der Dreiecksseiten benutzten Formeln haben schon die Form, wie die der zweiten Abhandlung der „Untersuchungen über Gegenstände der höheren Geodäsie, 1846", Art. 23/25 und Art. 33, unterscheiden sich aber von ihnen durch eine andere Anordnung der quadratischen Korrektionsglieder. Von besonderem Interesse ist eine Anwendung von Sätzen der Flächen-

theorie zur Herleitung von Reihen für die lineare Länge und der Azimute einer geodätischen Linie auf dem Rotationsellipsoid, wenn die geographischen Koordinaten ihrer Endpunkte gegeben sind. Ebenso wird von der Flächentheorie aus die Abweichung der geodätischen Linie des Umdrehungsellipsoids vom vertikalen Schnitte erhalten.

„Im Oktober 1818 hatte Gauß, um an Schumachers Messungen anzuschließen, in Lüneburg beobachtet, und hier (wie er in einem Tagebuche der Sternwarte bemerkt hat) durch ein von der Sonne beleuchtetes Fenster des Michaelisturms in Hamburg, das ihm beim Pointieren lästig fiel, die erste Anregung zu der im Herbste 1820 gemachten Erfindung des Heliotrops erhalten. Seine eignen Gradmessungsarbeiten begannen im Jahre 1821, indem auf den Stationen Göttingen (Sternwarte), Meridianzeichen, Hohehagen, Hils und Brocken gemessen wurde; 1822 ist von ihm auf den Punkten: Lichtenberg, Deister, Garßen, Falkenberg, Scharnhorst, Breithorn, Hauselberg, Wulfsode und Wilsede, 1823 auf den Punkten: Timpenberg, Nindorf, Lüneburg und Hamburg, ferner zum zweiten Male auf der Sternwarte, dem Hohehagen und dem Brocken, 1824 zum zweiten Male auf Falkenberg und in Wilsede, sowie auf den Stationen: Elmhorst, Litberg, Bullerberg, Brüttendorf, Bottel, Zeven, Steinberg, Brillit, Bremen und Garlste und 1825 auf den Stationen: Brüttendorf, Bremen, Brillit und Garlste zum zweiten Male, auf Zeven zum zweiten und dritten Male, ferner auf den Punkten: Bremerlehe, Varel, Langwarden und Jever beobachtet worden. Auf dem Inselsberge, der auch ein Punkt der hannoverschen Gradmessung ist, erfolgten die Beobachtungen 1821 durch Encke und 1823 durch Gerling. Die Feldarbeiten für die unter Gauß' Leitung von den hannoverschen Offizieren Müller, Hartmann und Joseph Gauß ausgeführte Landesvermessung haben von 1828 bis 1844 gedauert; die rechnerische Bearbeitung hat sich bis 1848 hingezogen.

„Gauß hat bekanntlich mit einem Repetitionstheodolith die Winkel zwischen den einzelnen Richtungen gemessen. Wie die Beobachtungsbücher und die Stationsausgleichungen, so weit sie erhalten sind, zeigen, haben auf keinem der obigen Hauptdreieckspunkte die Winkelmessungen in allen Kombinationen stattgefunden. Wohl aber scheint dies manches Mal auf den Stationen der Landesvermessung der Fall gewesen zu sein. Die Ausgleichungen der Stationsbeobachtungen sind von Gauß, dem Stande der Beobachtungen entsprechend, mehrfach wiederholt worden; so sind z. B. für die Station Wilsede vier verschiedene, mit den Messungen fortschreitende Ausgleichungen vorhanden. Wahrscheinlich hörte Gauß mit den Messungen dann auf, wenn, abgesehen von äußern Umständen, neue Beobachtungen nicht mehr wesentliche Änderungen der Verbesserungen

hervorriefen. Die Anzahlen der Winkelrepetitionen sind als Gewichte der beobachteten Winkel angesetzt, als Unbekannte die Verbesserungen der Richtungen genommen worden. Auf einigen Stationen der letzten beiden Jahre der Gradmessung ist auch noch eine Verbesserung infolge des Gleitens des Kreises in Rücksicht gezogen. Die Auflösung der Normalgleichungen erfolgte nach dem durch Gerling bekannt gewordenen Näherungsverfahren. Nachdem noch die Korrektionen wegen der Abweichung der geodätischen Linie vom vertikalen Schnitte und wegen der Höhe des anvisierten Objekts in Rechnung gezogen waren (nach einem Briefe an Olbers), wurden die Stationsergebnisse als Sätze unabhängiger Richtungsbeobachtungen mit gleichen Gewichten — nur die eine Richtung Bottel-Steinberg hat das Gewicht $\frac{1}{4}$ — in die Netzausgleichung eingeführt.

„Auch die Netzausgleichung ist vollständig nicht mehr vorhanden, doch konnte aus den losen Blättern, die sich darauf beziehen, der Gang der Gaußschen Rechnung festgestellt werden. Die Anzahl der Dreiecks-punkte ist 33, die Anzahl der gegenseitig beobachteten Richtungen 75, die Anzahl der Winkelgleichungen also 43 und die Anzahl der Seitengleichungen 12. Die Aufstellung der Winkelgleichungen geschah in derselben Weise, wie bei dem Fünfeck im „Supplementum theoriae combinationis etc., Societati regiae exhibitum 1826 Sept. 16"; die Summe der Verbesserungen der Winkel eines Dreiecks ist gleich dem berechneten weniger dem beobachteten Excesse desselben. Die aus den Winkelgleichungen gebildeten Normalgleichungen hat Gauß zunächst aufgelöst und daraus Verbesserungen berechnet, welche die Dreieckswidersprüche beseitigen. Mit diesen erstmalig verbesserten Richtungsbeobachtungen wurden die Seitengleichungen aufgestellt, zunächst in derselben Weise, wie bei dem Fünfeck im Supplementum etc.; darauf werden sie aber umgeformt mit Hilfe der Winkelgleichungen, die zu der Figur gehören, auf welche sich die betreffende Seitengleichung bezieht. Wenn nämlich bei der Ausgleichung einer Figur außer einer Anzahl von Winkelgleichungen, deren absolute Glieder Null sind, nur eine Seitengleichung zu erfüllen ist, so kann man dies durch Ausgleichung einer einzigen Bedingungsgleichung erreichen. Und zwar wird diese dadurch erhalten, daß man zu der ursprünglichen Seitengleichung die Winkelgleichungen addiert, nachdem man sie vorher mit Koeffizienten multipliziert hat, die so bestimmt sind, daß die Summe der Quadrate der Koeffizienten in der neuen Bedingungsgleichung ein Minimum wird. Aus den so umgeformten zwölf Seitengleichungen werden nun auch die Normalgleichungen gebildet, deren Auflösung neue Werte der Verbesserungen gibt. Nach dieser ersten Ausgleichung werden wieder die neu entstandenen Dreieckswidersprüche weggeschafft, und mit den dadurch erhaltenen Verbesserungen von neuem

die Seitengleichungen und die zugehörigen Normalgleichungen aufgestellt, die sich jetzt von den vorigen nur in den konstanten Gliedern unterscheiden. Durch ihre Auflösung ergeben sich wieder neue Werte der Richtungsverbesserungen. In dieser Weise hat Gauß die Ausgleichung noch zweimal wiederholt. Dies Verfahren führt genau zu den Werten, die einer Ausgleichung sämtlicher Bedingungsgleichungen in einem Gusse entsprechen. Infolge der Form der Bedingungsgleichungen ist die Rechnung so rasch zum Stehen gekommen.

„Dafür, daß bei der Aufstellung der Seitengleichung in einem Viereck als Zentralpunkt am passendsten derjenige Eckpunkt gewählt wird, der der größten Dreiecksfläche gegenüberliegt, hat Gauß einen rein analytischen Beweis gegeben.

„Bei der Ausgleichung der Dreiecke der Landesvermessung scheint Gauß die Winkelsumme der Dreiecke scharf ausgeglichen, und darauf die Seitengleichungen in solcher abgekürzter Form in Rücksicht gezogen zu haben, daß durch ihre Ausgleichung die Winkelgleichungen nicht mehr gestört werden. Diese Näherungsform der Seitengleichung wird dadurch erhalten, daß die Verbesserung der Richtung $P_i P_k$ gleich der Verbesserung der Richtung $P_k P_i$ gesetzt wird. Von der Ausgleichung des Dreieckskranzes um Oldenburg, gemessen 1829/31, ist der Ansatz der Bedingungsgleichungen vorhanden, und zwar werden diese nach Anbringung der Richtungskorrektionen in der Ebene aufgestellt. Zum ersten Mal in der Geodäsie werden hier die drei Polygongleichungen gebildet, die den Zusammenschluß des Kranzsystems bewirken.

„Die Bestimmung der Nebenpunkte ist wohl meistens durch Vorwärtseinschneiden von den Hauptpunkten aus erfolgt. Die Berechnung ihrer ebenen rechtwinkligen Koordinaten mit Hilfe der Methode der kleinsten Quadrate ist fast ganz allein von Gauß innerhalb der Jahre 1828 bis 1848 ausgeführt worden; nur einen Winter hindurch hat ihn sein Sohn, der Leutnant Gauß, und in den letzten Jahren der Professor Goldschmidt dabei unterstützt. Die Gesamtzahl der bestimmten Punkte betrug gegen 2600."

„Kleinere Notizen von Gauß beziehen sich auf die terrestrische Refraktion, den Bordaschen Kreis, die Reduktion schiefer Winkel auf den Horizont, die Bestimmung des Winkelwerts und seines Gewichts aus Repetitionsbeobachtungen, die Ausgleichung eines aus Winkelbeobachtungen erhaltenen Polygons, wenn nur die Winkelgleichungen berücksichtigt werden, und anderes.

„Zum Wiederabdrucke werden gelangen die Bestimmung des Breitenunterschiedes zwischen den Sternwarten von Göttingen und Altona, der Brief an Baeyer über die Änderung der geographischen Breite mit der

Höhe, die Veröffentlichungen über den Heliotrop, sowie die Mitteilungen über die hannoversche Gradmessung, ferner Auszüge aus den Briefwechseln mit Schumacher, Bessel und Olbers, außerdem ein Brief an Bohnenberger. Zu diesen kommen bisher nicht veröffentlichte Auszüge aus dem Briefwechsel mit Gerling und aus Gauß' Berichten an das hannoversche Ministerium. Für die von Gauß beabsichtigte Publikation über die hannoversche Gradmessung ist der Plan und zum Teil die Einleitung vorhanden."

Göttingen, im April 1902.

Zur zweiten Variation bei isoperimetrischen Problemen.

Von

OSKAR BOLZA in Chicago.

Herr Kneser hat im 55. Band dieser Annalen einen strengen Beweis für die *Notwendigkeit der Jacobischen Bedingung bei der einfachsten Klasse isoperimetrischer Aufgaben* gegeben, wobei jedoch die Frage in einem gewissen Ausnahmefall*) unentschieden bleibt.

Der Zweck der folgenden Note ist, zu zeigen, daß sich auch dieser *Ausnahmefall* einfach erledigen läßt mit Hilfe einer Methode, welche Herr H. A. Schwarz in seinen Vorlesungen**) für den analogen Beweis im Fall der einfachsten Aufgabe ohne Nebenbedingungen entwickelt hat.

Die Aufgabe, um welche es sich handelt, läßt sich folgendermaßen formulieren:

Es seien H_1, H_2, U drei im Intervall (t_0, t_1) reguläre Funktionen von t; überdies sei in diesem Intervall $H_1 > 0$ und U nicht identisch Null; ferner bezeichne

$$\Psi(w) \equiv H_2 w - \frac{d}{dt}\left(H_1 \frac{dw}{dt}\right)$$

und es seien u, v Lösungen der beiden Differentialgleichungen

$$\Psi(u) = 0, \qquad \Psi(v) = U \tag{1}$$

welche beide in t_0 verschwinden***):

*) Vgl. auch die Dissertation von Herrn Hormann, *Untersuchungen über die Grenzen, zwischen welchen Unduloide und Nodoide etc.*, Göttingen 1887, in welcher über die entsprechenden Untersuchungen von Weierstraß berichtet wird, und derselbe Ausnahmefall als noch unerledigt bezeichnet wird.

**) Die Methode ist mir aus einer Nachschrift von Herrn Dr. J. C. Fields der Vorlesung über Variationsrechnung vom Wintersemester 1898/99 bekannt; es ist dieselbe Methode, die von Herrn Sommerfeld auf Doppelintegrale ausgedehnt worden ist, Jahresber. d. Deutschen M. V., VIII, pag. 188.

***) Es ist bekannt, wie man solche Lösungen herstellen kann, sobald das allgemeine Integral der Eulerschen Differentialgleichung gefunden ist; vgl. Hormann l. c. und Kneser l. c.; die Funktionen u, v sind lineare Kombinationen der von Kneser mit A, B bezeichneten Funktionen.

(2) $$u(t_0) = 0, \qquad v(t_0) = 0,$$

endlich bezeichne:

$$m = \int_{t_0}^{t} u\, U\, dt, \qquad n = \int_{t_0}^{t} v\, U\, dt,$$

$$\Delta(t) = mv - nu.$$

Es ist dann $\Delta(t_0) = 0$; sei t_0' der zunächst auf t_0 folgende Nullpunkt von $\Delta(t)$ (der zu t_0 *konjugierte Punkt*) und es werde angenommen, daß

(3) $$t_0' < t_1.$$

Alsdann soll gezeigt werden: Man kann stets Funktionen w von t finden, welche in t_0 und t_1 verschwinden:

(4) $$w(t_0) = 0, \qquad w(t_1) = 0,$$

für welche

(5) $$\int_{t_0}^{t_1} w\, U\, dt = 0$$

und für welche das Integral*)

$$J_2 = \int_{t_0}^{t_1} \left(H_1 \left(\frac{dw}{dt}\right)^2 + H_2 w^2 \right) dt$$

einen negativen Wert annimmt.

Dabei soll w selbst stetig sein im ganzen Intervalle (t_0, t_1), $\frac{dw}{dt}$ soll abgesehen von ein eendlichen Anzahl von Punkten existieren und stetig sein, und auch in den Ausnahmepunkten sollen vordere und hintere Derivierte existieren und endlich sein.

Für den Fall, daß u und v nicht beide in t_0' verschwinden, hat Herr Kneser in der angegebenen Abhandlung den Beweis geführt, indem er zeigt, daß dann $\Delta(t)$ in t_0' zu ungerader Ordnung verschwindet, woraus sich nach einer von Weierstraß herrührenden Schlußweise das gewünschte Resultat ergibt.

Es bleibt noch der Ausnahmefall

(6) $$u(t_0') = 0, \qquad v(t_0') = 0$$

zu untersuchen.

Da

(7) $$v\Psi(u) - u\Psi(v) = \frac{d}{dt} H_1 (uv' - u'v),$$

*) Auf diese Form kann man bekanntlich, nach Weierstraß, im vorliegenden Fall die zweite Variation transformieren.

so folgt*) aus (1) und (2)

$$H_1(uv' - u'v) = -m. \tag{8}$$

Daraus folgt aber, daß unter der gegenwärtigen Annahme (6) auch:

$$m(t_0') = \int_{t_0}^{t_0'} u\, U dt = 0. \tag{9}$$

Wählt man daher

$$w = u \quad \text{in} \quad (t_0, t_0'),$$
$$w = 0 \quad \text{in} \quad (t_0', t_1),$$

so genügt w den Bedingungen (4) und (5) und macht $J_2 = 0$; denn bezeichnen allgemein $\tau_1, \tau_2, \cdots \tau_n$ die Unstetigkeitsstellen von $\frac{dw}{dt}$, so läßt sich J_2 durch partielle Integration auf die Form bringen:

$$J_2 = \sum_{\nu=1}^{n} \left[H_1 w \frac{dw}{dt}\right]_{\tau_\nu + 0}^{\tau_\nu - 0} + \int_{t_0}^{t_1} w \Psi(w)\, dt, \tag{10}$$

was im vorliegenden Fall $J_2 = 0$ liefert.

Um nun eine Funktion zu erhalten, welche J_2 negativ macht, wählen wir nach dem Vorgang von Herrn Schwarz für w eine nur wenig von der obigen abweichende Funktion, nämlich:

$$w = u + \varkappa\omega \quad \text{in} \quad (t_0, t_0'),$$
$$w = \quad \varkappa\omega \quad \text{in} \quad (t_0', t_1), \tag{11}$$

wobei $\varkappa$ eine kleine Konstante ist, und ω eine Funktion von t, welche den folgenden Bedingungen genügt:

1) ω ist stetig mit stetigen ersten und zweiten Ableitungen in $(t_0\, t_1)$;

2) $\omega(t_0) = 0, \qquad \omega(t_1) = 0;$

3) $\omega(t_0') \neq 0;$

4) $\int_{t_0}^{t_1} \omega\, U dt = 0.$

Die so definierte Funktion w erfüllt die Bedingungen (4) und (5); sie ist selbst stetig, ihre erste Ableitung dagegen erleidet einen Sprung an der Stelle t_0'. Man hat daher bei Anwendung der Formel (10) das von der Unstetigkeit herrührende Glied zu berücksichtigen**) und erhält nach einer einfachen Rechnung, bei der von der Identität

*) Vgl. Kneser, l. c. Gleichung (22); die Accente bezeichnen Ableitung nach t.

**) Es ist dabei noch zu beachten, daß eine Unstetigkeit der betrachteten Art auf die erste Variation und auf die Umformung der zweiten Variation in die Weierstraßsche Form wegen der Stetigkeit von w ohne Einfluß ist.

$$u\Psi(\omega) - \omega\Psi(u) = \frac{d}{dt} H_1(\omega u' - \omega' u)$$

Gebrauch zu machen ist, ganz wie in dem von Herrn Schwarz behandelten Fall, das Resultat:

$$J_2 = 2\varkappa H_1 \omega \frac{du}{dt}\Big|^{t_0'} + \varkappa^2 V, \tag{12}$$

wo V eine endliche Größe ist.

Nun sind aber H_1 und ω nach Annahme in t_0' von Null verschieden, ebenso $\frac{du}{dt}$, weil $u(t_0') = 0$ und t_0' eine nichtsinguläre Stelle für die Differentialgleichung $\Psi(u) = 0$ ist. Daraus folgt aber, daß man durch passende Wahl von $\varkappa$ *das Integral* J_2 *negativ machen kann.*

Es bleibt nur noch zu zeigen, daß man stets eine den vier obigen Bedingungen genügende Funktion ω bestimmen kann. Es sei ω_1 irgend eine den drei ersten Bedingungen genügende Funktion, z. B. $\omega_1 = (t-t_0)(t-t_1)$; sollte dieselbe zufällig auch der vierten genügen, so ist $\omega = \omega_1$ eine brauchbare Funktion. Im allgemeinen wird aber das Integral

$$\int_{t_0}^{t_1} \omega_1 U dt = C_1$$

von Null verschieden sein; in diesem Fall wähle man eine zweite Funktion ω_2 folgendermaßen: Nach den über U gemachten Annahmen kann man stets ein Teilintervall (τ', τ'') von (t_0, t_1) finden, in welchem $U \neq 0$; alsdann setze man

$$\omega_2 = (t-\tau')^3 (\tau''-t)^3 (t-t_0')^2$$

in (τ', τ'') und $\omega_2 \equiv 0$ außerhalb (τ', τ''); dann ist sicher das Integral

$$\int_{t_0}^{t_1} \omega_2 U dt = C_2$$

von Null verschieden. Daraus folgt aber, daß die Funktion

$$\omega = C_2\omega_1 - C_1\omega_2$$

allen oben aufgestellten Bedingungen genügt.

Somit kann auch in dem hier betrachteten Ausnahmefall ein Minimum über den zu t_0 *konjugierten Punkt hinaus nicht bestehen.*

University of Chicago, den 27. Februar 1902.

Über das isoperimetrische Problem auf einer gegebenen Fläche*).

Von

OSKAR BOLZA in Chicago.

Der bekannte Satz, daß die Extremalen für das isoperimetrische Problem auf einer gegebenen Fläche Kurven konstanter geodätischer Krümmung sind, läßt sich auf eine äußerst einfache Art beweisen, wenn man sich der für diesen Zweck geeignetsten Formel für die geodätische Krümmung bedient und gleichzeitig statt von der üblichen unsymmetrischen Form der Differentialgleichung der Extremalen von der symmetrischen Weierstraßschen Form Gebrauch macht.

Dies zu zeigen, und zugleich eine für die zweite Variation wichtige Vorzeichenbestimmung zu geben, ist der Zweck der folgenden Zeilen.

Es sei S ein von singulären Stellen freies Stück einer der Einfachheit halber als analytisch vorausgesetzten Fläche, dargestellt in der Form

$$x = \varphi(u, v),$$
$$y = \psi(u, v),$$
$$z = \chi(u, v),$$

bezogen auf ein System rechtwinkliger Koordinaten. Ferner sei C eine auf S gelegene Kurve, gegeben in der Form

$$u = u(t), \qquad v = v(t).$$

Dann ist die *geodätische Krümmung***) der Kurve C im Punkte $P(t)$:

*) Die folgenden Bemerkungen sind durch zwei vor kurzem veröffentlichte Lösungen dieses Problems veranlaßt: Kneser, Lehrbuch der Variationsrechnung, § 34, und Whittemore, Annals of Mathematics (2) II, pag. 176. Die folgende Lösung scheint mir einfacher und zugleich freier von einschränkenden Voraussetzungen zu sein, insofern sie die auftretenden Kurven in Parameterdarstellung annimmt, während Kneser die gegebene, Whittemore die gegebene und die gesuchte Kurve in der Form $v = f(u)$, annimmt.

**) Man findet diese Formel bei Laurent, Traité d'Analyse, Vol. VII pag. 132, jedoch ohne Vorzeichen-Diskussion. Man kann sie auch ableiten, indem man die Definition der geodätischen Krümmung als Krümmung der Projektion von C auf die

$$(1)\qquad \frac{1}{\varrho_g} = \frac{\Gamma}{\sqrt{EG-F^2}\,(\sqrt{Eu'^2+2Fu'v'+Gv'^2})^3};$$

dabei haben E, F, G die in der Flächentheorie übliche Bedeutung, Accente bedeuten Ableitung nach t, und Γ hat den folgenden Wert:

$$\begin{aligned}\Gamma &= (EG-F^2)(u'v''-u''v')\\ &+ (Eu'+Fv')\Big[\Big(F_u-\tfrac{1}{2}E_v\Big)u'^2+G_uu'v'+\tfrac{1}{2}G_vv'^2\Big]\\ &- (Fu'+Gv')\Big[\tfrac{1}{2}E_uu'^2+E_vu'v'+\Big(F_v-\tfrac{1}{2}G_u\Big)v'^2\Big],\end{aligned}\qquad (2)$$

wobei Subskripte u, v etc., wie überall im folgenden, partielle Ableitungen bezeichen.

Das Vorzeichen von Γ gibt zugleich den *Sinn des Radius der geodätischen Krümmung* an. Wird den Quadratwurzeln ihr positiver Wert beigelegt, wie überall in der Folge, und sind die positiven Koordinatenachsen in der üblichen Weise orientiert, d. h. liegt die positive y-Achse links von der positiven x-Achse, von der positiven z-Achse aus gesehen, so ergibt sich folgende Regel:

Ist $\Gamma > 0$ so liegt der Radius der geodätischen Krümmung links von der positiven Tangente an die Kurve C, von der positiven*) Normale an S in P aus gesehen; ist $\Gamma < 0$, rechts.

Der Zähler Γ *ist die linke Seite der Differentialgleichung der geodätischen Linien***); man erhält dieselbe direkt in dieser Form, wenn man die geodätischen Linien durch ihre Minimumseigenschaft definiert. Denn ist f eine Funktion von u, v, u', v', die der Bedingung

$$f(u, v, mu', mv') = mf(u, v, u', v')$$

für jedes positive m genügt, setzt man ferner

$$f_1 = \frac{f_{u'u'}}{v'^2}$$

und bezeichnet endlich $\Phi(f)$ den Operator:

$$(3)\qquad \Phi(f) \equiv f_{uv'} - f_{u'v} + f_1(u'v''-u''v'),$$

Tangentialebene ins analytische übersetzt; macht man dabei von der bekannten Vorzeichenbestimmung des Krümmungsradius einer ebenen Kurve Gebrauch, so erhält man die im Text gegebene Vorzeichenregel. Vgl. auch eine Arbeit von Staude, Über das Vorzeichen der geodätischen Krümmung, Dorpat. Naturf. Ges. Ber. 1895, die mir jedoch nicht zugänglich war.

*) Nach den Festsetzungen bei Bianchi-Lukat, Differentialgeometrie § 34 und § 46.

**) Siehe z. B. Knoblauch, Flächentheorie, § 53.

so ist nach Weierstraß die erste notwendige Bedingung für ein Minimum des Integrals

$$J = \int_{t_0}^{t_1} \sqrt{Eu'^2 + 2Fu'v' + Gv'^2}\, dt$$

das Bestehen der Differentialgleichung

$$\Phi\left(\sqrt{Eu'^2 + 2Fu'v' + Gv'^2}\right) = 0.$$

Nach einer einfachen Rechnung ergibt sich

$$\Phi\left(\sqrt{Eu'^2 + 2Fu'v' + Gv'^2}\right) = \frac{\Gamma}{\left(\sqrt{Eu'^2 + 2Fu'v' + Gv'^2}\right)^3}, \tag{4}$$

somit $\Gamma = 0$ als Differentialgleichung der geodätischen Linien. —

Nach diesen einleitenden Bemerkungen über die geodätische Krümmung wenden wir uns zum isoperimetrischen Problem auf einer gegebenen Fläche.

Auf der Fläche S sei eine Kurve $\tilde{C}$ gegeben:

$$u = \tilde{u}(\tau), \qquad v = \tilde{v}(\tau)$$

und auf ihr zwei Punkte $A(\tau_0)$ und $B(\tau_1)$; es wird verlangt die beiden Punkte durch eine auf der Fläche S gelegene Kurve C:

$$u = u(t), \qquad v = v(t)$$

von gegebener Länge zu verbinden, derart daß das von C und $\tilde{C}$ eingeschlossene Flächenstück R einen möglichst großen Flächeninhalt hat.

Bezeichnen wir die Parameter von A und B auf C mit t_0 und t_1 resp., wobei wir ohne Beschränkung der Allgemeinheit $t_0 < t_1$ voraussetzen dürfen, und mit N eine Funktion von u und v, für welche

$$N_{\cdot} = \sqrt{EG - F^2}, \tag{5}$$

so haben wir das Integral*)

$$J = \varepsilon \int_{t_0}^{t_1} N(u, v)u'\, dt + \varepsilon \int_{\tau_1}^{\tau_0} N(\tilde{u}, \tilde{v})\tilde{u}'\, d\tau, \tag{6}$$

wo $\varepsilon = \pm 1$, zu einem Maximum zu machen mit der Nebenbedingung, daß das Integral

*) Bezüglich der Bedingungen, unter welchen die Kurven C und $\tilde{C}$ eine Fläche von endlichem Inhalt begrenzen, die durch die Formel (6) darstellbar ist, verweise ich auf C. Jordan, Cours d'Analyse I, No. 102, 112, 155—157 und II, No. 132, 133. Ebenso unterlasse ich es auf sonstige Fragen der Strenge einzugehen, da es mir hier lediglich darauf ankommt, auf möglichst einfache Weise die geometrische Deutung der Differentialgleichung des Problems zu bewerkstelligen.

$$K = \int_{t_0}^{t_1} \sqrt{Eu'^2 + 2Fu'v' + Gv'^2}\, dt \tag{7}$$

den vorgeschriebenen Wert l hat.

Das Vorzeichen von ε bestimmt sich nach folgender Regel: Es sei R' das Bild des Flächenstücks R in der u, v-Ebene, deren positive v-Achse links von der positiven u-Achse angenommen wird; man lasse den Punkt u, v die Begrenzung von R' in positivem Sinn beschreiben, von A', dem Bild von A, ausgehend; alsdann wird der entsprechende Punkt x, y, z die Begrenzung von R von A ausgehend beschreiben, und zwar wird er sich dabei entweder zuerst entlang C oder entlang $\tilde{C}$ bewegen. Im ersten Fall ist $\varepsilon = -1$, im zweiten $\varepsilon = +1$, wie dies aus dem Greenschen Satz folgt, der bei der Abteilung von (6) gebraucht wird.

Da das zweite Integral bei Variation von C konstant bleibt, so ist die erste notwendige Bedingung für ein Maximum, in der Weierstraßschen Form und in der obigen Bezeichnung:

$$\Phi(H) = 0, \tag{8}$$

wo

$$H = \varepsilon N u' + \lambda \sqrt{Eu'^2 + 2Fu'v' + Gv'^2}, \tag{9}$$

unter λ die isoperimetrische Konstante verstanden.

Nun ist aber

$$\Phi(H) = \varepsilon \Phi(Nu') + \lambda \Phi\left(\sqrt{Eu'^2 + 2Fu'v' + Gv'^2}\right)$$

und

$$\Phi(Nu') = -\varepsilon N_v = -\varepsilon \sqrt{EG - F^2},$$

$$\Phi\left(\sqrt{Eu'^2 + 2Fu'v' + Gv'^2}\right) = \frac{\sqrt{EG - F^2}}{\varrho_g},$$

nach (1) und (4)*).

Die Differentialgleichung (8) reduziert sich daher auf

$$\varrho_g = \varepsilon \lambda, \tag{10}$$

d. h. *die Extremalen sind Kurven konstanter geodätischer Krümmung.*

Die *Richtung des Radius der geodätischen Krümmung* wird durch die Legendresche Bedingung bestimmt, nach welcher für ein Maximum die Funktion

$$H_1 = \frac{H_{u'u'}}{v'^2}$$

*) Bei einer zusammenhängenden Darstellung der Variationsrechnung wird man bei Besprechung des isoperimetrischen Problems auf einer Fläche stets die Formel (4) von einer vorangegangenen Behandlung des Problems der geodätischen Linien her als bekannt voraussetzen dürfen.

entlang der Kurve C nicht positiv sein darf. Es ist aber hier:

$$H_1 = \frac{\lambda(EG - F^2)}{(\sqrt{Eu'^2 + 2Fu'v' + Gv'^2})^3},$$

somit muß λ negativ sein und daher muß ϱ_g *das entgegengesetzte Zeichen wie* ε haben, woraus sich die Richtung des Radius der geodätischen Krümmung nach der oben gegebenen Regel eindeutig bestimmt.

University of Chicago, den 1. März 1902.

Über die Darstellung definiter binärer Formen durch Quadrate.

Von

EDMUND LANDAU in Berlin.

Eine binäre Form mit reellen Koeffizienten, d. h. eine ganze rationale homogene Funktion zweier Variablen $f(x, y)$ mit reellen Koeffizienten heißt definit, wenn für alle reellen Wertepaare x, y

$$f(x, y) \geqq 0$$

ist. Bekanntlich*) läßt sich alsdann $f(x, y)$ als Summe von Quadraten ganzer rationaler homogener Funktionen von x und y mit reellen Koeffizienten darstellen. Denn die Gleichung

$$f(u, 1) = 0$$

hat für definites $f(x, y)$ keine reelle Wurzel in ungerader Vielfachheit; $f(u, 1)$ hat daher nach dem Fundamentalsatz der Algebra die Gestalt**)

$$c\prod_{\lambda=1}^{r}(u-\gamma_\lambda)^2\prod_{\lambda=1}^{s}(u-\alpha_\lambda-\beta_\lambda i)\,(u-\alpha_\lambda+\beta_\lambda i) = c\prod_{\lambda=1}^{r}(u-\gamma_\lambda)^2\prod_{\lambda=1}^{s}((u-\alpha_\lambda)^2+\beta_\lambda^2),$$

wo die $\alpha_\lambda, \beta_\lambda, \gamma_\lambda$ reell sind und $c > 0$; dies ergibt

$$f(x, y) = (\sqrt{c})^2 y^{2t}\prod_{\lambda=1}^{r}(x-\gamma_\lambda y)^2\prod_{\lambda=1}^{s}((x-\alpha_\lambda y)^2+\beta_\lambda^2 y^2),$$

(wo $t \geqq 0$,) also durch Ausmultiplizieren eine Quadratsumme der verlangten Art:

$$f(x, y) = \sum_{\nu=1}^{m} F_\nu^2(x, y). \tag{1}$$

Bei dieser Darstellung (1) einer definiten binären Form $f(x, y)$ oder, was auf dasselbe hinauskommt, einer definiten ganzen rationalen Funktion $f(x)$ einer Variablen als Quadratsumme sind aber, auch wenn die Koeffizienten von f rationale Zahlen sind, die Koeffizienten in den Basen der

*) Vergl. Hilbert, „Über die Darstellung definiter Formen als Summe von Formenquadraten", Mathematische Annalen, Bd. 32, 1888, S. 342.

**) Es kann dabei $r = 0$ oder $s = 0$, d. h. das entsprechende Produkt $= 1$ sein.

Quadrate im allgemeinen irrational, und es entsteht die Frage, ob eine definite ganze rationale Funktion

$$f(x) = c_0 x^{2k} + c_1 x^{2k-1} + \cdots + c_{2k}$$

mit rationalen Koeffizienten durch Quadrate ganzer rationaler Funktionen mit rationalen Koeffizienten darstellbar ist, also in einer Gestalt, welche, ohne das Gebiet der rationalen Zahlen zu verlassen, den definiten Charakter der Funktion in Evidenz setzt.

Diese Frage ist zuerst bei der Untersuchung der Möglichkeit gewisser geometrischer Konstruktionen von Herrn Hilbert*) gestellt und in Angriff genommen worden; er hat auf Grund seiner tiefgehenden Theorie der relativquadratischen Zahlkörper bewiesen, daß tatsächlich $f(x)$ als Quotient zweier Summen von Quadraten der verlangten Art darstellbar ist:

$$f(x) = \frac{\sum_{\nu=1}^{\varrho} \varphi_\nu^2(x)}{\sum_{\nu=1}^{\sigma} \psi_\nu^2(x)}.$$

Dies bildet den ersten Satz über die Darstellung von Formen höherer als zweiter Ordnung durch Quadrate *unter Zugrundelegung eines Körpers*, dem die gegebenen Koeffizienten angehören und die Koeffizienten der gesuchten Funktionen angehören sollen. Weitere Resultate dieser Art liegen noch nicht vor; auch macht Herr Hilbert in seinem auf dem internationalen Mathematikerkongress zu Paris im Jahre 1900 gehaltenen Vortrage**) ausdrücklich auf diese Probleme aufmerksam.

Im Folgenden beschäftige ich mich, nachdem ich im § 1 einen einfachen Hilfssatz vorangeschickt habe, in § 2 mit dem natürlichen Rationalitätsbereich, dem Körper der rationalen Zahlen. Nachdem Herr Hilbert die Darstellbarkeit von $f(x)$ als Quotient zweier Quadratsummen nachgewiesen hat, drängt sich die Frage auf, ob es nicht doch möglich ist, $f(x)$ als Summe von Quadraten darzustellen***); ich werde nachweisen, daß tatsächlich eine solche Darstellung

---

*) „Grundlagen der Geometrie", Festschrift zur Feier der Enthüllung des Gauß-Weber-Denkmals in Göttingen, Leipzig, 1899, S. 82—85.

**) „Mathematische Probleme", Nachrichten der K. Gesellschaft der Wissenschaften zu Göttingen, math.-phys. Kl., 1900, S. 284—285; Archiv der Mathematik und Physik, dritte Reihe, Bd. 1, 1901, S. 224.

***) Daß es überhaupt definite Formen gibt, welche nicht als Quadratsumme darstellbar sind, (sogar unter Zulassung beliebiger reeller Koeffizienten) ist zuerst von Herrn Minkowski vermutet worden (vergl. die erste These am Schlusse seiner Dissertation „Untersuchungen über quadratische Formen", Königsberg, 1885) und wurde von Herrn Hilbert (l. c. — s. Anm. 1 auf S. 53 — S. 344—350) bei den ternären Formen,

$$f(x) = \sum_{\nu=1}^{m} F_\nu^2(x) \tag{2}$$

mit rationalen Koeffizienten stets existiert.

Im § 3 behandle ich den Fall eines beliebigen reellen Körpers Ω. Damit jede definite Funktion $2k^{\text{ten}}$ Grades $f(x)$ in Ω als Quadratsumme (2) mit Koeffizienten in Ω dargestellt werden kann, ist offenbar notwendig, daß der Satz schon für Funktionen 0^{ten} Grades wahr ist, d. h. der Körper Ω muß so beschaffen sein, daß seine positiven Zahlen als Summe von Quadraten von Zahlen in Ω darstellbar sind. Ich werde nun beweisen, daß dies auch hinreichend ist, d. h. daß für so beschaffene Körper jede definite Funktion $f(x)$ in Ω als Quadratsumme mit Koeffizienten in Ω darstellbar ist; hierin ist der in § 2 für den natürlichen Rationalitätsbereich bewiesene Satz als Spezialfall enthalten. Endlich wird sich für den Fall eines ganz beliebigen reellen Körpers Ω ergeben, daß jede definite Funktion $f(x)$ mit Koeffizienten in Ω in der Gestalt

$$f(x) = \sum_{\nu=1}^{m} e_\nu F_\nu^2(x) \tag{3}$$

darstellbar ist, wo die Koeffizienten in den F_ν Zahlen in Ω und die e_ν positive Zahlen in Ω sind. Auch die Darstellung (3) setzt, ohne den Körper zu verlassen, den definiten Charakter der Funktion $f(x)$ in Evidenz.

Übrigens werden zum Nachweise dieser Sätze im Folgenden nur algebraische Hilfsmittel einfachster Art verwendet.

§ 1.

Hilfssatz: Ist

$$h(x) = a_0 x^{2k} + a_1 x^{2k-1} + \cdots + a_{2k}$$

eine Funktion mit beliebigen reellen Koeffizienten, deren Wert für jedes reelle x positiv*) ausfällt und deren Grad genau der $2k^{\text{te}}$ ist (so daß $a_0 > 0$ angenommen wird), so läßt sich eine positive Größe δ derart finden, daß für alle den Ungleichungen

$$|d_0| < \delta,\ |d_1| < \delta, \cdots, |d_{2k}| < \delta$$

genügenden Systeme reeller Zahlen $d_0, d_1, \cdots, d_{2k}$ die Funktion

---

d. h. den ganzen rationalen Funktionen zweier nicht homogener Variablen nachgewiesen. Später hat Herr Hilbert („Über ternäre definite Formen", Acta mathematica, Bd. 17, 1893, S. 169—197) gezeigt, daß die definiten ternären Formen als Quotient zweier Quadratsummen (mit reellen Koeffizienten in den Basen) stets darstellbar sind.

*) Wenn $h(x)$ für reelle x des Wertes 0 fähig ist, gilt die Behauptung offenbar nicht.

$$H(x) = h(x) + d_0 x^{2k} + d_1 x^{2k-1} + \cdots + d_{2k}$$
$$= (a_0+d_0)x^{2k} + (a_1+d_1)x^{2k-1} + \cdots + (a_{2k}+d_{2k})$$

definit ist.

Beweis: Da $h(x)$ für kein reelles x verschwindet, liegt $h(x)$ für alle reellen x oberhalb einer positiven Schranke p; es bezeichne a den größten der absoluten Beträge

$$|a_1|, |a_2|, \cdots, |a_{2k-1}|, |a_{2k}| = a_{2k},$$

und es werde δ gleich der kleineren der beiden Zahlen

$$\frac{a}{\frac{2a}{a_0}+1} \quad \text{und} \quad \frac{2a}{a_0}\frac{p}{\left(\frac{2a}{a_0}+1\right)^{2k+1}}$$

gesetzt; dann ist

1) für $|x| \leqq \frac{2a}{a_0}+1$ (x reell)

$$H(x) \geqq h(x) - |d_0 x^{2k} + \cdots + d_{2k-1}x + d_{2k}| > p - \delta(|x|^{2k} + \cdots + |x| + 1)$$
$$\geqq p - \delta\left(\left(\frac{2a}{a_0}+1\right)^{2k} + \cdots + \left(\frac{2a}{a_0}+1\right) + 1\right) = p - \delta\frac{\left(\frac{2a}{a_0}+1\right)^{2k+1}-1}{\left(\frac{2a}{a_0}+1\right)-1}$$
$$> p - \delta\frac{\left(\frac{2a}{a_0}+1\right)^{2k+1}}{\frac{2a}{a_0}} \geqq p - \frac{2a}{a_0}\frac{p}{\left(\frac{2a}{a_0}+1\right)^{2k+1}}\frac{\left(\frac{2a}{a_0}+1\right)^{2k+1}}{\frac{2a}{a_0}}$$
$$= p - p = 0,$$

und

2) für $|x| > \frac{2a}{a_0}+1$ (x reell)

$$H(x) \geqq h(x) - |d_0 x^{2k} + \cdots + d_{2k-1}x + d_{2k}|$$
$$\geqq a_0 x^{2k} - |a_1 x^{2k-1} + \cdots + a_{2k-1}x + a_{2k}| - |d_0 x^{2k} + \cdots + d_{2k-1}x + d_{2k}|$$
$$\geqq a_0 x^{2k} - a(|x|^{2k-1} + \cdots + |x| + 1) - \delta(|x|^{2k} + \cdots + |x| + 1)$$
$$= a_0 x^{2k} - a\frac{x^{2k}-1}{|x|-1} - \delta\frac{|x|^{2k+1}-1}{|x|-1}$$
$$> a_0 x^{2k} - a\frac{x^{2k}}{|x|-1} - \delta\frac{|x|^{2k+1}}{|x|-1} > a_0 x^{2k} - a\frac{x^{2k}}{\frac{2a}{a_0}} - x^{2k}\frac{\delta|x|}{|x|-1}$$
$$= x^{2k}\left(a_0 - \frac{a_0}{2} - \frac{\delta}{1-\frac{1}{|x|}}\right) \geqq x^{2k}\left(\frac{a_0}{2} - \frac{\delta}{1-\frac{1}{\frac{2a}{a_0}+1}}\right)$$
$$= x^{2k}\left(\frac{a_0}{2} - \frac{\delta\left(\frac{2a}{a_0}+1\right)}{\frac{2a}{a_0}}\right) \geqq x^{2k}\left(\frac{a_0}{2} - \frac{a}{\frac{2a}{a_0}+1}\cdot\frac{\frac{2a}{a_0}+1}{\frac{2a}{a_0}}\right)$$
$$= x^{2k}\left(\frac{a_0}{2} - \frac{a_0}{2}\right) = 0.$$

Für alle reellen x ist also

$$H(x) > 0.$$

Die Existenz einer Größe δ von der verlangten Beschaffenheit ist einfach so gezeigt worden: erst wurde ein $\xi\left(=\frac{2a}{a_0}+1\right)$ bestimmt, sodaß für $|x|>\xi$ die Hälfte des ersten Gliedes in $h(x)$ den absoluten Betrag der Summe der übrigen Glieder überwiegt, und dann wurde δ so gewählt, daß für $|x|>\xi$ die hinzugefügte Funktion

$$d_0 x^{2k} + \cdots + d_{2k}$$

dem absoluten Werte nach auch kleiner als $\frac{1}{2} a_0 x^{2k}$ ist und daß außerdem für $|x|<\xi$

$$|d_0 x^{2k} + \cdots + d_{2k}| < p < h(x)$$

ist. Stets ist alsdann

$$H(x) = h(x) + d_0 x^{2k} + \cdots + d_{2k} > 0.$$

§ 2.

Eine positive Rationalzahl $\frac{a}{b}$ ist als Quadratsumme darstellbar, z. B. als Summe von ab Quadraten folgendermassen:

$$\frac{a}{b} = \frac{ab}{b^2} = \frac{1^2+1^2+\cdots+1^2}{b^2} = \left(\frac{1}{b}\right)^2 + \left(\frac{1}{b}\right)^2 + \cdots + \left(\frac{1}{b}\right)^2;$$

übrigens genügen bekanntlich zur Darstellung einer ganzen Zahl, also auch einer rationalen Zahl vier Quadrate, wie zuerst Lagrange bewiesen hat.

Auch eine definite quadratische Funktion

$$f(x) = ax^2 + bx + c \qquad (a>0,\ b^2-4ac\leqq 0)$$

ist als Quadratsumme im Körper der rationalen Zahlen darstellbar, weil

$$f(x) = ax^2 + bx + c = a\left(x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a}\right) = a\left(\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2 + \frac{4ac-b^2}{4a^2}\right)$$
$$= a\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2 + \frac{4ac-b^2}{4a}$$

durch Zerlegung der rationalen Zahlen $a>0$ und $\frac{4ac-b^2}{4a} \geqq 0$ in Quadrate eine Darstellung von $f(x)$ als Summe von (höchstens 8) Quadraten ergibt. Daß übrigens auch bei ganzzahligen a, b, c und der Annahme $a=1$ in den Koeffizienten der Basen der Quadrate Zahlennenner unvermeidlich sind, lehrt schon das einfache Beispiel der definiten Funktion

$$x^2 + x + 1 = \left(x+\frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{1}{2}\right)^2,$$

welche offenbar nicht als Quadratsumme ganzer *ganz*zahliger Funktionen darstellbar ist.

Es sei schon bewiesen, daß jede definite ganze rationalzahlige Funktion des Grades $0, 2, 4, \cdots, 2k$ als Summe von Quadraten ganzer rationalzahliger Funktionen darstellbar ist, und es soll dasselbe für die Funktion $2k+2^{\text{ten}}$ Grades

$$f(x) = c_0 x^{2k+2} + c_1 x^{2k+1} + \cdots + c_{2k+2} \tag{4}$$

bewiesen werden, wo also $c_0 > 0$ angenommen wird.

Es ist

$$\begin{aligned} f(x) &= c_0\left(x^{2k+2} + \frac{c_1}{c_0} x^{2k+1} + \cdots + \frac{c_{2k+2}}{c_0}\right) \\ &= c_0(x^{2k+2} + C_1 x^{2k+1} + \cdots + C_{2k+2}). \end{aligned}$$

Da c_0 eine Quadratsumme ist, genügt es, die Behauptung für

$$\frac{f(x)}{c_0} = x^{2k+2} + C_1 x^{2k+1} + \cdots + C_{2k+2}$$

nachzuweisen. Setzt man

$$x = y - \frac{C_1}{2k+2},$$

so geht bekanntlich $\frac{f(x)}{c_0}$ in eine ganze rationalzahlige Funktion $2k+2^{\text{ten}}$ Grades von y ohne zweites Glied über:

$$\frac{f(x)}{c_0} = y^{2k+2} + c_2' y^{2k} + c_3' y^{2k-1} + \cdots + c_{2k+1}' y + c_{2k+2}' = g(y).$$

Auch $g(y)$ ist definit, da die reellen x den reellen y entsprechen, und es genügt, die Behauptung für $g(y)$ nachzuweisen; denn aus

$$g(y) = \sum_{\nu=1}^{m} G_\nu^2(y)$$

folgt

$$\frac{f(x)}{c_0} = \sum_{\nu=1}^{m} G_\nu^2\left(x + \frac{C_1}{2k+2}\right) = \sum_{\nu=1}^{m} F_\nu^2(x).$$

Mit anderen Worten: ohne Beschränkung der Allgemeinheit kann in (4)

$$c_0 = 1, \quad c_1 = 0$$

angenommen werden, also $f(x)$ in der Gestalt

$$f(x) = x^{2k+2} + c_2 x^{2k} + c_3 x^{2k-1} + \cdots + c_{2k+2}.$$

Dies ist für das Gelingen des folgenden Beweises von wesentlicher Bedeutung.

Es sind nunmehr zwei Fälle zu unterscheiden.

1) Wenn $f(x)$ für reelle x des Wertes 0 fähig ist, also reelle Wurzeln hat, ist jede in gerader Vielfachheit vorhanden; $f(x)$ ist alsdann von der Gestalt

$$f(x) = f_1^2(x) f_2(x), \tag{5}$$

wo $f_2(x)$ von mehrfachen Wurzeln frei ist und geringeren Grad hat als $f(x)$; der hierbei willkürliche konstante Faktor sei so gewählt, daß der Koeffizient der höchsten Potenz von x in $f_2(x)$ gleich 1 ist; dann haben $f_1(x)$ und $f_2(x)$ rationale Koeffizienten; denn $f_2(x)$ ist das Produkt der (einzeln rationalzahligen) Faktoren von $f(x)$, welche die 1, 3, 5, $\cdots$-fachen Nullstellen von $f(x)$ zu einfachen Wurzeln haben, und $f_1(x)$ ist das Produkt ($\nu = 1, 2, 3, 4, \cdots$) der $\left[\frac{\nu}{2}\right]^{\text{ten}}$ Potenzen der (rationalzahligen) Faktoren, welche beziehlich für die ν fachen Nullstellen von $f(x)$ von der ersten Ordnung verschwinden. Da $f_2(x)$ definit ist und höchstens den Grad $2k$ hat, so ist

$$f_2(x) = \sum_{\nu=1}^{m} G_\nu^2(x),$$

also

$$f(x) = f_1^2(x) \sum_{\nu=1}^{m} G_\nu^2(x) = \sum_{\nu=1}^{m} (f_1(x)\, G_\nu(x))^2 = \sum_{\nu=1}^{m} F_\nu^2(x).$$

2) $f(x)$ habe keine reellen Wurzeln; dann hat es $k+1$ Paare konjugierter komplexer Wurzeln*)

$$\alpha_\lambda \pm \beta_\lambda i \qquad (\lambda = 1, 2, \cdots, k+1),$$

wo die $\beta_\lambda > 0$ sind; da das Glied mit x^{2k+1} in $f(x)$ fehlt, ist

$$\sum_{\lambda=1}^{k+1} (\alpha_\lambda + \beta_\lambda i + \alpha_\lambda - \beta_\lambda i) = 0,$$

$$\sum_{\lambda=1}^{k+1} \alpha_\lambda = 0. \tag{6}$$

Nun ist

$$f(x) = \prod_{\lambda=1}^{k+1} ((x-\alpha_\lambda)^2 + \beta_\lambda^2),$$

was ausmultipliziert die bekannte (nicht rationalzahlige!) Darstellung als Quadratsumme ergibt; von den dabei vorkommenden 2^{k+1} Quadraten hat eines, $\prod_{\lambda=1}^{k+1} (x-\alpha_\lambda)^2$, den Grad $2k+2$; die Summe der übrigen $2^{k+1}-1$ Quadrate hat den Grad $2k$ und zwar genau diesen Grad, da in

$$f(x) - \prod_{\lambda=1}^{k+1} (x-\alpha_\lambda)^2 = \prod_{\lambda=1}^{k+1} ((x-\alpha_\lambda)^2 + \beta_\lambda^2) - \prod_{\lambda=1}^{k+1} (x-\alpha_\lambda)^2 \tag{7}$$

$$= a_0 x^{2k} + a_1 x^{2k-1} + \cdots + a_{2k} = h(x)$$

*) Die Annahme, daß keine Paare mehrfacher komplexer Wurzeln vorhanden sind, wird dabei nicht gemacht; sie wäre im Übrigen erlaubt, da andernfalls $f(x)$ von der Gestalt (5) wäre.

x^{2k} den Koeffizienten

$$a_0 = \sum_{\lambda=1}^{k+1} \beta_\lambda^2 > 0$$

erhält.

$h(x)$ ist als Summe von Quadraten eine definite Funktion und für reelle x von 0 verschieden, weil einer der Summanden, nämlich $\prod_{\lambda=1}^{k+1} \beta_\lambda^2$, > 0 ist. Auf $h(x)$ wende ich den Hilfssatz aus § 1 an: δ ist so bestimmbar, daß für

(8) $$|d_0| < \delta, \cdots, |d_{2k}| < \delta$$

$$h(x) + d_0 x^{2k} + \cdots + d_{2k} = f(x) - \prod_{\lambda=1}^{k+1} (x - \alpha_\lambda)^2 + d_0 x^{2k} + \cdots + d_{2k}$$

definit ist.

Nachdem δ bestimmt ist, wähle ich k rationale Zahlen $A_1, A_2, \cdots, A_k$ aus, welche beziehlich so nahe an $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_k$ gelegen sind, daß,

$$A_{k+1} = -A_1 - A_2 - \cdots - A_k$$

gesetzt, in

(9) $$\begin{cases} \prod_{\lambda=1}^{k+1}(x-\alpha_\lambda)^2 - \prod_{\lambda=1}^{k+1}(x-A_\lambda)^2 = (x^{k+1} + b_2 x^{k-1} + \cdots + b_{k+1})^2 \\ \qquad\qquad - (x^{k+1} + B_2 x^{k-1} + \cdots + B_{k+1})^2 \\ \qquad = (x^{2k+2} + 2b_2 x^{2k} + \cdots + b_{k+1}^2) - (x^{2k+2} + 2B_2 x^{2k} + \cdots + B_{k+1}^2) \\ \qquad = d_0 x^{2k} + d_1 x^{2k-1} + \cdots + d_{2k} \end{cases}$$

die Koeffizienten den Ungleichungen (8) genügen. Daß eine solche Wahl möglich ist, erhellt folgendermaßen: Setzt man zunächst an:

$$A_1 = \alpha_1 + \varepsilon_1, \cdots, A_k = \alpha_k + \varepsilon_k$$

und somit unter Berücksichtigung von (6)

$$A_{k+1} = -\alpha_1 - \cdots - \alpha_k - \varepsilon_1 - \cdots - \varepsilon_k = \alpha_{k+1} - \varepsilon_1 - \cdots - \varepsilon_k,$$

so sind $d_0, d_1, \cdots, d_{2k}$ ganze rationale Funktionen von $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \cdots, \varepsilon_k$ ohne konstantes Glied; dieselben verschwinden mit $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \cdots, \varepsilon_k$ und können daher durch passend kleine Wahl von $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \cdots, \varepsilon_k$ dem absoluten Werte nach unter δ herabgedrückt werden; obendrein können $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \cdots, \varepsilon_k$ so gewählt werden, daß $A_1, A_2, \cdots, A_k$ rational sind und hiermit auch A_{k+1}.

Aus (7) und (9) ergibt sich nun

$$f(x) = \prod_{\lambda=1}^{k+1}(x-\alpha_\lambda)^2 + h(x) = \prod_{\lambda=1}^{k+1}(x-A_\lambda)^2 + h(x) + \left(\prod_{\lambda=1}^{k+1}(x-\alpha_\lambda)^2 - \prod_{\lambda=1}^{k+1}(x-A_\lambda)^2 \right),$$

$$f(x) = \prod_{\lambda=1}^{k+1} (x - A_\lambda)^2 + (h(x) + d_0 x^{2k} + \cdots + d_{2k}). \tag{10}$$

Hierin ist der erste Summand, $\prod_{\lambda=1}^{k+1} (x-A_\lambda)^2$, das Quadrat einer rationalzahligen Funktion; der folgende Klammerausdruck

$$h(x) + d_0 x^{2k} + \cdots + d_{2k} = H(x) \tag{11}$$

ist nach dem Hilfssatze eine definite Funktion und nur vom $2k^{\text{ten}}$ Grade; die Koeffizienten $a_0 + d_0, \cdots, a_{2k} + d_{2k}$ dieser Funktion

$$H(x) = (a_0 + d_0) x^{2k} + \cdots + (a_{2k} + d_{2k})$$

sind aber rationale Zahlen, weil $H(x)$ die Differenz zweier rationalzahliger Funktionen

$$f(x) - \prod_{\lambda=1}^{k+1} (x - A_\lambda)^2$$

ist. Nun wird als bewiesen angenommen, daß alle definiten ganzen rationalzahligen Funktionen $2k^{\text{ten}}$ Grades als Summe von Quadraten ganzer rationalzahliger Funktionen darstellbar sind; also ist

$$H(x) = \sum_{\nu=1}^{m-1} F_\nu^2(x); \tag{12}$$

Aus (10), (11) und (12) folgt daher

$$f(x) = \sum_{\nu=1}^{m-1} F_\nu^2(x) + \left(\prod_{\lambda=1}^{k+1} (x - A_\lambda) \right)^2$$

$$= \sum_{\nu=1}^{m} F_\nu^2(x).$$

Damit ist bewiesen: *Jede definite ganze rationale Funktion von x mit rationalen Zahlenkoeffizienten läßt sich als Summe von Quadraten darstellen, so daß die sämtlichen Basen dieser Quadrate ganze rationale Funktionen von x mit rationalen Koeffizienten sind.*

Man kann leicht für die Anzahl der hierzu erforderlichen Quadrate eine obere Schranke aufstellen; für den nullten Grad reichen vier, für den zweiten acht Quadrate aus; es sei schon bewiesen, daß für den $2k^{\text{ten}}$ Grad nur $4k + 4$ Quadrate nötig sind; dann läßt sich zeigen, daß für den $2k + 2^{\text{ten}}$ Grad $4k + 8$ Quadrate genügen. In der Tat ist ja eine definite Funktion $2k + 2^{\text{ten}}$ Grades gleich einer Konstanten mal einer Funktion

mit 1 als erstem Koeffizienten, welche, wie aus dem Vorangehenden folgt, entweder selbst ein Quadrat ist oder als Summe eines Quadrates und einer definiten rationalzahligen Funktion $2k^{\text{ten}}$ Grades darstellbar ist; die beliebige definite Funktion $2k+2^{\text{ten}}$ Grades ist also von der Gestalt

$$\begin{aligned} f(x) &= c_0(F^2(x)+H_{2k}(x)) = (a^2+b^2+c^2+d^2)\,F^2(x)+c_0H_{2k}(x) \\ &= (aF(x))^2+(bF(x))^2+(cF(x))^2+(dF(x))^2+\sum_{\nu=1}^{4k+4}F_\nu^2(x) \\ &= \sum_{\nu=1}^{4k+8}F_\nu^2(x), \end{aligned}$$

so daß $f(x)$ in $4k+8$ Quadrate zerlegbar ist.

Es ist übrigens zu bemerken, daß die Zerlegung eines gegebenen $f(x)$ in Quadrate durch eine endliche Anzahl von Schritten ausführbar ist; es kommt ja nur darauf an, die Wurzeln der Gleichung $f(x)=0$ mit einer gewissen, aus den Koeffizienten von $f(x)$ von vornherein bestimmbaren Annäherung zu berechnen.

§ 3.

Es sei nun ein beliebiger reeller Körper Ω zu Grunde gelegt, welchem die Koeffizienten von $f(x)$ angehören.

Für die quadratische Funktion

$$f(x)=ax^2+bx+c \qquad (a>0,\ b^2-4ac\leqq 0)$$

ergibt sich wie auf S. 57

$$\begin{aligned} f(x) &= a\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2+\frac{4ac-b^2}{4a} \\ &= e_1F^2(x)+e_2\cdot 1^2, \end{aligned}$$

wo alle auftretenden Koeffizienten zu Ω gehören und insbesondere e_1 und $e_2\geqq 0$ sind.

Es sei schon bewiesen, daß jede definite Funktion in Ω bis zum $2k^{\text{ten}}$ Grade in der Gestalt

$$\sum_{\nu=1}^{m}e_\nu F_\nu^2(x) \tag{13}$$

darstellbar ist, wo die Koeffizienten in den Basen $F_\nu(x)$ Zahlen in Ω und die e_ν positive Zahlen in Ω sind, und es sei dasselbe für eine beliebige definite Funktion $2k+2^{\text{ten}}$ Grades in Ω

$$f(x)=c_0x^{2k+2}+c_1x^{2k+1}+\cdots+c_{2k+2}$$

zu beweisen.

Dabei kann man sich wieder auf den Fall $c_0 = 1$, $c_1 = 0$ beschränken, da die Transformation

$$x = y - \frac{c_1}{(2k+2)c_0}$$

$\frac{f(x)}{c_0}$ in eine definite Funktion in Ω

$$g(y) = y^{2k+2} + c_2' y^{2k} + c_3' y^{2k-1} + \cdots + c_{2k+2}'$$

überführt, deren Zerlegung

$$g(y) = \sum_{\nu=1}^{m} E_\nu \cdot G_\nu^2(y)$$

für $f(x)$ gleichfalls eine Darstellung in Ω

$$f(x) = \sum_{\nu=1}^{m} c_0 E_\nu \cdot G_\nu^2\left(x + \frac{c_1}{(2k+2)c_0}\right) = \sum_{\nu=1}^{m} e_\nu F_\nu^2(x)$$

liefert.

1) Wenn $f(x)$ reelle Wurzeln hat, ist analog wie in § 2

$$f(x) = f_1^2(x) f_2(x), \tag{14}$$

wo $f_1(x)$ und $f_2(x)$ Koeffizienten in Ω haben und $f_2(x)$ definit ist und geringeren Grad hat als $f(x)$, sodaß $f_2(x)$ und damit auch $f(x)$ in der verlangten Art darstellbar ist.

2) Wenn die definite Funktion

$$f(x) = x^{2k+2} + c_2 x^{2k} + c_3 x^{2k-1} + \cdots + c_{2k+2}$$

keine reellen Wurzeln hat, ist sie nach (10) und (11) in der Gestalt darstellbar

$$f(x) = \prod_{\lambda=1}^{k+1} (x - A_\lambda)^2 + H(x), \tag{15}$$

wo die A_λ rationale Zahlen sind und $H(x)$ eine definite Funktion $2k^{\text{ten}}$ Grades ist; die Koeffizienten von $H(x)$ gehören folglich zum Körper Ω, da $H(x)$ die Differenz einer Funktion in Ω und einer sogar rationalzahligen Funktion ist. Daher ist $H(x)$ und damit auch $f(x)$ in der verlangten Art darstellbar.

Zur Darstellung einer definiten Funktion $2k^{\text{ten}}$ Grades in der Gestalt (13) sind höchstens $k+1$ Quadrate erforderlich, wie sich durch vollständige Induktion ergibt, und in

$$f_{2k}(x) = \sum_{\nu=1}^{k+1} e_\nu F_\nu^2(x) \qquad (e_\nu \geqq 0) \tag{16}$$

kann wegen (14) bezw. (15) der Grad von $F_\nu(x)$ gleich $\nu - 1$ angenommen werden:

Eine definite Funktion $2k^{ten}$ Grades in Ω ist als Summe von $k+1$ mit Zahlen $\geqq 0$ in Ω multiplizierten Quadraten von Funktionen in Ω darstellbar, deren Grad beziehlich gleich $0, 1, \cdots, k$ ist.

Durch Einführung zweier homogener Variablen x, y an Stelle der einen Variablen x ergibt dieser Satz, daß jede definite binäre Form $2k^{ten}$ Grades in Ω als Summe von höchstens $k+1$ mit positiven Zahlen in Ω multiplizierten Quadraten binärer Formen in Ω darstellbar ist.

Wenn der Körper so beschaffen ist, daß jede seiner positiven Zahlen als Summe von Quadraten von Zahlen in ihm darstellbar ist, so gibt es für jede definite Funktion $f(x)$ in Ω eine Darstellung als Summe von Quadraten von Funktionen in Ω.

Berlin, den 7. Juni 1902.

Eugenio Beltrami.

Von

Ernesto Pascal in Pavia*).

Eugenio Beltrami wurde am 16. November 1835 zu Cremona geboren; sein Vater war ein verdienstvoller Miniaturmaler und lebte, nachdem er 1848 infolge der politischen Wirren ausgewandert war, in Paris als Konservator eines Kunstmuseums.

Beltrami begann seine mathematischen Studien in Pavia; bald schon zwangen ihn äußere Umstände, für einige Jahre eine Stelle bei der Verwaltung der Lombardisch-Venetianischen Eisenbahnen anzunehmen; doch hatte er klar den Beruf erkannt, zu dem er sich unwiderstehlich hingezogen fühlte, und nahm mit 25 Jahren das Studium der Mathematik wieder auf, geleitet von den Ratschlägen Francesco Brioschis, der bereits damals durch eine Reihe von Arbeiten seinen hervorragenden Ruf begründet hatte.

Die erste mathematische Arbeit Beltramis trägt das Datum des 1. November 1861 und ist betitelt: *Intorno ad alcuni sistemi di curve piane*, veröffentlicht im 4. Bande der in Rom verlegten *Annali di Tortolini*. Anknüpfend an die bekannte, elementare Eigenschaft eines Systemes gleichseitiger konzentrischer Hyperbeln, durch eine Drehung in das Orthogonal-System überzugehen, stellte sich der Verfasser das allgemeinere Problem: Welche Systeme ebener Kurven ergeben bei einer Drehung

*) Die vorliegende Lebensskizze Beltramis, sowie die folgende Analyse seines Lebenswerkes ist der von E. Pascal am 10. Januar 1901 im R. Istituto Lombardo di scienze e lettere zu Mailand gehaltenen Gedächtnisrede entnommen. Die vom Autor revidierte Übersetzung verdanken wir Herrn A. Schepp in Wiesbaden; Herr A. Korn hat dieselbe bezüglich der mathematisch-physikalischen Arbeiten Beltramis mit einigen Zusätzen versehen. Indes erwies es sich als unmöglich, die im folgenden gegebenen Zitate, welche sich im wesentlichen an Beltramis eigene Literaturstudien anlehnen, systematisch zu ergänzen. Der Leser sei auf die einschlägigen Artikel der Encyklopädie der math. Wissenschaften verwiesen.

D. R.

Systeme, die die ursprünglichen Kurven isogonal schneiden. Die Lösung kommt auf die Integration einer (eine willkürliche Funktion enthaltenden) Differentialgleichung 1. O. zurück. — Die Arbeit ist im ganzen bescheiden, doch ließen die Klarheit der Untersuchungen und die Sorgfalt in der Diskussion des Problems bereits erkennen, daß der angehende Mathematiker zu den größten Hoffnungen berechtigte.

Etwa ein Jahr später, im September 1862, führte Beltrami eine umfangreichere und bedeutendere Arbeit zu Ende: *Sulla teoria delle sviluppoidi e delle sviluppanti* (*Ann. di Tortolini*, 1. Ser. 4. B., 1862), offenbar angeregt durch die Arbeit, welche Brioschi fünf Jahre früher (1857) über denselben Gegenstand veröffentlicht hatte.

Als „sviluppoide" einer Kurve wird hier jede neue Raumkurve bezeichnet, deren Tangenten von der ersten unter einem ein vorgeschriebenes Gesetz befolgenden Winkel geschnitten werden; die erste Kurve heißt dann ihrerseits „sviluppante" der zweiten. Brioschi hatte nur den Fall untersucht, daß der Winkel $\omega = \text{konst.}$ ist, d. h. den Fall der gewöhnlichen Evoluten. Beltrami legte sich den allgemeinen Fall vor und bewies unter anderem den eleganten Satz, daß jede „Sviluppoide" eine geodätische Linie der Fläche ist, welche durch alle nach demselben Gesetz gebildeten Sviluppoiden derselben Grundkurve erzeugt wird; ein Satz, von welchem bisher nur ein besonderer Fall bekannt war $\left(\text{der Fall } \omega = \text{konst.} = \frac{\pi}{2}\right)$.

In demselben Band der *Annali di Tortolini* ist außer einer kurzen Bemerkung, betreffend eine sehr einfache Methode, um fast ohne Rechnung die Gleichungen der Krümmungslinien einer Fläche und ihrer Krümmungsradien zu finden, auch die von Beltrami besorgte Übersetzung der berühmten Gaußschen Abhandlung über die sogenannte konforme Abbildung einer Fläche auf eine andere enthalten (veröffentlicht 1825 in den in Altona von Schumacher herausgegebenen *Astronomischen Abhandlungen* als Beantwortung einer von der Gesellschaft der Wissenschaften zu Kopenhagen für 1822 gestellten Preisfrage).

Diese scheinbar unbedeutende Einzelheit ist für uns nicht ohne Interesse, weil sie uns die Anregung zeigt, welche Beltrami schon im Beginn seiner Studien von den Werken des großen Göttinger Mathematikers empfing; und es blieb dieser Einfluß von Gauß und seiner Schule in der ganzen weiteren Entwickelung von Beltramis Genius bestehen. Ich habe mich bei den ersten Proben desselben etwas länger aufgehalten, weil sie eben die ersten waren, nicht weil sie im übrigen eine besondere Bedeutung haben. Man prüft ja mit Vorliebe in der wissenschaftlichen Laufbahn eines großen Mannes seine ersten Arbeiten, gewissermaßen in der Hoffnung, in denselben die Keime seines Genies aufzufinden.

Nachdem Beltrami durch diese ersten Arbeiten die Aufmerksamkeit der Mathematiker auf sich gelenkt hatte, konnte er 1862 die bisher innegehabte Verwaltungsstelle aufgeben und wurde mit 27 Jahren zum außerordentlichen Professor der Algebra und analytischen Geometrie an der Universität Bologna ernannt. Seit jener Zeit verlief sein Leben heiter und ruhig, nur der Fürsorge für seine Familie, seine Schüler und seine Lieblingsstudien gewidmet. Niemals wollte er ein Amt annehmen, das ihn von diesen hätte abziehen können, und die Ernennung zum Senator, um die er nie nachgesucht hatte, erhielt er erst wenige Monate vor seinem Tode.

Nach einjährigem Aufenthalt in Bologna, wo er Cremona zum Kollegen hatte, der bereits glänzende Proben seiner hohen Bedeutung gegeben, sowie Chelini, dessen getreuer Freund er — im Glück, wie im Unglück — stets geblieben ist, wurde Beltrami als ordentlicher Professor der Geodäsie nach Pisa berufen; das Anerbieten dieser Stellung kam diesmal von Enrico Betti, dem energischen und unermüdlichen Förderer junger Gelehrter, dem ruhmreichen Vertreter italienischer Wissenschaft. Um sich für den neuen Lehrstuhl würdig vorzubereiten, blieb er auf den Rat von Betti einige Monate in Mailand in dem Observatorium des Astronomen Schiaparelli, der ebenfalls damals bereits seine bahnbrechenden Arbeiten begonnen hatte.

In Pisa schrieb er in den Jahren 1864—65 unter anderen Arbeiten jene berühmten *Ricerche di analisi applicata alla geometria*, die als der Ausgangspunkt eines großen Teiles seiner in den folgenden Jahren nach und nach ausgeführten Untersuchungen über Differentialgeometrie anzusehen sind, und auf die er in späteren Arbeiten in Zitaten sehr oft zurückkommt. In Pisa traf er auch häufig mit Riemann zusammen und die tiefgehende Auffassung des genialen deutschen Mathematikers von der Natur des Raumes mußte selbstverständlich einen großen Einfluß auf die klassischen Untersuchungen und eigenartigen Resultate ausüben, die Beltrami drei oder vier Jahre später über Räume konstanter Krümmung veröffentlichen konnte.

Nach dreijährigem Aufenthalte in Pisa kehrte er nach Bologna zurück, als Lehrer der theoretischen Mechanik, zu der er sich infolge der besonderen Richtung seiner Studien hingezogen fühlte.

Als nach den Tagen von 1870 in der ersten und reinen Begeisterung die Idee entstand, in der neuen und verjüngten Hauptstadt Italiens die größte Universität des Reiches zu gründen, suchte man die ersten Vertreter der verschiedenen Disziplinen dorthin zu ziehen; unter ihnen Beltrami, dessen zahlreiche Arbeiten, im besonderen über Differentialgeometrie, und vor allem jene originellen Arbeiten über die Theorie

der Räume, bereits einen Weltruf erlangt hatten. So erklärte sich Beltrami im Oktober 1873 bereit, als Lehrer der theoretischen Mechanik und höheren Analysis nach Rom überzusiedeln. Er blieb aber dort nur drei Jahre, um im Jahre 1876 den Lehrstuhl für mathematische Physik und höhere Mechanik an der Universität Pavia zu übernehmen.

Schon von seinem Aufenthalt in Rom an hatte er sich langsam in seinen Arbeiten von den bisher bevorzugten Gegenständen zu trennen begonnen und mehrere Arbeiten über Kinematik und Gegenstände der mathematischen Physik veröffentlicht. In Pavia widmete er sich, sei es infolge seiner Lehrtätigkeit oder in logischer Entwickelung seiner wissenschaftlichen Interessen, fast ausschließlich Untersuchungen der mathematischen Physik und Mechanik, und wenn man in dieser zweiten Periode seiner Tätigkeit hier und da noch einer Arbeit über einen anderen Gegenstand begegnet, so ist dieselbe entweder durch ein mechanisches und physikalisches Problem veranlaßt oder in ihren Grundlagen bereits viele Jahre vorher geplant; dies gilt z. B. für jene umfangreiche Arbeit: *Ricerche di geometria analitica*, die er im Jahre 1879 in den Abhandlungen der Akademie zu Bologna veröffentlichte, und die, ebenso wie eine andere Arbeit über die Oberflächen dritter Ordnung (die ebenfalls 1879 in den *Rendiconti dell' Istituto Lombardo* veröffentlicht ist), auf seine älteren Untersuchungen von 1868 und 1871 bezug nimmt; sie ist lediglich eine vollständige und systematische Zusam menfassung einer Reihe von Untersuchungen, Methoden und Entwickelungen, die er bereits vor Jahren geplant und ausgearbeitet hatte.

In der kurzen, aber eleganten *Commemorazione di Alfredo Clebsch*, welche Beltrami 1872 im *Giornale di Battaglini* veröffentlichte, hob er ganz besonders hervor, wie in der wunderbaren, wissenschaftlichen Laufbahn dieses bedeutenden deutschen Mathematikers, der schon mit 39 Jahren der Wissenschaft entrissen wurde, und dessen Name die ganze mathematische Welt erfüllte, zwei Perioden zu unterscheiden sind, die eine, während welcher seine Untersuchungen sich hauptsächlich mit den Theorien der analytischen Mechanik und der Elastizität beschäftigten, und eine zweite, in der Clebsch seinen tiefgehenden Einfluß auf fast alle Gebiete der höheren Geometrie und Analysis ausgeübt hat. Nun ist es merkwürdig, daß auch in der wissenschaftlichen Tätigkeit Beltramis, die so viele Berührungspunkte mit der von Clebsch hatte, zwei analoge Perioden, aber in umgekehrter Reihenfolge, unterschieden werden können; für ihn fällt der Beginn der zweiten Periode nahe mit dem Zeitpunkt zusammen, in welchem er jene Worte zu Ehren von Clebsch schrieb.

In der Tätigkeit dieser zweiten Periode, die über 20 Jahre währte (während die erste beinahe 15 Jahre umfaßte), durchwanderte er in

einer Reihe von 60 Abhandlungen fast alle Gebiete der mathematischen Physik: Elektrizität, Magnetismus, Potentialtheorie, Licht, Wärme und Elastizität.

Wir werden weiter unten ausführlicher über diese Arbeiten zu sprechen haben; schon hier aber sei erwähnt, daß es Beltrami gelang, die Theorie der Elastizität mit seinen älteren und berühmten Untersuchungen über die Räume konstanter Krümmung in Verbindung zu setzen durch die Entdeckung, daß die Gleichungen der Elastizität in isotropen Mitteln an die Hypothese eines Raumes vom Krümmungsmas Null gebunden sind. Es ist dies ein Zusammenhang, den niemand bis dahin geahnt hatte, und der manche bei seinen Vorgängern auftretende Schwierigkeiten beseitigte.

Nach dem Tode von Casorati, der während eines Zeitraumes von 14 Jahren in Pavia sein Freund und Kollege gewesen war, siedelte Beltrami 1891 wieder an die Universität Rom über, wo man sich schon seit längerer Zeit um ihn bemüht hatte; und in Rom starb er allgemein betrauert am 18. Februar 1900, — wie er gelebt hatte, mit der heiteren Gelassenheit eines antiken Philosophen.

Acht Monate vor seinem Tode hatte Beltrami jene glänzende Gedächtnisrede auf Brioschi gehalten, seine letzte Arbeit, die man als das schönste Denkmal dieses großen Mannes bezeichnen darf. So sollte durch ein merkwürdiges Spiel des Schicksals Beltrami, dessen wissenschaftliche Laufbahn aus verschiedenen Gründen und in mancherlei Art in ihrem ersten Anfang unter dem Einfluß Brioschis gestanden hatte, auch seine letzte Tätigkeit dem Andenken Brioschis widmen. Übrigens veöffentlichte er noch an zwei Stellen einen Nachruf an Brioschi (in den *Annali di Matematica* im Dezember 1897 und in der *Accademia dei Lincei* am 12. Juni 1898) und bereitete die Herausgabe des ersten Bandes seiner Werke vor, dessen Vollendung er nicht erleben sollte.

Ich gehe jetzt zu einer eingehenden Analyse der wissenschaftlichen Produktion Beltramis über, wobei ich alle Arbeiten nach ihrem Inhalte in 11 Kategorien teilen werde:

1. Analytische Geometrie. 2. Infinitesimalgeometrie. 3. Reine Analysis. 4. Mechanik der Flüssigkeiten. 5. Allgemeine Mechanik. 6. Potential; Anziehung; Elektrizität; Magnetismus; Elektromagnetismus. 7. Elastizität. 8. Wärme. 9. Akustik. 10. Literaturberichte, Referate, Übersetzungen. 11. Gedächtnisreden, Nekrologe, Biographien.

Mein Bericht wird sich natürlich nur auf die ersten neun Kategorien erstrecken, und ich werde am Schluß ein sämtliche Arbeiten umfassendes systematisches Verzeichnis anfügen.

I. Analytische Geometrie.

Eine erste Gruppe von Arbeiten über analytische Geometrie bezieht sich auf die rationalen Kurven. In zwei Noten vom Jahre 1868: *Annotazioni sulla teoria delle cubiche gobbe* versuchte er für das Studium der kubischen Raumkurven die Anwendung einer Methode, welche sich auf eine besondere Art der Darstellung ihrer Schmiegungsebene mit Hülfe eines rational auftretenden Parameters gründet; eine sehr fruchtbare Methode, die er 11 Jahre später in einer umfangreicheren Arbeit: *Ricerche di geometria analitica* (1879) weiter entwickelte und ausdehnte.

Mit den kubischen Raumkurven haben sich zuerst Seidewitz, Möbius, v. Staudt, Reye und dann Cremona beschäftigt. Die Arbeit Beltramis ist mit den Untersuchungen des letzteren verwandt; man findet in ihr wichtige Ergänzungen zur Theorie der von Cremona eingeführten sogenannten konjugierten Figuren, und es wird überdies gezeigt, daß jede kubische Raumkurve außer der sogenannten Möbiusschen Nullkorrespondenz noch mittelst gewisser der Kurve zugehöriger Hyperboloide zu einer Korrespondenz höherer Ordnung führt.

Eine andere hinsichtlich der benutzten Methoden verwandte Arbeit ist aus dem Jahre 1871: *Alcune formole per la teoria elementare delle coniche;* dieselbe zeigt in mehreren Punkten Ähnlichkeit mit der Art von Betrachtungen, welche Darboux zwei Jahre später in seinem bekannten Buche: *Sur une classe remarquable de courbes et surfaces algebriques* entwickelte. In dieser Arbeit machte Beltrami auch die Bemerkung, daß in der Theorie der Kegelschnitte Größen auftreten, die mit den Koordinaten von Geraden im Raume Analogie zeigen. Die Erklärung dieser Analogie, die heutzutage durch Konzeptionen der mehrdimensionalen Geometrie klar geworden ist, wurde ihm von Cremona in einem Briefe mitgeteilt, den er mit einigen Kommentaren in dem folgenden (zehnten) Bande des *Giornale di Battaglini* veröffentlichte.

Die in diesen Arbeiten benützten Methoden wurden von ihm in der Arbeit: *Ricerche di geometria analitica* (1879) ausgedehnt und weiter verwendet. Der Ausgangspunkt dieser Untersuchungen (die er dem Andenken seines verstorbenen Freundes Chelini widmete) ist ein von Chelini selbst im Jahre 1849 aufgestelltes algebraisches Prinzip, welches in gewisser Beziehung die Formeln zur Zerlegung der gebrochenen, rationalen Funktionen als Spezialfall enthält. Beltrami erhält mit Hilfe von äußerst eleganten Entwickelungen und Formeln teils bekannte, teils neue Resultate über die kubischen Raumkurven, die rationalen Raumkurven 4. O. und über die Raumkurven im allgemeinen, sowie über die abwickelbaren Flächen; er zeigt dann, wie dieselben Formeln auch für die

ebenen kubischen Kurven dienen können. In dem zweiten Teile der Arbeit sucht er seine Formeln und Entwickelungen auf das Studium der Flächen auszudehnen und untersucht z. B. die Steinersche Fläche, deren (bereits von Clebsch und Cremona gefundene) Haupttangentenkurven er bestimmt.

In enger Beziehung zu diesen *Ricerche* steht die gleichzeitig veröffentlichte kurze Arbeit: *Sull' equazione pentaedrale delle superficie di ters' ordine* (1879), die als eine weitere Anwendung der oben erwähnten Methoden anzusehen ist. Ausgehend von einem allgemeinen Hexaeder, zeigt er die Existenz und Bestimmung des Sylvesterschen Polarpentaeders für eine Fläche 3. O., indem er aus der Hexaedergleichung die Pentaedergleichung ableitet, wobei er beweist, daß jedes Hexaeder in die Hessesche Fläche eingeschrieben ist; er behandelt schließlich jene speziellen Hexaeder, welche von Cremona in das Studium der Flächen 3. O. eingeführt worden waren. —

Eine andere Gruppe von Arbeiten über analytische Geometrie bezieht sich auf die berühmten Sätze von Feuerbach, Simpson und Steiner über die Neunpunkte-Kegelschnitte, die er auf den Raum ausdehnte und mit der Theorie der als reziproke Polare der Steinerschen Fläche interessanten, sogenannten Cayleyschen Fläche 3. O. mit vier Doppelpunkten in Verbindung bringt.

In einer Arbeit aus dem Jahre 1863: *Estensione allo spazio di tre dimensioni dei teoremi relativi alle coniche di nove punti* (veröffentlicht im 1. Bande des *Giornale di Battaglini*), die in gewisser Weise die Fortsetzung einer vorher in demselben Bande veröffentlichten Arbeit: *Sulle coniche di nove punti* ist, dehnt er Eigenschaften des ebenen Vierseits auf den Raum aus, wozu er in der vorangegangenen Arbeit bereits vorbereitende Untersuchungen angestellt hatte. Aus dieser Ausdehnung erhielt er einige einfache Eigenschaften der Cayleyschen Fläche, die neun Jahre später ausführlicher von Eckardt untersucht wurde (vergl. Math. Ann. Bd. 5); letzterer entdeckte dabei viele ihrer Eigenschaften von neuem, welche Beltrami bereits vorher gefunden hatte.

In einer Arbeit aus demselben Jahre 1863: *Intorno alle coniche di nove punti e ad alcune questioni che ne dipendono* suchte Beltrami diese Sätze in ihrer ganzen Allgemeinheit zu beweisen, und er benützte die Gelegenheit, um die Natur und die Eigenschaften der sogenannten quadratischen Transformation ebener Figuren näher zu studieren, auf die gerade zur selben Zeit Schiaparelli in einer Abhandlung in den *Atti dell' Accademia di Torino* unter dem Namen *trasformazione conica* zurückgekommen war.

Einige Jahre später kam Beltrami in zwei (in den *Memorie dell'*

Accademia di Bologna gedruckten) Abhandlungen: *Intorno ad alcuni teoremi di Feuerbach e di Steiner* (1875), *Considerazioni analitiche sopra una proposizione di Steiner* (1877) auf dieselben Fragen zurück; in diesen Arbeiten will er jene Sätze in ihrer größten projektiven Allgemeinheit behandeln, wobei er insbesondere auch gewisse Sätze über Berührung beweist, die er in seinen ersten Arbeiten noch nicht hatte erledigen können, deren Beweis er aber, wie er selbst bezeugt, stets lebhaft angestrebt hatte. Unter Einführung des Begriffes eines allgemeinen absoluten Kegelschnittes steigt die Kurve, welche er den Steinerschen Ort nennt, auf den dritten Grad und die Steinersche Einhüllende auf die dritte Klasse. Als Erweiterung auf den n-dimensionalen Raum findet er, daß jener geometrische Ort und die Einhüllende von der Ordnung bezw. Klasse $n + 1$ werden, und daß sie in Bezug auf die absolute Fläche 2. O. zu einander reziprok polar sind; für die Ebene und im gewöhnlichen (Euklidischen) Raum sind diese geometrischen Orte ein Kegelschnitt in Verbindung mit der unendlich fernen Geraden bezw. eine Cayleysche Fläche 3. O. in Verbindung mit der unendlich fernen Ebene. Darauf stellt er sich die Frage: Welche Bedingung muß der absolute Kegelschnitt erfüllen, damit jene Steinersche Kurve in der Ebene in eine Grade und einen Kegelschnitt zerfalle, die Einhüllende aber in einen Punkt und einen Kegelschnitt? Er läßt diese Frage für den Augenblick ungelöst, aber er hat sie später in sehr einfacher Weise in einer Fußnote zu seinen *Ricerche di geometria analitica* beantwortet, über die wir bereits oben gesprochen haben.

Über ein anderes Thema handelt die Arbeit: *Ricerche sulla geometria delle forme binarie cubiche*, die eine besondere Erwähnung verdient, veröffentlicht im Jahre 1870 in den *Memorie dell' Accademia di Bologna*. Sie ist eine elegante Monographie über die Theorie der binären kubischen Formen unter dem von Bellavitis und dann von Möbius in seinem berühmten baryzentrischen Kalkül eingeführten Gesichtspunkt. Den Untersuchungen von Beltrami waren die Arbeiten Battaglinis über die geometrische Darstellung der binären Formen vorausgegangen, die sich indessen in einer etwas anderen Richtung bewegen. Unter Annahme der Wurzeln und Koeffizienten der kubischen Form als beliebiger komplexer Zahlen und durch die bekannte Darstellung dieser Wurzeln durch Punkte der Ebene ergeben sich elegante geometrische Interpretationen der Beziehungen zwischen den Figuren welche von den Punkten der Fundamentalform und denen ihrer kovarianten Formen gebildet werden.

Das sind die Hauptarbeiten Beltramis über analytische Geometrie; andere, die gewissermaßen als Übungsarbeiten zu betrachten sind, begnügen wir uns kurz anzuführen:

Démonstration d'un théorème de M. Salmon (*Nouv. Ann.* 2. B. S. 181); es handelt sich um die Auffindung des geometrischen Ortes für die Ecke eines Tetraeders, dessen Seitenflächen durch feste Punkte gehen, und von solcher Art, daß die nicht durch die Ecke gehenden Kanten in gegebenen festen Ebenen liegen; es ergibt sich eine Fläche 3. O.

Démonstration d'un théorème de M. Mannheim (ib. S. 209). Es handelt sich um die Ermittelung eines geometrischen Ortes, für den sich eine Fläche 2. O. ergibt.

Théorème proposé à démontrer (ib. S. 336). Es handelt sich um den (von ihm später in der Arbeit: *Estensione allo spazio* etc. bewiesenen) Satz, der sich auf die Mittelpunkte der 28 durch die Centren von acht einem Tetraeder eingeschriebenen Kugeln bestimmten Segmente bezieht; diese Mittelpunkte liegen auf einer Cayleyschen Fläche 3. O.

Solusione di un problema relativo alle superficie di second' ordine (*Giorn. di Battaglini* 1. B.) handelt über denselben Gegenstand, wie die folgende Arbeit:

Solution de la question: Soient donnés une surface de second degré, la sphère exceptée, et un point fixe, lieu du spectateur; sous quel angle verra-t-il la surface (*Nouv. Ann.* 2. B. S. 355), eine Frage, die in den *Nouvelles Annales* gestellt worden war.

Démonstration d'un théorème de M. W. Roberts (*Nouv. Ann.* 4. B. S. 233); hier wird mit Hilfe elliptischer Koordinaten eine von Strebor gestellte Frage gelöst, die Auffindung der Fläche, welche alle diametralen Kreisschnitte der einem konfokalen System angehörigen Ellipsoide enthält und die Ellipsoide senkrecht schneidet; eine bereits anderweitig mit Hilfe der Methoden der Infinitesimalgeometrie gelöste Frage; Beltrami findet für die gesuchte Fläche eine Fläche 4. O. mit einer Doppelgeraden, die von jeder diese Gerade enthaltenden Ebene in einem Kreise geschnitten wird.

Extrait d'une lettre a J. A. Grunert, (Grunerts Archiv, Bd. 43, 1865, S. 481). Elementarer Beweis eines Spezialfalles eines in der Arbeit über Neunpunkte-Kegelschnitte aufgefundenen Satzes aus der Geometrie des Dreiecks.

Di alcune proprietà generali delle curve algebriche (*Giorn. di Battaglini* 4. B.); ausgehend von einem *Leslie* zugeschriebenen Satze über die Summe der Werte einer ganzen Funktion der sinus und cosinus von Winkeln, die eine arithmetische Reihe bilden, erhält er gewisse metrische Eigenschaften in Bezug auf die von einer Kurve auf einem Büschel von p (gleiche Winkel mit einander bildenden) Graden abgeschnittenen Stücke; zu derartigen Sätzen waren auch Chasles, Breton de Champ und Cauchy gelangt.

Sulla minima distanza di due rette (*Giorn. di Batt.* 5. B.); die gewöhnliche Formel der analytischen Geometrie, welche sich auf den kleinsten Abstand zweier Geraden bezieht, wird illusorisch, wenn die beiden Geraden parallel werden; nachdem von Stammer in derselben Zeitschrift ein Mittel gegeben war, um die Unbestimmtheit zu beseitigen, sucht Beltrami ein anderes, das sich auf direkte geometrische Betrachtungen gründet.

II. Infinitesimalgeometrie.

Die 27 Arbeiten Beltramis über Infinitesimalgeometrie beziehen sich, man darf wohl sagen, auf fast alle Teile dieser von ihm mit besonderem Erfolg kultivierten Disziplin. Abgesehen von den beiden ersten Arbeiten, die man als der Infinitesimalgeometrie der Kurven zugehörig bezeichnen kann, und die wir bereits besprochen haben, abgesehen ferner von der Arbeit: *Di alcune formole relative alla curvatura delle superficie*, in welcher durch eine äußerst einfache Methode die Gleichung der Krümmungslinien und die Gleichung für die Krümmungsradien gefunden werden, ist die erste bedeutende Arbeit Beltramis über diesen Gegenstand die Abhandlung: *Ricerche di analisi applicata alla geometria*, die er in den Jahren 1864—65 abschnittweise in dem *Giornale di Battaglini* veröffentlicht hat. Diese Arbeit ist gewissermaßen der Angelpunkt, um den sich alle seine in den folgenden Jahren erschienenen Arbeiten über Infinitesimalgeometrie drehen; in ihr finden sich die Keime so vieler von ihm in der Folge allmählich entwickelter Ideen, und mit ihr gewinnt Beltrami mit einem Schlage eine hervorragende Stelle unter den Mathematikern, die sich damals mit der Grundlegung der erst später zu einer systematischen Lehre entwickelten Infinitesimalgeometrie beschäftigten.

Er beginnt mit einer Untersuchung über die Strahlensysteme und gibt verschiedene Erweiterungen des berühmten Theoremes von Malus-Dupin; er führt die Betrachtung der Differentialparameter ein, auf die er in seinen folgenden Arbeiten so oft zurückkommen, und von denen er auch in seinen Untersuchungen der mathematischen Physik eine so elegante Anwendung machen sollte; er behandelt die Flächen, deren Krümmungsradien durch eine Relation verbunden sind und auf welche die damals neuen Arbeiten von Weingarten und Dini die besondere Aufmerksamkeit der Geometer hingelenkt hatten; er handelt von der Abwickelbarkeit der Flächen, der geodätischen Krümmung, dem Gaußschen Krümmungsmaß etc.

Die in der Folge von ihm veröffentlichten Arbeiten über Differentialgeometrie sind im allgemeinen so eng mit einander verknüpft, daß es nicht leicht ist, dieselben völlig klar von einander zu trennen. Trotzdem

wollen wir einige Gruppen unterscheiden, indem wir die speziell über die Biegung von Regelflächen, über Minimalflächen und über Flächen und Räume konstanter Krümmung handelnden von den übrigen absondern.

In der Arbeit: *Intorno ad alcune proprietà delle superficie di rivoluzione* (1865) findet er ein Theorem über die Krümmung einer Rotationsfläche, welche zu einer andern bei beliebiger Verschiebung derselben längs der Rotationsaxe senkrecht ist; dieses Theorem enthält als speziellen Fall den eleganten Satz Liouvilles in Bezug auf die Pseudosphäre. Hierauf geht er zur Behandlung der Pseudosphäre über, deren Oberfläche und Volumen er berechnet, und zeigt, daß sie die einzige Rotationsfläche ist, welche sich in sich selbst so durch Biegung verwandeln läßt, daß die Meridiane wieder Meridiane werden; er behandelt darauf die Oberflächen, für welche die Differenz der Hauptkrümmungsradien in jedem Punkte konstant ist. Inzwischen führten ihn die Untersuchungen Dinis über die Flächen, deren Hauptkrümmungsradien durch eine Relation verbunden sind, zu der Arbeit: *Risolusione di un problema relativo alle superficie gobbe* (1865), in welcher er zeigte, daß die Schraubenflächen die einzigen windschiefen Regelflächen sind, deren Hauptkrümmungsradien durch eine Relation verknüpft sind, ein Resultat, zu dem gleichzeitig auch Dini auf anderem Wege gelangt war, während Beltrami die schon von ihm mit so großem Erfolge in den Untersuchungen über die Biegung von Regelflächen benützten Methoden zur Anwendung brachte.

Speziell der Theorie der Abwickelbarkeit der Flächen kann die Arbeit aus dem Jahre 1868: *Sulla teoria generale delle superficie* zugerechnet werden, deren Zweck darin besteht, die Theorie der Deformation ohne Anwendung krummliniger Koordinaten zu entwickeln (die übrigens nach Beltramis eigner Aussage das für diese Art von Untersuchungen geeignetste Hilfsmittel darstellen). Ausgehend von der zunächstliegenden Anwendung der drei rechtwinkligen Raumkoordinaten zeigt er, wie man auch auf diesem Wege zu den beiden Fundamentaltheoremen gelangen kann, dem von Gauß über die Unveränderlichkeit des Krümmungmaßes und dem von Minding über die Unveränderlichkeit der geodätischen Krümmung jeder Kurve.

In der Note: *Sulla teoria delle linee geodetiche* (1868) sucht er auf diese Theorie die berühmten von Jacobi in der Variationsrechnung erhaltenen Resultate anzuwenden, und er erhält dadurch für schon bekannte Sätze Formeln von bemerkenswerter Einfachheit.

Gleichfalls im wesentlichen auf die Theorie der geodätischen Linien gründet sich die Arbeit vom Jahre 1869: *Intorno ad un nuovo elemento introdotto dal sig. Christoffel nella teoria delle superficie.* Christoffel hatte zu jener Zeit, in einer von der Berliner Akademie veröffentlichten Ab-

handlung, die Grundlagen einer Art Trigonometrie der krummen Flächen entworfen, deren Elemente durch geodätische Bogen geliefert werden, und hatte die von ihm so genannte reduzierte Länge eines geodätischen Bogens eingeführt. Beltrami bedient sich einer partiellen Differentialgleichung 2. O., von der Christoffel keinen Gebrauch gemacht hatte, beweist in leicht verständlicher Art viele Eigenschaften jener reduzierten Längen, die den Eigenschaften der geradlinigen Vektoren in der Ebene analog sind, und findet, daß die Flächen konstanter Krümmung die einzigen sind, bei denen die reduzierte Länge nur von dem geodätischen Abstand der beiden Endpunkte und nicht von ihrer Lage abhängt.

Eine als Ergänzung zu seinen älteren: *Ricerche di analisi applicata alla geometria* zu betrachtende Arbeit, in der er eine neue, fruchtbare Idee entwickelte, ist die folgende: *Delle variabili complesse sopra una superficie qualunque* (1867), in der er die bekannten Cauchy-Riemannschen Ideen über die Funktionen einer in der Ebene gedeuteten komplexen Variabeln für eine beliebige Oberfläche erweitert. Er findet die Analoga der Laplaceschen Gleichung und des Greenschen Satzes, Theoreme, die er in einer weiter unten zu besprechenden Abhandlung: *Sulla teoria generale dei parametri differenziali* im folgenden Jahre auch auf mehrfache Integrale ausdehnte. Ein Résumé der von ihm in dieser Art von Untersuchungen, sowie in der Theorie der Differentialparameter erhaltenen Resultate ist in deutscher Sprache von ihm im *1. Bande der Mathematischen Annalen* unter dem Titel: *Zur Theorie des Krümmungsmasses* veröffentlicht worden.

Durch glückliche und elegante Darstellung einer Reihe von Formeln und durch Einführung gewisser neuer Ausdrücke, von denen drei bereits bei Bertrand aufgetreten waren, erhält er in der Note: *Di un sistema di formole per lo studio delle linee e delle superficie ortogonali* aus dem Jahre 1872 Gleichungen, welche die bekannten Laméschen Gleichungen für die dreifachen Orthogonalsysteme als Spezialfall enthalten.

In dem 4. Bande der *Nouvelles Annales* veröffentlichte Beltrami 1865 ein elegantes Theorem über den Krümmungsradius einer Haupttangentenkurve *(Sur la courbure de quelques lignes tracées sur une surface)*, das kurz darauf Bonnet Veranlassung zur Aufstellung zweier allgemeiner Formeln über den Krümmungsradius einer Haupttangentenkurve gab, Formeln, in denen er denselben durch die Krümmungsradien zweier durch denselben Punkt gehender Kurven ausdrückte; auf diese beiden Formeln kam Beltrami im folgenden Jahre in dem *Giornale di Battaglini* zurück *(Dimostrazione di due formole del sign. Bonnet)*.

Eine glänzende Monographie hat er 1868 in der Akademie von Bologna *über die Minimalflächen (Sulle proprietà generali delle superficie di area minima)* veröffentlicht. Er schickt derselben eine historische Einführung

in die Theorie dieser Flächen voraus, die wegen ihrer ins Einzelne gehenden Ausführlichkeit und ihrer unerreichten Eleganz noch heute von den Forschern über diesen Gegenstand beständig zitiert und benützt wird. Des weiteren handelt es sich Beltrami darum, die verschiedenen allgemeinen Formeln, welche Monge, Legendre, Poisson, Steiner, Bonnet, Weingarten und schließlich Weierstraß gegeben hatten, mit seinen allgemeinen flächentheoretischen Untersuchungen in Verbindung zu setzen. Insbesondere beweist er von da aus die Theoreme von Mathet, mittels deren man aus einer Minimalfläche andere solche erhalten kann. Schließlich behandelt er auch die Oberflächen mit konstanter mittlerer Krümmung, von denen die Minimalflächen Spezialfälle sind, und über welche damals schon eine Arbeit von Dini und eine andere von Brioschi erschienen war.

Im Jahre 1865 veröffentlichte Beltrami zwei Arbeiten über die Biegung von Regelflächen, von denen übrigens die eine als eine Umarbeitung der anderen angesehen werden kann. Das Problem der Biegung der Regelflächen — beschränkt auf den Fall, daß die Erzeugenden Gerade bleiben — war schon von Minding, Bonnet, Bour behandelt worden; aber in die Endformeln der gegebenen Lösung ging eine willkürliche Funktion ein, deren Bestimmung bei speziellen Anwendungen derselben erhebliche Schwierigkeiten bot. Beltrami suchte diese Schwierigkeit in der Art zu beseitigen, daß er das Problem gewissermaßen in entgegengesetztem Sinne löste, d. h. von Anfang an die durch die gewünschte Transformation vorgeschriebenen Bedingungen einführte; und so erhielt er jene lange, wichtige Reihe von Sätzen, die heute als klassisch angesehen werden dürften und in keiner Vorlesung über Differentialgeometrie fehlen.

Von Arbeiten über Infinitesimalgeometrie der ebenen und doppelt gekrümmten Kurven müssen wir außer den beiden ersten bereits betrachteten Arbeiten noch die folgende erwähnen: *Di una proprietà delle linee a doppia curvatura* (1867), in der er eine merkwürdige und besondere kinematische Eigenschaft des Systems der drei auf einander senkrechten Geraden: Tangente, Normale und Binormale für jeden Punkt einer doppelt gekrümmten Kurve angibt; eine Eigenschaft, die später von Chelini (*Giorn. di Batt.* 5. B. S. 190) auf geometrischem Wege bewiesen wurde, und der er sich bediente in einer kinematischen Arbeit über die geometrische Bewegung eines festen Körpers, welcher auf einem anderen rollt. —

Eine letzte Gruppe von Arbeiten über Differentialgeometrie und zweifellos die wichtigste von allen bezieht sich auf die Flächen und Räume konstanter Krümmung und die pseudosphärische Geometrie.

Grade auf diesem Gebiete erhielt Beltrami geniale Resultate, die seinen

Namen rasch hochberühmt machten. Er selbst erzählt in einem Briefe an Enrico d'Ovidio (von diesem kürzlich in der *Atti Accademia di Torino* 1899—1900 veröffentlicht), in welcher Weise er auf diese Art von Untersuchungen gelenkt wurde. Eine von Lagrange in einer seiner Abhandlungen über geographische Karten hingeworfenen Bemerkung führte ihn im Jahre 1866 zur Lösung des Problemes: die Punkte einer Fläche so auf eine Ebene abzubilden, daß den geodätischen Linien Gerade entsprechen; er fand, daß solche Oberflächen notwendig konstante Krümmung haben müßten.

Inzwischen übten die von Riemann in seiner unsterblichen, nachgelassenen Arbeit: *Über die Hypothesen, welche der Geometrie zu Grunde liegen*, entworfenen Grundlagen den Einfluß auf ihn aus, daß er seine bisherigen Überlegungen auch auf den Raum auszudehnen suchte, und so entstand jene *Teoria fondamentale degli spazi di curvatura costante* (1868), in welcher er, von einer speziellen Form des Linienelementes in einem solchen Raume ausgehend, bewies, daß die geodätischen Linien durch lineare Gleichungen dargestellt werden, — ohne indessen für den Augenblick zu bemerken, mit welcher Leichtigkeit man auch das umgekehrte Problem lösen konnte, was auf eine Verallgemeinerung des genannten von ihm im Jahre 1866 gefundenen Resultats herauskommt; dies Problem erledigte vier Jahre später Schläfli, dessen Abhandlung zu einer neuen Arbeit Beltramis Veranlassung gab.

Zur selben Zeit hatte er eine andere mit dieser eng verknüpfte Abhandlung veröffentlicht: *Saggio di interpretazione della geometria non-euclidea*, (Giornale di Battaglini Bd. 6, 1868) in welcher er zum ersten Male die interessante Tatsache gezeigt hatte, daß alle Sätze der nicht-euklidischen Geometrie (die bereits dreißig Jahre früher von Lobatschewsky und J. Bolyai begründet war und auf die sich zu jener Zeit lebhaft die Aufmerksamkeit der Geometer richtete) eine wirkliche Interpretation auf den Oberflächen konstanter negativer Krümmung des euklidischen Raumes zulassen.

In der oben zitierten Arbeit: Ueber die Räume von konstanter Krümmung wurde er in konsequenter Weise zur Verallgemeinerung dieser Interpretation für einen beliebigen Raum geführt; insbesondere fand er die Interpretation der Grenzflächen Lobatschewskys.

Die tiefgehende, bald hernach von Klein zur projektiven Interpretation der nicht-euklidischen Geometrie benützte Idee Cayleys von der auf einen „absoluten" Kegelschnitt zu gründenden Maßbestimmung steht in engem Zusammenhange mit diesen Arbeiten Beltramis. Sei es aber, daß er nicht darauf aufmerksam wurde, sei es, daß er der Sache nicht die ihr zukommende Wichtigkeit beimaß; hier kam ihm Klein

zuvor, indem er die Nichteuklidische Geometrie geradezu auf projektiver Basis aufbaute. Auch die Trennung der Riemannschen oder elliptischen Geometrie in zwei Fälle, welche hierbei von Klein bemerkt wurde, entging ihm; Beltrami beschäftigte sich nur mit dem einen Falle, der sogenannten sphärischen Geometrie und zeigte, daß dieselbe in der pseudosphärischen Geometrie (mit einer Dimension mehr) enthalten ist. Nichts destoweniger sind diese Arbeiten grundlegend und werden in der Geschichte dieses Zweiges der Geometrie nie vergessen werden.

Man kann sagen, daß diesen Arbeiten allmählich eine immer größere Wichtigkeit beigemessen wurde, als man sie besser verstehen lernte und tiefer in die Ideen, deren Keime sie enthielten, eindrang. Beltrami selbst begann diese Untersuchungen in bescheidener Absicht und gewahrte erst allmählich die Tragweite, welche seine Ideen dadurch gewinnen mußten, daß sie ein neues Licht auf die Kontroversen bezüglich der Grundlagen der Geometrie warfen.

Da ich nicht unterlassen möchte, auch den Inhalt der anderen kleinen Arbeiten Beltramis über die pseudosphärischen Flächen zu skizzieren, erinnere ich hier zunächst an einen Aufsatz aus dem Jahre 1872: *Sulla superficie di rotazione che serve di tipo alle superficie pseudosferiche*, in welcher er ziemlich eingehend die Kurven auf der Pseudosphäre mit der Absicht untersucht, die geometrischen Grundlagen zu einer wirklichen Konstruktion der Fläche vorzubereiten, von der man damals noch keine Modelle besaß, wie wir sie uns heute verschaffen können. Eine andere kurze Arbeit aus demselben Jahre: *Teorema di geometria pseudosferica* ist dem Beweis des merkwürdigen Satzes gewidmet, daß die Einhüllende der Geraden, welche in der euklidischen Ebene von den Punkten einer geraden Linie in denjenigen Richtungen gezogen werden, vermöge deren sie zu einer anderen, auf der ersten senkrechten geraden Linie im Lobatschewskyschen Sinne parallel sein würden, gerade die Meridiankurve (Traktrix) der Pseudosphäre ist.

In der ebenfalls aus dem Jahre 1872 stammenden Abhandlung: *Sulla teoria analitica della distanza*, zeigt er schließlich, daß die aus den Untersuchungen Kleins über Cayleys Maßgeometrie hervorgehende Formel, welche die Entfernungsfunktion des Nichteuklidischen Raumes als den Logarithmus eines Doppelschnittsverhältnisses darstellt, für die Flächen konstanter Krümmung der spezielle Fall einer von ihm bereits für eine beliebige Fläche gefundenen Formel ist, die er in der Arbeit gefunden hatte, in der er von den Christoffelschen reduzierten Längen eines geodätischen Bogens handelt; hier liegt nach Beltrami ein Bindeglied zwischen der Theorie von Cayley-Klein und der von Christoffel.

Viele Jahre später (1888) lieferte er einen historischen Beitrag zur

Theorie der nicht-euklidischen Geometrie *(Un precursore italiano di Legendre e di Lobatschewsky)* indem er aus dem Staub der Bibliotheken ein vergessenes Buch eines Italieners, Gerolamo Saccheri, ans Licht zog, der gegen Ende des 17. und Anfang des 18. Jahrhunderts als Professor in Pavia und später in Mailand lebte, und dessen Versuche zur Lösung der Frage des Euklidischen Postulates den Untersuchungen von Lambert um 30 Jahre und denen von Legendre um mehr als ein halbes Jahrhundert vorangegangen sind.

III. Reine Analysis.

Unter den von uns zu betrachtenden Arbeiten über reine Analysis in engerem Sinne ist die klassische Abhandlung *Sulla teoria generale dei parametri differenziali* (1869) als die wichtigste anzusehen.

Sie stützt sich zwar unmittelbar auf seine Arbeiten über die Differentialparameter von Oberflächen, von denen er in der Differentialgeometrie eine so elegante Anwendung gemacht hatte, ja sie ist eigentlich nur eine Erweiterung derselben; da hier aber die Frage auf rein analytischem Wege, ohne Rücksicht auf die geometrische Interpretation behandelt wird, ist es sinngemäßer, diese Arbeit unter den Abhandlungen über reine Analysis aufzuführen.

Die Differentialparameter sind bekanntlich unter diesem Namen von Lamé in die Wissenschaft eingeführt wurden und darauf von Jacobi (jedoch nur für den Fall von drei Variabeln und für eine spezielle quadratische Differentialform) und später von Brioschi (für den Fall von n Variabeln, aber immer nur für eine spezielle Differentialform) untersucht worden, wobei der Gesichtspunkt hervortrat, sie sozusagen als Kovarianten der quadratischen Differentialform anzusehen. Auch Somoff und Codazzi hatten sich mit der Frage, aber nur in speziellen Fällen, beschäftigt; Beltrami suchte dagegen dieselbe in ihrer ganzen Allgemeinheit anzugreifen, und seine Untersuchungen sind dadurch grundlegend für die vielen anderen späteren Arbeiten über die Theorie der quadratischen Differentialformen geworden, wir erinnern nur an die Arbeiten von Christoffel und Lipschitz. In Beltramis Abhandlung werden auch die Greenschen Sätze betr. Umformung vielfacher Integrale auf Räume von beliebigen Dimensionen und bei einer beliebigen Form des Linienelementes ausgedehnt.

Auch eine kurze Note: *Intorno ad una trasformazione di variabili* (1867), in welcher der Beweis eines implicite bereits in einer Untersuchung Jacobis (in seiner Theorie der dynamischen Differentialgleichungen) enthaltenen Resultates gegeben wird, können wir unter die Arbeiten über

die quadratischen Differentialformen rechnen, da letztere in der Tat die Grundlage der daselbst behandelten Transformation bilden.

Über die trigonometrischen Reihen ist, außer einigen in den ersten Jahren seiner Studien angefertigten und in den *Nouvelles Annales* veröffentlichten Übungsarbeiten, eine Note in den *Rendiconti dell' Istituto Lombardo* (1880) vorhanden, in der für die Entwickelung einer Funktion nach den Sinus und Cosinus von Argumenten, welche von den Wurzeln einer Cylinderfunktion abhängen, ein Abel'scher Satz der Integralrechnung benützt wird, welchen er in einer vorangehenden Note in denselben *Rendiconti* in neuer Form bewiesen und erläutert hatte. Auf die Theorie der Cylinderfunktionen bezieht sich auch eine andere Note aus dem Jahre 1881 *(Atti dell' Acc. di Torino)*, deren Hauptziel indessen die Auffindung des Potentials eines homogenen Kreisringes in Cylinderfunktionen ist; dasselbe Potential hatte er bereits in einer Arbeit des vorangehenden Jahres in der *Accademia dei Lincei* in verschiedener Weise dargestellt; die neue Darstellung war aber für die Theorie der Cylinderfunktionen wegen der Aufstellung einer Formel von Wichtigkeit, die das Analogon zu einer bereits bekannten Formel von Lipschitz bildet.

Über die Theorie der Kugelfunktionen veröffentlichte Beltrami fünf Noten, eine im Jahre 1879: *Intorno ad una formola integrale*, eine andere 1887: *Sulle funzioni sferiche di una variabile* und zwei weitere 1890, 1893 in den *Comptes rendus* der Pariser Akademie und schließlich eine letzte 1896 in den *Rendiconti dell' Istituto Lombardo*, die letzte von ihm veröffentlichte mathematische Note.

In der ersten dieser Noten bewies er eine Integralformel von Heine, die zur Laplaceschen Darstellung der von einer Variabeln abhängigen Kugelfunktionen von beliebigem Index führt; die anderen sollen die Bedeutung zweier Differentialgleichungen in dieser Theorie hervorheben, denen eine lineare, homogene Funktion der Kugelfunktionen erster und zweiter Art mit konstanten Koeffizienten genügt. Diese Gleichungen finden sich in einer speziellen Form schon bei F. Neumann, doch ohne daß ihnen die Bedeutung beigelegt wird, die sie für die Theorie der Kugelfunktionen gewinnen können. Auf diese Gleichungen kam Beltrami später, bis in die letzten Zeiten seiner Tätigkeit, wiederholt zurück, um entweder andere analoge aufzusuchen, oder dieselben in anderer Weise abzuleiten.

Als kurze Übungsarbeiten zur Theorie der Gleichungen sind die beiden Arbeiten: *Sulle equazioni algebriche* (1863) und: *Sur une question de M. Roberts* (1864) anzusehen; die kurze Abhandlung: *Sulle funzioni bilineari* (1873) schließlich hat den Zweck, eine einzelne bilineare Form oder zwei simultane bilineare Formen mittels linearer, unabhängiger Trans-

formationen auf eine kanonische Form zu bringen: für diesen Gegenstand waren indessen die zu jener Zeit und in der Folge von Weierstraß, Kronecker und anderen gemachten Fortschritte von wesentlich höherer Bedeutung.

Über die vielen bemerkenswerten Arbeiten in der Potentialtheorie, die man mit vollem Recht auch in diese dritte Kategorie einordnen könnte, wollen wir lieber in einem besonderen Abschnitte handeln, mit Rücksicht auf den engen Zusammenhang, den dieselben in der Methode wie in den in ihnen verfolgten Zwecken mit der mathematischen Physik haben.

IV. Mechanik der Flüssigkeiten.

Etwa in den Jahren 1871—72 wandte sich Beltrami, wie schon oben angegeben, in ausgesprochener Weise den Untersuchungen über mathematische Physik zu, und er begann hier mit zwei Arbeiten ganz verschiedener Art; auf die eine: *Sulla teoria matematica dei solenoidi elettrodinamici* (die einzige von ihm im *Nuovo Cimento* veröffentlichte, von geringem Umfang, aber reich an Inhalt) kam er in den folgenden Jahren öfters zurück; die andere, sehr umfangreiche Arbeit, welche er abschnittweise in einem Zeitraume von vier Jahren in den Abhandlungen der Akademie zu Bologna veröffentlichte, trug im Anfang den Titel: *Sui principi fondamentali dell' idrodinamica razionale.* Wir wollen zuerst über diese zweite Arbeit sprechen, von der ersteren werden wir weiter unten handeln.

Das Ziel, das er sich beim Beginn seiner Untersuchungen über Flüssigkeiten steckte, war, wie dies bereits der Titel andeutet, eine systematische und vollständige Theorie der Hydrodynamik aufzustellen; aber als er mit der Behandlung des kinematischen Teiles der Theorie begonnen hatte, welche er dem dynamischen Teile zugrunde zu legen gedachte, und ihm dabei der Stoff unter der Hand mehr und mehr anwuchs, begnügte er sich schließlich, mit der gründlichen Durchforschung des *kinematischen* Teiles; von der Vollendung seines Werkes wurde er auch durch die — damals zum Teil bereits erfolgte, teils in Aussicht gestellte — Veröffentlichung der hydrodynamischen Untersuchungen Kirchhoffs abgezogen. So änderte er denn, nachdem er bereits angedeutet hatte, daß er in dem vierten (am 12. Februar 1873 vorgelegten) Teile zur dynamischen Theorie und im besonderen zur Transformation der Fundamentalgleichungen in krummlinige Koordinaten übergehen würde, plötzlich seinen Vorsatz (siehe *Rend. dell' Accademia di Bologna* 1873—74, S. 48) und beschränkte sich in dem vierten und letzten Teile, wie er jetzt vorliegt, darauf, die vorher behandelten Fragen von einer anderen Seite zu betrachten, unter Ab-

änderung des Titels für die gesamten vier Abhandlungen, der nun lautete *Ricerche sulla cinematica dei fluidi.*

Mit der Zerlegung der Elementarbewegung eines Flüssigkeitsteilchens in eine translatorische und in eine innere oder molekulare Bewegung hatten sich schon Kirchhoff, Stokes, Helmholtz und in besonderen Fällen Dirichlet und Brioschi beschäftigt; W. Thomson hatte für die betreffenden Theoreme eine ganz neue Ableitung gegeben, indem er den Begriff der *Zirkulation* voranstellte. Beltrami gibt im ersten Teil seiner Arbeit eine systematische Ableitung der hier in Betracht kommenden Beziehungen, wobei er auch andere Arten der Zerlegung zur Sprache bringt.

Im zweiten Teile beginnt Beltrami die Untersuchung der Bewegung in einem endlichen Flüssigkeitsvolumen, wobei insbesondere die merkwürdigen von Helmholtz vierzehn Jahre früher entdeckten Analogien zwischen der Bewegung von Flüssigkeiten und elektromagnetischen Wirkungen hervortreten, Analogien, die Beltrami hier in ihrer einfachsten kinematischen Form betrachtet. Hierauf geht er zur Bestimmung der Geschwindigkeitskomponenten durch Potentialfunktionen über, die er, um jeden den Anschein von Divination erweckenden Kunstgriff zu vermeiden, mit Hilfe des Greenschen Satzes ableitet. Es ergeben sich so, neben anderen neuen, dieselben Formeln, welche für den Fall von inkompressibeln Flüssigkeiten von Helmholtz, Hankel und für beliebige Flüssigkeiten von Roch und Lipschitz gefunden worden waren.

In dem dritten Teile beschäftigt sich Beltrami besonders mit dem gewöhnlich nach Dirichlet benannten Probleme, dessen erste Idee auf die berühmten Untersuchungen Poissons über die Bewegung eines Pendels in einem umgebenden Mittel zurückzuführen ist, das Problem der Bestimmung des Geschwindigkeitspotentials einer inkompressiblen Flüssigkeit, in der sich ein fester Körper von gegebener Form nach vorgeschriebenen Gesetzen bewegt. Mit dieser Frage hatte sich bereits Hoppe, dann in besonders eleganter Weise Clebsch für den Fall eines festen Ellipsoides und Bjerknes für den Fall mehrerer kugelförmiger Körper beschäftigt.

Im vierten Teile geht schließlich Beltrami zur Entwickelung der damals von Helmholtz und Boltzmann begründeten Theorie der sogenannten Wirbel*flächen* über, die man durch die Voraussetzung von Unstetigkeiten der Geschwindigkeitskomponenten längs einer oder mehrerer Trennungsflächen erhält.

Wie der Verfasser selbst zugesteht, hat die ganze Arbeit durch die bruchstückartige Form, in der sie erschienen ist, sichtlich gelitten;

doch stellt sie zweifellos einen sehr bemerkenswerten Beitrag zur Theorie der Flüssigkeiten dar, und man kann wohl sagen, auch eine reiche Fundgrube von Formeln, Entwickelungen, Resultaten und Methoden für jeden, der in diesem Gebiete arbeitet. Beltrami selbst benützte dieselbe in vielen späteren Arbeiten, besonders in denjenigen über die Theorie der Elasticität und über die Maxwellschen Gleichungen.

Eine Fortsetzung der hydrodynamischen Untersuchungen sollte die folgende Arbeit bringen: *Memoria intorno al moto piano di un disco ellittico in un fluido incompressibile*, die als am 16. Dezember 1875 der Akademie zu Bologna vorgelegt angezeigt ist, aber nicht veröffentlicht wurde.

Schon früher hatte er sich mit dem Dirichletschen Problem für den Fall einer nur von zwei Koordinaten abhängigen Bewegung beschäftigt, und zwar mit dem Falle der Bewegung einer elliptischen- oder Kreisscheibe in einer ebenen Flüssigkeitsschicht; nach einigen Jahren (1878) kam er auf ein analoges Problem mit gleichfalls nur zwei Koordinaten zurück, und er untersuchte in einer Note im *Rend. dell' Istituto Lombardo: Intorno ad un caso di moto a due coordinate*, das Beispiel einer Flüssigkeitsschicht, welche eine Kugelfläche bedeckt und durch eine auf dieser gleitende feste Kugelkalotte zur Bewegung gezwungen wird.

Eine letzte Arbeit über die Flüssigkeiten schließlich stammt aus dem Jahre 1889: *Considerazioni idrodinamiche;* in dieser untersuchte er die von ihm sogenannten schraubenförmigen Bewegungen, bei denen die Strömungslinien in jedem Augenblick mit den Wirbellinien zusammenfallen.

V. Allgemeine Mechanik.

Nur wenige Arbeiten sind in diese Kategorie einzureihen.

Abgesehen von einem kurzen Brief an A. Mogni (1867), betreffend einen Widerspruch, den dieser (*Giorn. di Batt.* 4. B., 1866) zwischen zwei Formeln von Euler und Binet über Centralkräfte gefunden zu haben glaubte, ist die erste der hier in Betracht kommenden Arbeiten *Sul moto geometrico di un solido che ruzzola sopra un altro solido* (1872); Veranlassung zu derselben gab ihm die damals erschienene deutsche Übersetzung des Werkes: *Treatise on natural philosophy* von W. Thomson und Tait, in welcher dieses kinematische Problem in einfacher und eleganter Weise behandelt war, indessen über das Vorzeichen einiger Ausdrücke gewisse Zweifel bleiben; er suchte diese Theorie mit besonderer Benützung seines Satzes über eine kinematische Eigenschaft des aus Tangente, Normale und Binormale einer doppelt gekrümmten Kurve bestehenden Axensystems, den er bereits 1867 gefunden hatte, auseinanderzusetzen.

Seine *Osservazione alla nota del prof. Chelini etc.* (1874) betrifft die Umformung gewisser neun Gleichungen, die in der genannten Note auf andere Weise gefunden waren.

Über die Dynamik der Räume mit konstanter Krümmung hatte Beltrami 1876 der *Accademia dei Lincei* eine Abhandlung angekündigt, die er später zurückzog; er begnügte sich, allein den kinematischen Teil in Darbouxs *Bulletin des sciences mathématiques* zu veröffentlichen. Unter Annahme eines n dimensionalen Raumes mit konstanter negativer Krümmung wird gezeigt, daß im Falle eines geraden n für jede elementare Bewegung des starren Systems stets ein reeller Punkt existiert, welcher den Charakter des augenblicklichen Rotationscentrums hat, und eine reelle Hyperebene mit dem Charakter der augenblicklichen Translationsebene. Für ein ungerades n existiert hingegen im allgemeinen weder das eine, noch das andere; wenn indessen für eine spezielle Bewegung das eine oder andere vorhanden ist, so gibt es deren unendlich viele, und diese bilden dann eine Gerade bezw. ein Ebenenbündel.

Die Arbeit: *Sulla teoria degli assi di rotazione* (1881) wurde in dem zu Ehren Chelinis herausgegebenen Bande veröffentlicht, der eine Anzahl von Abhandlungen italienischer und ausländischer Mathematiker enthält. Da sich Chelini wiederholt mit der von Poinsot in so glänzender Weise ausgebauten Theorie beschäftigt und Turazza über denselben Gegenstand eine systematische Darstellung in seinem Buche: *Il moto dei sistemi rigidi* (Padova 1868) gegeben hatte, hielt es Beltrami für nützlich, die Frage in der Absicht wieder aufzunehmen, der Behandlung der Theorie eine größere Gleichförmigkeit und den Formeln eine größere Symmetrie zu geben, wobei er die Untersuchungen der genannten beiden hervorragenden italienischen Forscher nach einer ihm eigenen Methode darstellte.

Die Theorie des Gleichgewichtes der biegsamen, unausdehnbaren Flächen war zuerst von Lagrange in Angriff genommen, dann von Poisson 1814 in seiner Abhandlung über elastische Flächen und 1817 von Cisa de Gresy behandelt worden. Lagrange hatte indessen unter Unausdehnbarkeit die Unveränderlichkeit des Flächenelementes und nicht des Linienelementes verstanden, und bei dieser beschränkenden Annahme ist die Oberflächenspannung senkrecht zu einem Linienelemente an irgend einer Stelle der Fläche, von der Richtung dieses Linienelementes ganz unabhängig. Poisson hatte diese Annahme verlassen, während Mossotti, der in seinen Vorlesungen über Mechanik diesem Gegenstande ein besonderes Kapitel gewidmet hat, sich an die Ideen von Lagrange hielt und nur auf einige Spezialfälle anwendbare Formeln ableiten konnte.

Die exakten Differentialgleichungen des Problems wurden zum ersten Male 1881 von Lecornu gefunden; veranlaßt durch diese gerade damals

erschienene Abhandlung, nimmt Beltrami das Problem von Anfang an wieder auf und leitet unter Anwendung der Lagrangeschen Methode, doch unter Zugrundelegung der richtigen Definition der Unausdehnbarkeit, alle Fundamentalgleichungen ab; er erhält so die von Lecornu durch geometrische Betrachtungen begründete Theorie der Oberflächenspannungen, er betrachtet einige neue Fälle des Gleichgewichtes und fügt die auf die unendlich kleinen Deformationen einer biegsamen, unausdehnbaren Fläche bezüglichen Formeln hinzu.

Die letzte Arbeit die wir dieser Kategorie zuordnen, ist die folgende: *Sulle equazioni dinamiche di Lagrange* (1895). Schon bei anderen Gelegenheiten (in seiner Note über die Ausdehnung des D'Alembertschen Princips auf die Elektrodynamik) hatte Beltrami nachdrücklichst empfohlen, bei mechanischen Untersuchungen nicht auf irgendwelche abgeleitete Principien sondern auf die Grundformel von Lagrange zurückzugehen (welche durch Verbindung des Princips der virtuellen Geschwindigkeiten mit dem d'Alembertschen Princip entsteht). Hierauf kommt er nunmehr zurück und zeigt, wie man aus dieser Grunformel sowohl die allgemeinen Lagrangeschen Bewegungsgleichungen der Systeme als insbesondere die modifizierten Gleichungen für die heute sogenannten cyklischen Systeme ohne weiteres erhalten kann.

VI. Potential. Anziehung. Elektrizität. Magnetismus. Elektromagnetismus.

Es sind mehr als 30 von Beltrami herrührende Arbeiten über die Theorie des Potentials vorhanden, wenn man denselben seine Abhandlungen über Elektrizität und Magnetismus hinzurechnet, und die letzteren sind im allgemeinen so eng mit den ersteren verknüpft, daß eine wirkliche Sonderung nicht möglich ist. Doch besteht eine Gruppe von Arbeiten, welche speziell von der analytischen Theorie der Potentialfunktionen und des Potentials handeln, und diese wollen wir zuerst ins Auge fassen.

Die analytische Theorie des Potentials, deren Entstehung auf Laplace, Legendre, Lagrange zurückgeht, und die zuerst fast ausschließlich den Anforderungen der Mechanik des Himmels angepaßt war, wurde später vor allem durch Green und Gauß eines der wichtigsten Hilfsmittel der mathematischen Physik. Beltrami widmete dieser Theorie ein ganz besonders gründliches und eingehendes Studium, er arbeitete — mit verschiedenen Unterbrechungen — viele Jahre über dieselbe, und er kam oft auf dieselben Dinge zurück, um dieselben weiter zu klären, ihre Bedeutung eingehender hervorzuheben oder auf einige weniger beachtete Einzelheiten ausdrücklicher hinzuweisen.

Die in Bologna 1878 veröffentlichte Abhandlung: *Intorno ad alcuni punti della teoria del potenziale* hat geradezu den Zweck, die bis dahin erlangten Resultate einer genauen Kritik zu unterziehen und die Gültigkeit gewisser Fundamentalformeln zu präcisieren und enger zu fassen; er tut dies, indem er für die systematische Ableitung jener Formeln den besten, unmittelbarsten und natürlichsten Weg einschlägt.

Einen Gegenstand, mit dem er sich wiederholt beschäftigte, bilden die symmetrischen Potentialfunktionen, über die er 1878 eine Abhandlung: *Sulle funzioni potenziali di sistemi simmetrici intorno ad un asse* veröffentlichte. In derselben stellt er eine Reihe von Formeln auf, die sich besonders auf die sogenannten *zugeordneten Funktionen* beziehen, die, Konstanten gleichgesetzt, die Gleichungen der Kraftlinien ergeben. Ferner gibt er einen Satz an, mit dessen Hilfe man von der Kenntnis der zugeordneten Funktionen eines beliebigen symmetrischen Systems zu den analogen Funktionen für das (gleichfalls symmetrische) aus dem ersten durch Inversion in Bezug auf einen Punkt der Symmetrieaxe abgeleitete System gelangen kann (ein Satz, dessen Ursprung in einer Arbeit des vorangehenden Jahres (1877): *Intorno ad alcune questioni di elettrostatica* zu suchen ist; in dieser hatte er die Kraftlinien für eine kreisförmige Scheibe berechnet und sich dabei der von Dini gefundenen Formel für das Potential einer elliptischen Scheibe mit nach einem bestimmten Gesetze variabler Dichtigkeit bedient).

Dieser von ihm als *Inversionstheorem* bezeichnete Satz vervollständigt für den Fall symmetrischer Systeme und für die zugeordneten Funktionen jenes bereits von Thomson für die Potentialfunktionen allein aufgestellte Inversionsprincip. Auf ihn und die Theorie der zugeordneten Funktionen kam er 1883 in einer Arbeit: *Sulle funzioni associate e specialmente su quelle della calotta sferica* zurück, in welcher er nach einer methodischen Begründung seiner Theorie eine Anwendung derselben auf den bereits von Green, Thomson, Lipschitz, Betti und Carl Neumann betrachteten Fall der Kugelkalotte macht. Er erhält das Potential einer symmetrischen Belegung auf der Kalotte, welches nur für einige ganz besondere Fälle bekannt war, sowie die Gleichung der bisher noch nicht bekannten zugehörigen Kraftlinien.

Eine Arbeit aus dem Jahre 1881: *Sulla teoria delle funzioni potenziali simmetriche* bewegt sich in demselben Gedankenkreis. Nachdem er in einer vorangehenden Arbeit über das klassische Problem der Anziehung der Ellipsoide eine Formel abgeleitet hatte, welche gestattet, das Potential einer kreisförmigen Scheibe mit einer vom Centralabstand abhängigen Dichtigkeit zu berechnen, wenn man die Werte dieser Funktion an der Scheibe selbst kennt, gewinnt er jetzt mit Hilfe dieser Formel gewisse

Einzelresultate, zu denen man bisher nur durch künstliche Methoden gekommen war; bemerkenswert ist die eigenartige, einfache Form, die er in dieser Abhandlung für das Potential einer symmetrischen, elektrisch geladenen Kreisscheibe erhält. Die eingehende und vollständige Untersuchung dieser Funktion bildet dann einen der Hauptgegenstände seiner bereits zitierten Arbeit aus dem Jahre 1883: *Sulle funzioni associate* etc.

Sull' attrazione di un anello circolare od ellittico lautet der Titel einer 1880 veröffentlichten Abhandlung Beltramis, deren Zweck, abgesehen von der Untersuchung des Potentials des homogenen elliptischen Ringes und der entsprechenden zugeordneten Funktion auch darin besteht, eine Reihe interessanter analytischer Resultate abzuleiten, zu denen diese Untersuchung Anlaß gibt; als Fortsetzung dieser Abhandlung kann man die viele Jahre später veröffentlichte Arbeit ansehen: *Sulla funzione potenziale della circonferenza* (1889), in welcher er elegante Eigenschaften der somit definierten Funktion in Betracht zieht; dieselbe ist der reziproke Wert des Gaußschen arithmetisch-geometrischen Mittels der kleinsten und größten Entfernung des variabeln Punktes von der Peripherie und genügt daher einer partiellen Differentialgleichung, die bereits von Borchardt gefunden war, und von der dann Beltrami seinerseits zeigt, daß sie nur eine andere Form der Laplaceschen Gleichung ist. In dieser Note wird auch die Form angegeben, welche das Greensche Theorem für die in Bezug auf eine Axe symmetrischen Potentialfunktionen annimmt.

Die Note: *Intorno ad alcune proposizioni di Clausius nella teoria del potenziale* (1878) sollte verschiedene Sätze und Formeln zur Kenntnis bringen, welche Beltrami gelegentlich seiner Untersuchungen gefunden hatte, und die einige Analogie mit anderen in der damals neu erschienenen Monographie von Clausius enthaltenen Formeln aufwiesen; die Arbeit: *Intorno ad alcuni teoremi nuovi del signor C. Neumann sulle funzioni potenziali* (1880) hatte den Zweck, einige von Neumann im 16. Bande der *Mathematischen Annalen* ohne Beweis angegebenen Sätze über das logarithmische und Newtonsche Potential zu beweisen.

Die Methoden zur Lösung des klassischen Problems der Anziehung der Ellipsoide lassen sich nach einer Bemerkung Chelinis in direkte und indirekte Methoden scheiden. Direkte Lösungen mit Hilfe mehr oder weniger komplizierter Integrationsmethoden waren naturgemäß die ersten Versuche von Legendre, Laplace, Poisson, und auch die bewundrungswürdige Methode Dirichlets kann man zu den direkten rechnen, indirekt die Methoden von Ivory, Gauß und Chasles, mit denen sich auch Chelini, Betti und Dini beschäftigten. Beltrami gibt unter Anwendung elliptischer Koordinaten eine Methode an, welche er als die indirekteste bezeichnet, weil aus ihr jede wirkliche Integration

eliminiert ist. Dem allgemeinen von Dirichlet gegebenen Ausdruck des Potentials eines Ellipsoides hatte er schon früher eine kurze Arbeit: *Intorno ad una trasformazione di Dirichlet* (1872) gewidmet.

Die Note: *Sulla teoria del potenziale* (1883) ist zur Vervollständigung der besonders einfachen Formeln bestimmt, welche zum ersten Male von Thomson für das gegenseitige Potential zweier Massenverteilungen gegeben worden waren; es handelt sich darin um die Fälle, in denen eine derselben oder beide Doppelbelegungen sind, oder noch allgemeiner beliebig zusammengesetzte Verteilungen.

In einer letzten Gruppe wollen wir die Arbeiten über Potentialtheorie zusammenfassen, welche sich nicht auf das Newtonsche Potential beziehen.

Die Arbeit aus dem Jahre 1873: *Sul potenziale mutuo di due sistemi rigidi ed in particolare sul potenziale elementare elettro-dinamico* wurde der *Accademia dei Nuovi Lincei* vorgelegt, aber in den *Annali di Matematica* veröffentlicht. Zwei einander widersprechende Behauptungen von Helmholtz und C. Neumann gaben den Anlaß zu dieser Arbeit, in welcher er voraussetzt, daß zwei Körper auf einander mit Kräften wirken, die eine Kräftefunktion besitzen, und die Bedingungen aufsucht, denen diese genügen muß, damit die gegenseitigen Kräfte dem Princip der Action und Reaction entsprechen; er findet durch direkte Rechnung, genau der Helmholtzschen Behauptung entsprechend, daß die allgemeinste Form eines solchen Potentials eine willkürliche Funktion der sechs unabhängigen Parameter ist, von denen die gegenseitige Lage der beiden Körper abhängt, und diese Bedingung ist nach dem Beltramischen Beweise nicht blos notwendig, sondern auch hinreichend.

Als C. Neumann die Untersuchung eines neuen elementaren Potentials in Angriff genommen hatte, das sich von dem Newtonschen Potentiale durch einen Dämpfungsfaktor unterscheidet, geht Beltrami in einer Note 1895: *A proposito di una nuova ricerca del professore C. Neumann* auf die Behandlung der damit aufgeworfenen Fragen ein; er findet in derselben einen Satz über die neuen Potentiale, welcher dem Satze von Poisson analog ist. Derselbe ist ein Gegenstück zu einem allgemeinen von Beltrami aufgestellten Satze, den er auf andere Weise in einer Arbeit über den von Kirchhoff dem Huyghensschen Princip gegebenen Ausdruck abgeleitet hatte, und bildet andererseits einen besonderen Fall eines von ihm in seiner Abhandlung über die Theorie der Wärme gegebenen Theoremes.

Die drei in den Jahren, 1887, 1891, 1894 in den *Rendiconti dell' Istituto Lombardo* veröffentlichten Noten: *Sulle funzioni complesse* beschäftigen sich mit der Darstellung von Funktionen, welche ein Analogon

der gewönlichen von drei Koordinaten abhängigen Potentialfunktionen für die Ebene darstellen, aber von den sogenannten logarithmischen Potentialfunktionen verschieden sind, die nach C. Neumann in bekannter Weise zur Herstellung einer solchen Analogie benützt werden. Er findet eine Funktion, für welche die der Laplaceschen Gleichung entsprechende Relation anstatt von zweiter von erster Ordnung ist; die Funktionen sind komplex für Innengebiete und reduzieren sich für Außengebiete auf die gewöhnlichen Funktionen einer komplexen Variabeln; sie vereinigen in gewissem Sinne die Eigenschaften der gewöhnlichen Raum- und Flächenpotentiale. Er berechnet den Wert dieser Funktion, die er komplexe Potentialfunktion nennt, für den Fall einer von einer Ellipse begrenzten Fläche, ein Beispiel, das Beziehungen zu der klassischen Theorie der Anziehung von Ellipsoiden darbietet. —

Wir haben noch eine Reihe von Arbeiten zu nennen, die zwar in engem Zusammenhang mit den vorgenannten stehen, in denen indes die physikalischen Anwendungen der analytischen Resultate in den Vordergrund treten. Wir nennen zunächst diejenigen, die sich im besonderen auf Elektrostatik und Elektrodynamik beziehen, und sodann die anderen, die über Magnetismus und Elektromagnetismus handeln.

Die Verhältnisse bei der natürlichen Verteilung der Elektrizität auf der Oberfläche einer isolierten Kugelkalotte und bei der von einem beliebig gelegenen elektrischen Punkt induzierten Verteilung auf einer solchen Kalotte waren bereits von Thomson 1847 und darauf in vollständigerer Weise von Lipschitz in verschiedenen Abhandlungen untersucht worden; hierin eingeschlossen ist die Einwirkung eines elektrischen Punktes auf eine Kreisscheibe. Beltrami unternimmt im Anschluß an gewisse Äußerungen von Thomson und Felici die vollständige Behandlung der auf einem Konduktor von der Form einer Kreisscheibe durch beliebige elektrische Wirkungen induzierten Belegung, wenn dieselben gegen die Axe symmetrisch sind; es ist dies die schon früher von uns erwähnte Arbeit aus dem Jahre 1877 *(Intorno ad alcune questioni di elettrostatica)* welche den Beginn seiner Untersuchungen über die symmetrischen Potentiale und die zugehörige Bestimmung der zugeordneten Funktionen bildet. Eine weitere Anwendung des dort gegebenen Theorems der Inversion machte er 1884 in der Abhandlung: *Intorno ad un problema relativo alla teoria delle correnti stazionarie.*

Wir haben bereits erwähnt, daß eine der ersten Arbeiten Beltramis über mathematische Physik die 1872 im *Nuovo Cimento* veröffentlichte Abhandlung ist: *Nota sulla teoria matematica dei solenoidi elettrodinamici.* Gegenüber den einfachen, aus gleichen und äquidistanten, zur Axe normalen Elementarströmen zusammengesetzten Solenoiden, wie sie von Ampère

1823 zum ersten Male in Betracht gezogen worden waren, untersucht Beltrami dort, unter Zugrundelegung von Ideen, die bereits von Thomson ausgesprochen worden waren (wovon Beltrami damals indessen keine Kenntnis hatte), stetige Systeme von Strömen, deren Verteilungsgesetz viel allgemeiner ist. Insbesondere beweist er einen Satz über die elektrodynamische Wirkung eines solchen Solenoides, von dem ein Spezialfall 1870 von Riecke und ein anderer 1868 von Lipschitz gegeben worden war; diese beiden Spezialfälle waren ihrerseits zwei verschiedenartige Ausdehnungen des von F. Neumann 1848 und eingehender 1871 von E. Weyr behandelten Falles des sogenannten cylindrischen Solenoides. (Beltrami ist später noch einmal auf diesen Satz zurückgekommen, nämlich in der Abhandlung: *Intorno ad alcuni punti della teoria del potenziale* 1878, die wir schon oben betrachtet haben).

In derselben Note (des *Nuovo Cimento*) untersuchte er auch die sogenannten neutralen Solenoide, die eine bemerkenswerte Analogie mit den Niveauschichten darbieten, und in der Kinematik der Flüssigkeiten zeigte er beiläufig, wie man zu einer sehr einfachen Anwendung dieser Systeme für den Fall einschaliger Hyperboloide gelangen kann; auf diese Anwendung kam er in einer eleganten Arbeit (der einzigen, die er in den *Acta mathematica* veröffentlicht hat): *Sur les couches de niveau électromagnétiques* (1883) zurück; er leitet darin einige schöne Theoreme ab, durch welche die Theorie der Krümmungslinien und Haupttangentenkurven eines einschaligen Hyperboloides eine einfache elektromagnetische Anwendung findet.

Die Arbeit: *Sulla determinazione sperimentale della densità elettrica alla superficie dei corpi conduttori* (1877) handelt von dem bekannten Probescheibchen Coulombs, dessen Theorie bereits von Maxwell versucht worden war; er sucht eine besondere Form für dieses Instrument, durch welche die genaue Bestimmung der Beziehung zwischen der entnommenen und vorher vorhandenen Elektrizität ermöglicht wird.

Bemerkenswert, vor allem wegen der aus ihr sich ergebenden Beziehung zwischen den Theorien der Elektrizität und der Thermodynamik, ist die Abhandlung: *Sulla teoria dei sistemi di conduttori elettrizzati* (1882); in ihr wird der allgemeinste und einfachste Ausdruck der in einem System elektrisch geladener Konduktoren von den elektrischen Kräften bei irgend einer Veränderung der Form, der gegenseitigen Lage und des elektrischen Zustandes der Konduktoren geleisteten äußeren, mechanischen Arbeit aufgestellt. Aus den so erhaltenen Formeln kann man unter anderem das Reziprozitätsgesetz von Clausius ableiten (das sich auf zwei verschiedene Gleichgewichtsladungen eines beliebigen Systems von Konduktoren bezieht), und durch den Übergang zur Betrachtung von Kreisprozessen ergibt sich

ein Resultat, das eine offenkundige Analogie zu dem zweiten Hauptsatz der Thermodynamik bildet.

Wir wollen schließlich zu dieser Klasse eine letzte Arbeit rechnen, die durch den Maxwellschen Versuch veranlaßt wurde, die elektrodynamischen Wirkungen direkt aus den allgemeinen Gleichungen der analytischen Mechanik abzuleiten. Beltrami zeigte in dieser Arbeit (*Sull' estensione del principio di d'Alembert all' elettrodinamica*, 1889), daß man auch hier auf die Lagrangesche Grundformel der Mechanik zurückgehen kann; dieselbe kann, bei Berücksichtigung des Ohmschen Gesetzes, durch geeignete Verallgemeinerung geradezu der Angelpunkt der Elektrodynamik werden. —

Wir gehen jetzt zur Betrachtung der Arbeiten über, die speziell über Magnetismus und Elektromagnetismus handeln.

Eine auch der Zeit des Erscheinens entsprechend zuerst zu erwähnende Arbeit ist aus dem Jahre 1882: *Sul potenziale magnetico.* In derselben diskutiert er die von Thomson eingeführten Begriffe: *Axe* und *Zentrum* eines magnetischen Körpers und findet, daß zwar die Bezeichnung *Axe* berechtigt ist, weil dieselbe von dem Wirkungsgesetze der magnetischen Kräfte unabhängig ist, nicht aber die Bezeichnung *Zentrum*, da diese nur bei der Newtonschen Hypothese eine Bedeutung hat; er legt darauf die Existenz eines anderen Punktes auf der Axe dar, dessen Lage in der Tat von dieser Hypothese unabhängig ist, und der mit dem Thomsonschen Zentrum nur dann übereinstimmt, wenn das Trägheitsmoment des Systems in Bezug auf die magnetische Axe Null ist.

Auf diese Arbeit folgte eine Abhandlung: *Sulla teoria degli strati magnetici* (1883), welche sich das Studium der Schichten mit tangentialer Magnetisierung zur Aufgabe stellt; von diesen findet sich nur eine indirekte Erwähnung bei Thomson, während die Schichten mit normaler Magnetisierung, bei denen die magnetische Axe in jedem Punkt zu der Oberfläche der Schicht normal ist, bereits eingehend untersucht waren.

Der erste Teil der *Note fisico-matematiche* (1889) ist dem Potentiale eines magnetischen Körpers auf sich selbst gewidmet, welches das Maß der magnetischen Energie dieses Körpers darstellt. Beltrami zeigt zunächst, daß man für dieses Potential nicht etwa einfach eine Formel von Thomson heranziehen kann, zu deren Anwendung man sich auf den ersten Blick versucht fühlen könnte; er weist vielmehr nach, daß man derselben noch ein Glied von bestimmter Form hinzufügen müsse; nichtsdestoweniger läßt auch bei dieser Modifikation die Formel im Stich, wenn es sich um diamagnetische Körper handelt, für welche sich ein negatives Potential ergeben würde; infolgedessen hält er die Hypothese Faradays für wahrscheinlicher, nach welcher der ganze Raum sowohl,

wie jeder in demselben eingelagerte Körper magnetisch polarisiert ist, und nach welcher die diamagnetische Induktion eine nur scheinbar diamagnetische ist.

Über die magnetische Induktion veröffentlichte Beltrami eine Abhandlung 1884, der 1891 eine andere vollständigere: *Considerazioni sulla teoria matematica del magnetismo* folgte. Wie bekannt wurde die von Coulomb begründete Theorie der *magnetischen Induktion* von Poisson ausgeführt, dieser machte indessen gewisse besondere Hypothesen über die Form und Verteilung der sogenannten Elementarmagnete, durch welche wahrscheinlich die Nichtübereinstimmung der Poissonschen Theorie mit der Erfahrung veranlaßt worden ist. Der Zweck Beltramis war die Begründung einer Theorie, die, frei von jenen Hypothesen, die Form und Verteilung der Elementarmagnete von vornherein völlig willkürlich läßt. Unter anderen Resultaten fand er, daß in jedem Falle eine Funktion existiert, welche in Bezug auf das Problem der magnetischen Induktion dieselbe Rolle spielt und denselben Charakter hat, wie die Greensche Funktion in der Elektrostatik, und welche im Falle eines isotropen Körpers mit der „charakteristischen Funktion" F. Neumanns übereinstimmt; diese Funktion liefert, wie die Greensche, den Ausdruck jeder Potentialfunktion in der Form eines Oberflächenintegrales.

In der folgenden Arbeit gibt Beltrami seiner noch weiter befestigten Überzeugung Ausdruck, daß man den Poissonschen Begriff der Elementarmagnete zu eliminieren habe, und stellt sich die Aufgabe die Theorie auf den bereits von Thomson und Maxwell eingeführten Begriff der magnetischen Polarität zu gründen.

Das Princip, daß jeder magnetischen Verteilung eine Verteilung konstanter, geschlossener und mit gleichen Wirkungen nach außen begabter Ströme entspricht, war zuerst auf Grund des berühmten Ampèreschen Satzes als ein notwendiges Postulat erachtet worden. Erst später traten Zweifel hierüber auf; Beltrami suchte die Frage in der Arbeit: *Sull' equivalenza delle distribuzioni magnetiche e galvaniche* (1883) vollständig zu lösen, und er kam auf dieselbe auch in seinen *Considerazioni sulla teoria matematica dell' elettromagnetismo* (1892) zurück. In dieser Arbeit, gibt er eine systematisch geordnete Darstellung einer Theorie des Elektromagnetismus vom Standpunkte der Maxwellschen Theorie, die sich gegenüber der von Maxwell selbst gegebenen Darstellung durch Klarheit der Exposition unterscheiden dürfte.

VII. Elastizität.

Ein Gebiet der mathematischen Physik, in welchem Beltrami außerordentlich bemerkenswerte Resultate erhielt, ist die Theorie der Elastizität;

er war durch seine früheren Untersuchungen über die Mechanik der Flüssigkeiten hierfür ganz besonders vorbereitet, und er konnte hier oft auf Formeln und Methoden zurückgreifen, die er in jenen Untersuchungen bereits gefunden hatte.

Wir werden, um in einer gewissen Ordnung vorzugehen, die Arbeiten über die Elastizität in drei Gruppen scheiden: die erste bezieht sich im besonderen auf die allgemeinen Gleichungen und das Potential in der Elastizitätstheorie, zur zweiten werden wir die drei auf die berühmten Maxwellschen Formeln bezüglichen Abhandlungen rechnen und zu der dritten diejenigen, welche sich mit dem von Kirchhoff dem Huyghensschen Princip gegebenen analytischen Ausdruck beschäftigen.

Die erste Abhandlung über Elastizität ist aus dem Jahre 1881: *Sulle equazioni generali dell' elasticità.* Wie bekannt, war Lamé der erste, welcher die allgemeinen Gleichungen der Elastizität in krummlinige, orthogonale Koordinaten transformiert hat; hierauf beschäftigten sich C. Neumann und Borchardt unter Anwendung verschiedener Methoden mit demselben Gegenstande und stießen bereits im Falle der Isotropie auf nicht leicht zu überwindende Schwierigkeiten. Beltrami fand, als er begann, die abzuleitenden Gleichungen direkt aufzustellen, das unerwartete Resultat, daß zwar die allgemeinen Gleichungen von dem Euklidischen Postulat unabhängig sind, daß dagegen die Gleichungen für isotrope Mittel, die sogenannten Gleichungen der Isotropie, von jenem Postulate abhängen, d. h. wesentlich voraussetzen, daß man es mit einem Raume von dem Krümmungsmaße Null zu tun hat. Er erkannte so die wahre Ursache der verschiedenartigen von seinen Vorgängern bei der Ableitung derselben aus den allgemeinen Gleichungen angetroffenen Schwierigkeiten. Hierbei verwandte er eine Form des Linienelementes für den Raum, welche infolge der Unbestimmtheit ihrer Koeffizienten nicht *a priori* die Euklidische Hypothese enthielt.

Hierdurch wurde er naturgemäß auf die Begründung der Theorie der elastischen Isotropie in einem Raume konstanter Krümmung geführt, und es ergab sich für ihn so die Möglichkeit, von dem Standpunkte der mathematischen Physik aus auf seine dreizehn Jahre früheren Untersuchungen zurückzukommen; er fand in diesen Räumen eine von Drehungen und Dilatationen freie Deformation, bei welcher Kraft und Verrückung in jedem Punkte dieselbe (oder entgegengesetzte) Richtung haben und fortdauernd einander proportional sind, ein dadurch besonders bemerkenswertes Resultat, weil es, wie er hervorhebt, eine merkwürdige Analogie zu den Ideen Maxwells über die Wirkungsweise der Dielectrica darbietet.

Zum Nachweis der Wichtigkeit, welche bei der Lösung vieler Probleme

der Elastizitätstheorie die Betrachtung des sogenannten elastischen Potentials haben muß, dient die Abhandlung 1885: *Sulle condizioni di resistenza dei corpi elastici.* Um die Widerstandsfähigkeit eines elastischen Körpers zu beurteilen, war im allgemeinen von den mathematischen Physikern (auch von Clebsch) das Princip adoptiert worden, nach der zulässigen Maximalspannung zu fragen; die bald darauf von De Saint-Venant vorgeschlagene Methode gründete sich demgegenüber auf die maximale Dilatation. Beltrami bemerkte, daß weder das eine noch das andere Princip naturgemäß ist, da das wahre Maß für die der Kohäsion eines elastischen Körpers gesteckte Grenze von der Gesamtheit aller Dilatationen und aller Spannungen in der Umgebung eines jeden Punktes des Körpers abhängen muß, und da diese Spannungen und Dilatationen ihrerseits von der einen definiten, quadratischen Funktion abhängen, die man gewöhnlich als elastisches Potential bezeichnet, so folgert er, daß die Lösung des Problems besser auf das Studium dieses Potentials zurückgeführt wird; auf dieser Grundlage behandelte er dann verschiedene bereits von De Saint-Venant untersuchte Fälle, wobei sich seine Lösungen nur teilweise mit den Lösungen dieses Forschers decken.

Es war bereits bekannt, daß es sechs partielle Differentialgleichungen 2. O. gibt, denen die sechs Komponenten einer beliebigen Deformation genügen müssen; auf diese Gleichungen kam Beltrami mehrmals zurück, bewies im besonderen das Fundamentaltheorem, daß diese Bedingungen nicht bloß notwendig, sondern auch hinreichend sind, und fand verschiedene sehr einfache Methoden zur Ableitung derselben; dies tat er zuerst beiläufig in der Abhandlung: *Sull' interpretazione meccanica delle formole di Maxwell,* über die wir bald sprechen werden, dann in dem zweiten Teile seiner *Note fisico-matematiche,* und ferner in einem in den *Comptes-rendus* der französischen Akademie veröffentlichten Briefe an *Maurice Lévy.*

Über die Wellentheorie veröffentlichte Beltrami zwei Arbeiten, eine 1886 und die zweite 1891. Die erste sucht die Ideen F. Neumanns zu erläutern, der schon vor langer Zeit die Fresnelschen Gesetze aus den Grundgleichungen der Elastizitätstheorie abgeleitet hatte; die zweite hat den Zweck, die ganze Theorie, frei von der Hypothese, die Schwingungen a priori als geradlinig vorauszusetzen, zu entwickeln (an der Kirchhoff in seiner Behandlung der Lichttheorie festgehalten hatte).

Schließlich stellte Beltrami sich in den beiden Noten 1891: *Intorno al mezzo elastico di Green* die Aufgabe, zu untersuchen, ob es außer den isotropen Mitteln noch andere elastische Mittel gibt, für welche sich die drei Gleichungen der schwingenden Bewegung auf eine einzige reduzieren, wenn man die Komponenten der Verrückung als die drei ersten partiellen Ableitungen ein und derselben Funktion darstellt. Er gelangt zu einer

Form des elastischen Potentials, welche mit derjenigen übereinstimmt, von Green für das allgemeinste elastische Mittel angegeben worden in dem sich ebene, longitudinale Wellen fortpflanzen können. Er so zu dem Studium dieses Greenschen elastischen Mittels mit se verschiedenen besonderen Eigenschaften über, findet, daß die drei Ha druckaxen den Richtungen der Axen eines gewissen Kegels 2. O. sprechen, und beweist, daß das Greensche Medium das allgemei elastische Mittel ist, bei welchem im Falle einer Deformation, bei lineare Ausdehnung nur in einer Richtung statt hat, stets eine der sprechenden Hauptdruckaxen mit dieser Richtung zusammenfällt. —

Allgemein bekannt ist die geniale Untersuchung Maxwells, we darauf hinzielt, zu beweisen, daß die gewöhnlich auf Fernwirkung zur geführten Anziehungskräfte einer Massenverteilung durch Kräfte erset seien, welche durch Drucke und Spannungen hervorgebracht werden, an denen, welche im Innern eines elastischen Körpers herrschen. Die Wicl keit des Resultates liegt darin, dass durch dasselbe die wiederholt Physikern, vor allem von Faraday und W. Thomson ausgesprocl Annahme der Existenz eines die elektrischen und magnetischen Wirkur fortpflanzenden Zwischenmediums große Wahrscheinlichkeit gewinnt. D Untersuchung übte auf Beltrami einen besonderen Reiz aus; kaum w die Maxwellschen Formeln veröffentlicht, so entwickelte er auch sc (1884) eine einfache, auf alle Fälle in gleicher Weise anwendbare Meth mit Hilfe deren man direkt zu jenen Formeln gelangen kann *(Sulla presentazione delle forze newtoniane per mezzo di forze elastiche)*. Ein w später kam er auf dieselben Formeln zurück, um den Grad ihrer gemeinheit d. h. ihre Abhängigkeit von der Natur des Raumes zu ur suchen, und es gelang ihm, von einem beliebigen schiefwinkligen, krur linigen Koordinatensystem aus zu ihnen zu gelangen, wobei die N des Raumes in der Tat ganz unbestimmt gelassen wurde. (*Sull' uso coordinate curvilinee nella teoria del potenziale e dell' elasticità*, 1885.)

In dem folgenden Jahre nahm er diese Untersuchungen von ne auf, um aus denselben ein Resultat von großer Bedeutung abzule *(Sull' interpretazione meccanica delle formole di Maxwell)*. Er fr sich: Existiert eine mechanische Interpretation dieser Formeln, d existiert bei Annahme der Existenz eines elastischen Mediums tats lich eine Deformation desselben, fähig jene Drucke zu erzeugen, d Komponenten den Maxwellschen Formeln entsprechen? Und er zu dem Resultat, daß unter Annahme dieses Mediums als eines tropen und homogenen Mittels, selbst unter der Voraussetzung, daß Konstanten der Isotropie Funktionen des Ortes sind, *keine* Deforma möglich ist, deren Druckkomponenten jenen Formeln entsprechen (w

man nicht den sehr speziellen Fall in Betracht ziehen will, daß die Potentialfunktion in Bezug auf die Koordinaten linear ist, was übrigens nicht zulässig ist, wenn man den Raum sich ins Unendliche erstrecken läßt).

Man wird somit, wenn man eine mechanische Interpretation der Maxwellschen Formeln finden will, ein isotropes Medium mit besonderen Eigenschaften fingieren müssen; außerdem ergibt sich, wenn man sich der bereits von Green gemachten Spaltung des elastischen Potentials in zwei Teile erinnert, die zwei ihrer Natur nach gänzlich verschiedenen elastischen Medien entsprechen, daß wir die Realität eines elastischen Mediums der zweiten Art, in dem sich nur transversale Wellen fortpflanzen, nicht begreifen können, weil unter anderem in einem solchen Medium die Bedingungen für ein stabiles Gleichgewicht nicht verifizierbar sind.

Das Resultat ist, wie man sieht, negativ, es erhält aber, ohne der Bedeutung der Maxwellschen Formeln Abbruch zu tun, dadurch eine große Wichtigkeit, weil es uns erkennen läßt, daß wir noch weit von dem Ziele einer mechanischen Interpretation der Maxwellschen Formeln sind, und daß vielleicht zur Erreichung dieses Zieles unsere bisherigen Vorstellungen nicht genügen.

So sollte Beltrami, der in seiner Jugend wesentlich zur Entwickelung der Ideen über die geometrische Konstitution des Raumes beigetragen hatte, in späterer Zeit einen nicht weniger bemerkenswerten Beitrag zur Theorie seiner physikalischen Konstitution liefern.

Eine letzte Gruppe von Arbeiten über die Theorie der Elastizität betrifft den analytischen Ausdruck des Huyghensschen Principes.

Kirchhoff hatte durch Ausdehnung einer bereits von Helmholtz gemachten Anwendung des Greenschen Satzes einmal die Poissonsche Formel und dann eine viel allgemeinere Formel erhalten, welche der Untersuchung der optischen Phänomene als Grundlage dienen kann und den analytischen Ausdruck des Huyghensschen Princips für isotrope Mittel liefert.

Die Methode Kirchhoffs hatte indessen zu einigen Einwänden Veranlassung gegeben, so daß andere Forscher glaubten, neue Methoden zur Ableitung dieser wichtigen Formel heranziehen zu müssen; Beltrami hingegen betrachtete die Kirchhoffsche Methode als die nächstliegende für eine derartige Untersuchung; er nahm dieselbe wieder auf und suchte dieselbe frei von jenen Schwierigkeiten darzustellen (*Sul principio di Huyghens* 1889); in der Tat wurde seine Modifikation sogleich in den Lehrbüchern angenommen, z. B. in Duhems Lehrbuch der Hydrodynamik, Elektrizität und Akustik.

Mit demselben Gegenstande beschäftigte Beltrami sich später in drei aufeinanderfolgenden Arbeiten, in denen er seine Beweismethode vervoll-

kommnete und vereinfachte, bis er in der letzten derselben (*Sul teorema di Kirchhoff*, 1895) unter Bezugnahme auf die inzwischen erschienene Arbeit von Gutzmer über denselben Gegenstand (*Crelles J.* Bd. 114, 1894) zeigte, daß jenes Theorem sich auf eine bloße, einfache analytische Identität gründet, der jede Funktion der drei rechtwinkligen Koordinaten und des Abstandes eines Punktes von einem festen Punkte genügen muß.

VIII. Wärmetheorie.

Über diese Theorie veröffentlichte Beltrami zwei Arbeiten; eine dritte wurde von ihm der Akademie zu Bologna vorgelegt, aber später von ihm selbst zurückgezogen.

Bei einigen einfachen Problemen der Wärmeleitung erscheint es für eine größere Anschaulichkeit und Eleganz der Lösungen zweckmäßiger, die auf Fourier zurückgehende, auf die Betrachtung der sogenannten partikulären Lösungen und die Reihenentwickelungen nach denselben begründete Methode zu verlassen und an Stelle derselben andere Verfahren zu Hilfe zu nehmen; ein solches wurde 1868 von Betti angegeben und stützt sich auf die Anwendung von Funktionen, die den gewöhnlichen Potentialfunktionen einigermaßen analog sind.

Unter Anwendung dieser Methode betrachtete er in der Abhandlung: *Intorno ad alcuni problemi di propagazione del calore* (1887) den Fall einer Kugel, in welcher die Temperatur Funktion des Zentralabstandes ist.

Insbesondere wird das Problem der Bestimmung der im Innern der Kugel variabeln Temperatur, wenn die Temperatur an der Oberfläche als eine gegebene Funktion der Zeit bekannt ist, auf die Lösung einer Funktionalgleichung zurückgeführt, in der die unbekannte Funktion teils in einem bestimmten Integral, teils explizite vorkommt, und diese Lösung erhält er in ganz außerordentlich eleganter Weise.

In der Note: *Sui potenziali termodinamici* (1895) erinnert er zunächst an den Begriff des thermodynamischen Potentials, dessen Ableitungen nach den geometrischen Parametern des Systems die von demselben System ausgehenden mechanischen Kräfte ergeben; er erinnert ferner daran, daß dieses Potential von einem Parameter u abhängt, den man bei der Differentiation als konstant ansehen muß, was der Annahme gleichkommt, daß die als Potential definierte Funktion den Charakter eines solchen nur für diejenigen umkehrbaren, thermodynamischen Prozesse besitzt, bei denen u constant ist, und er fragt sich, ob umgekehrt jedem Prozesse $u = \text{const.}$ auch immer ein Potential entspricht.

Er beweist, daß die ein Potential zulassenden thermodynamischen Prozesse nur die sind, bei welchen u als eine Funktion der absoluten

Temperatur und der Entropie betrachtet werden kann. Beltrami untersucht hierauf insbesondere den bekannten Fall der isothermen Prozesse, für welche ja das Theorem richtig ist, aber für welche die von ihm gegebene Lösung nicht unmittelbar verwendet werden kann, weil die von ihm zu ihrer Ableitung benützte Methode den Parameter u und die Temperatur als von einander unabhängig voraussetzt, bei der Betrachtung isothermer Prozesse aber u lediglich Funktion der Temperatur ist.

IX. Akustik.

Die einzige Arbeit, die Beltrami über die mathematische Theorie der Musik hinterlassen hat, ist aus dem Jahre 1882: *Sulla scala diatonica:* indem er mit 1 den Grundton bezeichnet, mit r, s die Intervalle zwischen diesen und den beiden anderen Noten des vollkommenen Akkordes und mit $\frac{1}{2}$ das Intervall der Oktave, findet er, daß die den Werten r, s von der Erfahrung in Wirklichkeit zugelegten Werte: $r = \frac{4}{5}$, $s = \frac{2}{3}$ die einfachsten *rationalen* Zahlen sind, welche gewissen zwei fundamentalen Ungleichungen genügen.

Vielseitigkeit, sorgsame Detailarbeit, ein nie sich verleugnendes Streben, die schwierigsten Gegenstände in ihrer natürlichsten und einfachsten Gestalt darzustellen, ein geduldiges, unermüdliches Studium bei der oft mehrmaligen Umarbeitung derselben Dinge zur Erreichung des ihm vorschwebenden Zieles, ein Verlangen nach Vollkommenheit, das ihn nie verließ, so daß er selbst manche von ihm bereits angekündigte Abhandlung wieder zurückzog, das sind die Hauptmerkmale des wissenschaftlichen Lebenswerkes Eugenio Beltramis.

Nach dem Inhalt geordnetes Verzeichnis der wissenschaftlichen Arbeiten Eugenio Beltramis*).

I. Analytische Geometrie.

a) Rationale Kurven. Steinersche Fläche.

1. Annotazioni sulla teoria delle cubiche gobbe. Due Note. (Rend. Ist. Lomb., serie II, vol. I, 1868).

---

*) Ein nach der Zeit geordneter Katalog der Beltramischen Schriften wurde in dem Rendiconto dell' Acc. di Napoli, 1900, von Professor Pinto veröffentlicht; ein anderer vollständigerer befindet sich an dem Ende des Nekrologs, den Professor

2. Alcune formole per la teoria elementare delle coniche. (Giorn. di Battaglini, vol. IX, 1871).
3. Communicazione di una lettera del prof. Cremona. (Giorn. di Batt., vol. X, 1872).
4. Ricerche di geometria analitica. (Mem. Acc. di Bologna, serie III, vol. X, 1879).

b) Flächen 3. O.

5. Sull'equazione pentaedrale delle superficie di terz' ordine. (Rend. Ist. Lomb., serie II, vol. XII, 1879).

c) Theoreme von Feuerbach, Simpson und Steiner. Cayleysche Fläche.

6. Sulle coniche di nove punti. (Giorn. di Batt., vol. I, 1863).
7. Estensione allo spazio di tre dimensioni dei teoremi relativi alle coniche di nove punti. (Giorn. di Batt., vol. I, 1863).
8. Théorème proposé à démontrer (Nouv. Ann., t. II, pag. 336, 1863).
9. Intorno alle coniche di nove punti e ad alcune questioni che ne dipendono. (Mem. dell'Acc. di Bologna, serie II, vol. II, 1863).
10. Extrait d'une lettre a J. A. Grunert. (Archiv d. Math. u. Phys. Band XLIII, 1865, S. 481).
11. Intorno ad alcuni teoremi di Feuerbach e di Steiner. (Mem. Acc. di Bologna, serie III, vol. V, 1875).
12. Considerazioni analitiche sopra una proposizione di Steiner. (Mem. Acc. di Bologna, serie III, vol. VII, 1877).

d) Binäre kubische Formen.

13. Ricerche sulla geometria delle forme binarie cubiche. (Mem. Acc. di Bologna, serie II, vol. IX, 1870).

e) Verschiedene Übungsarbeiten.

14. Soluzione di un problema relativo alle superficie di second'ordine. (Giorn. di Batt., vol. I, 1863).
15. Démonstration d'un théorème de M. Salmon. (Nouv. Ann., t. II, pag. 181, 1863).
16. Démonstration d'un théorème de M. Mannheim. (Nouv. Ann., t. II, pag. 209, 1863).
17. Solution de la question: Soient donnés une surface de second degré, la sphère exceptée, et un point fixe, lieu du spectateur, sous quel angle verra-t-il la surface? (Nouv. Ann., t. II, pag. 355, 1863).
18. Démonstration d'un théorème de M. W. Roberts. (Nouv. Ann., t. IV, pag. 233, 1865).
19. Di alcune proprietà generali delle curve algebriche. (Giorn. di Batt., vol. IV, 1866).
20. Sulla minima distanza di due rette. (Giorn. di Batt., vol. V, 1867).

Cremona in der Academia dei Lincei am 10. Juni 1900 Beltrami widmete; ein dritter Katalog, nach Zeitschriften geordnet, wurde von Professor Dini in den Annali di Matematica, 1900, publiziert. [Eine Liste sonst gegebener Nachrufe veröffentlicht G. Enestrŏm in seiner Bibliographie der 1881—1900 verstorbenen Mathematiker in der Bibliotheca mathematica (3), 2, (1901), p. 328. — Ebenda, p. 392—440, ein ausführlicher Artikel von G. Loria: Eugenio Beltrami e le sue opere matematiche. — Inzwischen ist auch der erste Band der gesammelten Werke erschienen: Opere matematiche di E. Beltrami, Milano 1902. D. R.]

II. Infinitesimalgeometrie.

a) Allgemeine Flächentheorie. Krümmung und Deformation der Flächen. Flächen, deren Krümmungshalbmesser an eine Relation gebunden sind. Aufeinander abwickelbare Flächen. Differentialparameter von Flächen. Dreifache Orthogonalsysteme von Flächen. Geodätische Linien einer Fläche.

21. Di alcune formole relative alla curvatura delle superficie. (Ann. di mat., serie I, vol. IV, 1862).
22. Ricerche di analisi applicata alla geometria. (Giorn. di Batt., vol. II e III, 1864-65).
23. Intorno ad alcune proprietà delle superficie di rivoluzione. (Ann. di mat., serie I, vol. VI, 1864).
24. Extrait d'une lettre a J. A. Grunert. (Arch. d. Math. u. Phys. Band XLII, 1864, S. 117).
25. Risoluzione d'un problema relativo alle superficie gobbe. (Ann. di mat., serie I, vol. VII, 1865).
26. Delle variabili complesse sopra una superficie qualunque. (Ann. di mat., serie II, vol. I, 1867).
27. Sulla teoria delle linee geodetiche. (Rend. Ist. Lomb., serie II, vol. I, 1868).
28. Sulla teoria generale delle superficie. (Ateneo Veneto, serie II, vol. V, 1868).
29. Intorno ad un nuovo elemento introdotto dal sig. Christoffel nella teoria delle superficie. (Rend. Ist. Lomb., serie II, vol. II, 1869).
30. Zur Theorie des Krümmungsmaßes. (Math. Annalen, Bd. I, 1869).
31. Di un sistema di formole per lo studio delle linee e delle superficie ortogonali. (Rend. Ist. Lomb., serie II, vol. V, 1872).

b) Haupttangentenkurven auf den Flächen.

32. Sur la courbure de quelques lignes tracées sur une surface. (Nouv. Ann., t. IV, pag. 258, 1865).
33. Dimostrazione di due formole del sig. Bonnet. (Giorn. di Batt., vol. IV, 1866).

c) Regelflächen und ihre Biegung.

34. Sulla flessione delle superficie rigate. (Ann. di mat., serie I, vol. VII, 1865).
35. Intorno alla flessione delle superficie rigate. (Ateneo Veneto, serie II, vol. II, 1865).

d) Minimalflächen.

36. Sulle proprietà generali delle superficie di area minima. (Mem. Acc. di Bologna. serie II, vol. VII, 1868).

e) Flächen konstanter Krümmung. Pseudosphärische Geometrie. Räume konstanter Krümmung und geodätische Linien in diesen Räumen.

37. Risoluzione del problema: „Riportare i punti di una superficie sopra un piano in modo, che le linee geodetiche vengano rappresentate da linee rette". (Ann. di mat, serie I, vol. VII, 1866).

38. Saggio di interpretazione della geometria non-euclidea. (Giorn. di Batt., vol. VI, 1868).
39. Teoria fondamentale degli spazi di curvatura costante. (Ann. di mat., serie II, vol. II, 1868).
40. Sulla teoria analitica della distanza. (Rend. Ist. Lomb., serie II, vol. V, 1872).
41. Sulla superficie di rotazione che serve di tipo alle superficie pseudosferiche. (Giorn. di Batt., vol. X, 1872).
42. Teorema di geometria pseudosferica. (Giorn. di Batt., vol. X, 1872).
43. Osservazione sulla nota del prof. Schlaefli alla memoria del prof. Beltrami „Sugli spazi di curvatura costante". (Ann. di mat., serie II, vol. V, 1872).
44. Un precursore italiano di Legendre e di Lobatschewsky. (Rend. Acc. dei Lincei, serie IV, vol. V, 1889).

f) Infinitesimalgeometrie der Kurven.

45 Intorno ad alcuni sistemi di curve piane. (Ann. di mat., serie I, vol. IV, 1862).
46. Sulla teoria delle sviluppoidi e delle sviluppanti. (Ann. di mat., serie I, vol. IV, 1862).
47. Di una proprietà delle linee a doppia curvatura. (Giorn. di Batt., vol. V, 1867).

III. Reine Analysis.

a) Differentialparameter. Quadratische Differentialformen.

48. Intorno ad una trasformazione di variabili. (Giorn. di Batt., vol. V, 1867).
49. Sulla teoria generale dei parametri differenziali. (Mem. Acc. di Bologna, serie II, vol. VIII, 1869).

b) Formeln der Integralrechnung. Trigonometrische Reihen. Cylinderfunktionen.

50. Extrait d'une lettre au sujet d'une question proposée dans la Revue américaine Mathematical Monthly. (Nouv. Ann., serie II, t. I, pag. 315, 1862).
51. Extrait d'une lettre au sujet d'un théorème de M. Laurent. (Nouv. Ann., serie II, t. I, pag. 449, 1862).
52. Démonstration d'un théorème de M. Valton. (Nouv. Ann., serie II, t. II, pag. 302, 1863).
53. Intorno ad un teorema di Abel e ad alcune sue applicazioni. (Rend. Ist. Lomb., serie II, vol. XIII, 1880).
54. Intorno ad alcune serie trigonometriche. (Rend. Ist. Lomb., serie II, vol. XIII, 1880).
55. Sulle funzioni cilindriche. (Atti Accad. di Torino, vol. XVI, 1881).

c) Kugelfunktionen.

56. Intorno ad una formola integrale. (Rend. Ist. Lomb., serie II, vol. XII, 1879).
57. Sulle funzioni sferiche di una variabile. (Rend. Ist. Lomb., serie II, vol. XX, 1887).
58. Quelques remarques au sujet des fonctions sphériques. (Compt. rend. de l'Acad. de Paris, vol. CX, 1890).
59. Sur la théorie des fonctions sphériques. (Compt. rend. de l'Acad. de Paris, vol. CXVI, 1893).
60. Sulla teoria delle funzioni sferiche. (Rend. Ist. Lomb., serie II, vol. XXIX, 1896).

d) Theorie der Gleichungen.

61. Sulle equazioni algebriche. (Giorn. di Batt., vol. I, 1863).
62. Sur une question de M. Roberts. (Nouv. Ann., t. III, pag. 64, 1864).

e) Rilineare Formen.

63. Sulle funzioni bilineari. (Giorn. di Batt., vol. XI, 1873).

IV. Mechanik der Flüssigkeiten.

64. Ricerche sulla cinematica dei fluidi. (Mem. Acc. di Bologna, serie III, vol. I, II, III e V, 1871-72-74).
65. Memoria intorno al moto piano di un disco ellittico in un fluido incompressibile. (Rend. Acc. di Bologna, 1875-76)*).
66. Intorno ad un caso di moto a due coordinate. (Rend. Ist. Lomb., serie II, vol. X, 1878).
67. Considerazioni idrodinamiche. (Rend. Ist. Lomb., serie II, vol. XXII, 1889).

V. Mechanik im Allgemeinen.

68. Lettera ad A. Mogni. (Giorn. di Batt. vol. V, 1867).
69. Del moto geometrico di un solido che ruzzola sopra un altro solido. (Giorn. di Batt., vol. X, 1872).
70. Osservazione ad una nota del prof. Chelini sopra i sistemi materiali di egual momento d'inerzia. Giorn. di Batt., vol. XII, 1874).
71. Intorno alla dinamica degli spazi di curvatura costante. (Trans. Acc. dei Lincei, serie II, vol. III, 1876)**).
72. Formules fondamentales de cinématique dans les espaces de courbure constante. (Bullet. de Darboux, t. XI, 1876).
73. Sulla teoria degli assi di rotazione. (Collect. mathem. in mem. D. Chelini, Mediolani, 1881).
74. Sull'equilibrio delle superficie flessibili ed inestendibili. (Mem. Acc. di Bologna, serie IV, vol. III, 1882).
75. Sulle equazioni dinamiche di Lagrange. (Rend. Ist. Lomb., serie II, vol. XXVIII, 1895).

VI. Potential. Anziehung. Elektrizität. Magnetismus. Elektromagnetismus.

a) Analytische Theorie der Potentialfunktion und des Potentials. Newtonsche Anziehung.

76. Intorno ad una trasformazione di Dirichlet. (Giorn. di Batt., vol. X, 1872).
77. Sul potenziale mutuo di due sistemi rigidi ed in particolare sul potenziale elementare elettro-dinamico. (Ann. di mat., serie II, vol. VI, 1873).
78. Considerazioni sopra una legge potenziale. (Rend. Ist. Lomb., serie II, vol. IX, 1876).

---

*) In den „Rendiconti" nur angemeldet, aber nicht mehr veröffentlicht.
**) In den „Transunti" nur angemeldet, aber nicht mehr veröffentlicht.

79. Intorno ad alcune proposizioni di Clausius nella teoria del potenziale. (Rend. Ist. Lomb., serie II, vol. XI, 1878).
80. Sulle funzioni potenziali di sistemi simmetrici intorno ad un asse. (Rend. Ist. Lomb., serie II, vol. XI, 1878).
81. Intorno ad alcuni punti della teoria del potenziale. (Mem. Acc. di Bologna, serie III, vol. IX, 1878).
82. Sull'attrazione di un anello circolare od ellittico. (Mem. Acc. dei Lincei, serie III, vol. V, 1880).
83. Sulla teoria dell'attrazione degli ellissoidi. (Mem. Acc. di Bologna, serie IV, vol. I, 1880).
84. Intorno ad alcuni nuovi teoremi del signor C. Neumann sulle funzioni potenziali. (Ann. di mat., serie II, vol. X, 1880).
85. Sulla teoria delle funzioni potenziali simmetriche. (Mem. Acc. di Bologna, serie IV, vol. II, 1881).
86. Sulla teoria del potenziale. (Rend. Ist. Lomb., serie II, vol. XVI, 1883).
87. Sulle funzioni associate e specialmente su quelle della calotta sferica. (Mem. Acc. di Bologna, serie IV, vol. IV, 1883).
88. Sulle funzioni complesse. (Nota I). (Rend. Ist. Lomb., serie II, vol. XX, 1887).
89. Sulla funzione potenziale della circonferenza. (Rend. Circ. mat. di Palermo, vol. III, 1889).
90. Sulle funzioni complesse (Nota II). (Rend. Ist. Lomb., serie II, vol. XXIV, 1891).
91. Sulle funzioni complesse (Nota III). (Rend. Ist. Lomb., serie II, vol. XXVII, 1894).
92. A proposito d' una nuova ricerca del prof. C. Neumann. (Rend. Acc. dei Lincei, serie V, vol. IV, 2° semestre 1895).

b) Elektrostatik. Elektrodynamik.

93. Nota sulla teoria matematica dei solenoidi elettrodinamici. (Nuovo Cim., serie II, vol. VII-VIII, 1872).
94. Sulla determinazione sperimentale della densità elettrica alla superficie dei corpi conduttori. (Mem. Acc. dei Lincei, serie III, vol. I, 1877).
95. Intorno ad alcune questioni di elettrostatica. (Rend. Ist. Lomb., serie II, vol. X, 1877).
96. Sulla teoria dei sistemi di conduttori elettrizzati. (Rend. Ist. Lomb., serie II, vol. XV, 1882).
97. Sur les couches de niveau électromagnétiques. (Acta Math., vol. III, 1883).
98. Intorno ad un problema relativo alla teoria delle correnti stazionarie. (Rend. Ist. Lomb., serie II, vol. XVII, 1884).
99. Sull' estensione del principio di d'Alembert all'elettrodinamica. (Rend. Acc. dei Lincei, serie IV, vol. V, 1889).

c) Magnetismus. Elektromagnetismus.

100. Sul potenziale magnetico. (Ann. di mat., serie II, vol. X, 1882).
101. Sulla teoria degli strati magnetici. (Rend. Ist. Lomb., serie II, vol. XVI, 1883).
102. Sull'equivalenza delle distribuzioni magnetiche e galvaniche. (Rend. Ist. Lomb., serie II, vol. XVI, 1883).
103. Sulla teoria dell'induzione magnetica secondo Poisson. (Mem. Acc. di Bologna, serie IV, vol. V, 1884).

104. Note fisico-matematiche (1ª parte). (Rend. Circ. mat. di Palermo, vol. III, 1889)*).
105. Considerazioni sulla teoria matematica del magnetismo. (Mem. Acc. di Bologna, serie V, vol. I, 1891).
106. Considerazioni sulla teoria matematica dell'elettromagnetismo. (Mem. Acc. di Bologna, serie V, vol. II, 1892).

VII. Elastizität.

a) Allgemeine Gleichungen. Elastisches Potential.

107. Sulle equazioni generali dell'elasticità. (Ann. di mat., serie II, vol. X, 1881).
108. Sulle condizioni di resistenza dei corpi elastici. (Rend. Ist. Lomb., serie II, vol. XVIII, 1885).
109. Sulla teoria delle onde. (Rend. Ist. Lomb., serie II, vol. XIX, 1886).
110. Note fisico-matematiche (2ª parte). (Rend. Circ. mat. di Palermo, vol. III, 1889)**).
111. Sur la théorie de la déformation infiniment petite d'un milieu. (Comptes rendus de l'Acad. de Paris, vol. CVIII, 1889).
112. Intorno al mezzo elastico di Green. Due Note. (Rend. Ist. Lomb., serie II, vol. XXIV, 1891).
113. Sulla teoria generale delle onde piane. (Rend. Circ. matem. die Palermo, vol. V, 1891).
114. Osservazioni su di una nota del prof. Morera. (Rend. Acc. di Lincei, serie V, vol. I, 1892).

b) Maxwellsche Formeln.

115. Sulla rappresentazione delle forze newtoniane per mezzo di forze elastiche. (Rend. Ist. Lomb., serie II, vol. XVII, 1884).
116. Sull'uso delle coordinate curvilinee nelle teorie del potenziale e dell'elasticità. (Mem. Acc. di Bologna, serie IV, vol. VI, 1885).
117. Sull'interpretazione meccanica delle formole di Maxwell. (Mem. Acc. di Bologna, serie IV, vol. VII, 1886).

c) Kirchhoffsche Formel.

118. Sul principio di Huygens. (Rend. Ist. Lomb., serie II, vol. XXII, 1889).
119. Sull'espressione analitica del principio di Huygens. (Rend. Acc. dei Lincei, serie V, vol. I, 1892).
120. Sull'espressione data da Kirchhoff al principio di Huygens. (Rend. Acc. dei Lincei, serie V, vol. IV, 2° sem. 1895).
121. Sul teorema di Kirchhoff. (Rend. Acc. dei Lincei, serie V, vol. IV, 2° sem. 1895).

VIII. Wärme.

122. Intorno ad alcuni problemi di propagazione del calore. (Mem. Acc. di Bologna, serie IV, vol. VIII, 1887).
123. Note sulla teoria della propagazione del calore. (Rend. Acc. di Bologna, 1892-93)***).
124. Sui potenziali termodinamici. (Rend. Acc. dei Lincei, serie V, vol. IV, 1° sem. 1895).

---

*) Behandelt zwei verschiedene Themata, nur der erste Teil bezieht sich auf den oben angegebenen Gegenstand.

**) Der zweite Teil dieser Schrift handelt von der Elastizitätstheorie.

***) Wurde in den Rendiconti nur angezeigt, aber nicht mehr publiziert.

IX. Akustik.

125. Sulla scala diatonica. (Rend. Ist. Lomb., serie II, vol. XV, 1882).

X. Literaturnachweise. Berichte. Übersetzungen.

126. Traduzione della memoria di Gauss, pubblicata nel 1825 nelle Astronomischen Abhandlungen edite ad Altona da Schumacher: Soluzione generale del problema: rappresentare le parti di una superficie data sopra un'altra superficie parimenti data in modo che la rappresentazione riesca nelle sue parti infinitesime una figura simile alla figura rappresentata. (Ann. di mat., serie I, vol. IV, 1862).
127. Cenno bibliografico sulla "Teoria dei sistemi di coordinate semplici e sulla discussione dell'equazione generale di 2° grado in coordinate triangolari e tetraedriche„ di Chelini. (Giorn. di Batt., vol. I, pag. 319, 1863).
128. Articolo bibliografico sulla "Teorica generale delle funzioni di variabili complesse„ del prof. Casorati. (Giorn. di Batt., vol. VII, 1869).
129. Relazione sopra lo specimen d' una tavola di logaritmi (insieme con Michez). (Rend. Acc. di Bologna, 1872-73).
130. Comunicazione di una lettera di Lagrange a F. M. Zanotti. (Rend. Acc. di Bologna, 1872-73).
131. Traduzione della commemorazione di Giulio Plücker, di A. Clebsch, pubblicata nelle Memorie della Società reale di Gottinga, vol. XVI, 1872. (Giorn. di Batt., vol. XI, 1873).
132. Traduzione del lavoro di Brill, Gordan, Klein, ecc. intitolato: Alfredo Clebsch e i suoi lavori scientifici, pubblicato nel tomo VII dei Math. Annalen. (Ann. di matematica, serie II, vol. VI, 1873).
133. Relazione intorno alla memoria del sig. colonn. Pietro Conti, avente per titolo: "Sulla resistenza alla flessione della pietra serena„. (Trans. Acc. dei Lincei, serie II, vol. II, 1875).
134. Relazione sul quesito proposto dal Ministero d' agricoltura e commercio relativamente al concorso bandito con decreto 6 febb. 1876 sui due premi da conferirsi ai migliori lavori fatti in scienze fisico-matematiche e economico-morali da insegnanti di Istituti tecnici. (Transunti Lincei, serie II, vol. III, parte 1ª, 1876).
135. Relazione sul concorso al premio bandito dal Ministero della P. I. per le scienze matematiche per l'anno 1881-82. (Trans. Acc. dei Lincei, serie III, vol. VI, 1882).
136. Relazione sul concorso ai premi del Ministero della pubblica istruzione per le scienze matematiche per l'anno 1885-86. (Rend. Acc. dei Lincei, serie IV, vol. II, 1886).
137. Relazione sul concorso al premio reale per la matematica, per l'anno 1887. (Rend. Acc. dei Lincei, serie IV, vol. V, 1889).
138. Prefazione alla traduzione italiana (di A. Sella) della „Meccanica elementare" di W. Voigt, Roma 1894.

XI. Gedächtnisreden. Nekrologe. Biographien. Reden.

139. Commemorazione di Alfredo Clebsch. (Giorn. di Batt., vol. X, 1872).
140. Notizie biografiche e bibliografiche sugli antichi professori di scienze naturali e matematiche dell'università di Pavia. (Nel volume: Memorie e documenti per la storia dell'università di Pavia, parte I, Pavia, 1878).

141. Parole dette in memoria di D. Chelini. (Rend. Acc. di Bologna, 1878-79, pag. 15).
142. Della vita e delle opere di Domenico Chelini. (Collect. mathem. in mem. D. Chelini, Mediolani, 1881).
143. Enrico Betti. Commemorazione. (Rend. Circ. mat. di Palermo, vol. VI, 1892).
144. Cenno necrologico su Ernesto Padova. (Rend. Acc. dei Lincei, serie V, vol. V, 1° sem. 1896).
145. Commemorazione di F. Brioschi. (Ann. di mat., serie II, vol. XXVI, 1897).
146. Commemorazione di F. Brioschi. (Rend. dell'Adunanza solenne dei Lincei, 12 giugno 1898).
147. Parole dette all'Acc. dei Lincei annunziando la morte di Sophus Lie. (Rend. Acc. dei Lincei, serie V, vol. VIII, 1° sem. 1899).
148. Parole dette in onore di Lord. Kelwin che assisteva ad una seduta dell' Accad. dei Lincei. (Rend. Acc. dei Lincei, serie V, vol. VIII, 1° sem. 1899).

Ueber Flächen mit Scharen geschlossener geodätischer Linien.

Von

OTTO ZOLL in Göttingen.

Disposition.

Einleitung

I. Theil: Flächen mit einer Schar geschlossener geodätischer Linien:
- § 1. Uebergang zur unendlich benachbarten geodätischen Linie.
- § 2. Allgemeine Methode zur Aufstellung von Flächen mit einer Schar geschlossener geodätischer Linien.
- § 3. Ebene geodätische Linien.
- § 4. Schraubenflächen.
- § 5. Rotationsflächen.

II. Theil: Flächen mit lauter geschlossenen geodätischen Linien:
- § 6. Allgemeine Methode zur Aufstellung solcher Flächen.
- § 7. Singularitätenfreie Rotationsflächen mit lauter geschlossenen geodätischen Linien.
- § 8. Eigenschaften von Flächen mit lauter geschlossenen geodätischen Linien.

Einleitung.

Nach dem Vorgange Poincaré's sucht man in neuerer Zeit die durch Differentialgleichungen definirten Curven nicht bloss in der Umgebung eines Punktes sondern in ihrer ganzen Ausdehnung zu discutiren. Dabei haben sich als besonders interessant diejenigen Differentialgleichungen herausgestellt, welche periodische Lösungen besitzen.

Auch die Aufgabe, mit der wir uns im folgenden beschäftigen wollen und deren Behandlung ich auf Anregung von Herrn Professor Hilbert unternommen habe, nämlich Flächen mit geschlossenen geodätischen Linien zu ermitteln, führt auf gewisse Differentialgleichungen, welche periodische Lösungen besitzen müssen. In der Theorie der Mechanik eines Punktes wird eine geodätische Linie bekanntlich definirt als die Bahncurve eines Punktes, der sich ohne Einwirkung einer äusseren Kraft mit constanter Geschwindigkeit auf einer Fläche bewegt. Soll nun die geodätische Linie geschlossen sein, so muss der Punkt nach einer gewissen Zeit T wieder

an die Ausgangsstelle zurückkommen und von da ab dieselbe Bahn von neuem durchlaufen. Von der Fläche, auf der sich die geodätische Linie befinden soll, setzen wir voraus, dass sie sich wenigstens in der Umgebung der Stellen, wo die geodätische Curve verläuft, regulär verhält, so dass also auch die geodätische Linie selbst überall regulär ist. Stellt man die Gleichungen der Curve in der Parameterdarstellung auf:

$$x = \varphi(t), \quad y = \psi(t), \quad z = \chi(t)$$

indem man etwa die Zeit als Parameter nimmt, so sind demnach φ, ψ, χ mit sammt ihren Ableitungen bis zu einer gewissen Ordnung stetig. Dass die geodätische Curve geschlossen sein soll, drückt sich analytisch dadurch aus, dass φ, ψ, χ periodische Functionen mit derselben Periode T sind.

Durch die Arbeiten von Poincaré angeregt, hat Hadamard interessante Untersuchungen über die Bahncurven eines Punktes angestellt, wobei er im besonderen auch auf geschlossene geodätische Linien zu sprechen kommt. In seiner Abhandlung: „sur certaines propriétés des trajectoires en Dynamique" beweist Hadamard, dass auf einer Fläche mit durchweg positiver Gauss'scher Krümmung zwei geschlossene geodätische Linien sich nothwendig schneiden. Namentlich aber für die Flächen mit überall negativer Krümmung erhält Hadamard elegante Resultate. Mit Hülfe von Betrachtungen aus der analysis situs zeigt er, dass auf jeder solchen Fläche geschlossene geodätische Linien existiren und dass es zu jeder derselben eine geodätische Linie giebt, welche sich der geschlossenen asymptotisch annähert. (Vergl. Hadamard, Les surfaces à courbures opposées, Liouvilles Journal 1898). Während die Untersuchungen von Hadamard allgemeiner Natur sind, werden unsere Entwickelungen einen specielleren Charakter tragen, indem wir im I. Theile specielle Flächen aufstellen wollen, auf denen es eine Schar von geschlossenen geodätischen Linien giebt; und zwar werden wir dabei meist in der Weise vorgehen, dass wir theils die bekannten Flächengattungen untersuchen, theils von vornherein den geschlossenen geodätischen Linien gewisse Eigenschaften beilegen und zusehen, ob es Flächen giebt, auf denen eine Schar solcher geodätischer Curven existirt. Wir werden dabei erkennen, dass die Mannigfaltigkeit der Flächen mit einer Schar geschlossener geodätischer Linien eine sehr grosse ist. Im II. Theile werden wir uns mit solchen Flächen beschäftigen, auf denen *alle* geodätischen Linien geschlossen sind. Hier sind vor allem die Arbeiten von Darboux zu erwähnen, auf die wir genauer eingehen werden. Die von Darboux aufgestellten Flächen besitzen jedoch alle einen Rand. Es ist daher eine interessante Frage, ob es *singularitätenfreie* Flächen ausser der Kugel giebt, auf denen alle geodätischen Linien geschlossen sind.

I. Theil.

Flächen mit einer Schar geschlossener geodätischer Linien.

§ 1.

Uebergang zur unendlich benachbarten geodätischen Linie.

Man kann sehr leicht solche Flächen construiren, welche eine einzige geschlossene geodätische Linie besitzen. Zu diesem Zwecke braucht man nur eine beliebige geschlossene Raumcurve C zu nehmen und Flächen hindurchzulegen, welche die Hauptnormalen von C als Flächennormalen haben. Man bilde sich also einen Streifen, indem man jedem Punkte von C die durch die Tangente und Binormale bestimmte Ebene zuordnet. Durch einen solchen Streifen kann man dann unendlich viele Flächen hindurchlegen, auf denen allen die Curve C geodätische Linie ist, da in jedem ihrer Punkte die Hauptnormale mit der Flächennormalen zusammenfällt. Wollen wir nun Flächen mit einer Schar geschlossener geodätischer Linien aufstellen, so müssen wir zusehen, unter welcher Bedingung es zu der Curve C benachbarte geodätische Linien giebt, die ebenfalls geschlossen sind. Bei der Untersuchung einer Schar von geodätischen Linien ist es stets vortheilhaft, die Fläche auf diese geodätischen Linien und ihre orthogonalen Trajectorien als krummlinige Coordinaten u, v zu beziehen. Das Linienelement der Fläche nimmt dann die Form an

$$\left(\frac{ds}{dt}\right)^2 = \left(\frac{du}{dt}\right)^2 + g\left(\frac{dv}{dt}\right)^2 \tag{1}$$

wobei $v = \text{const.}$ die geodätischen Linien, $u = \text{const.}$ die orthogonalen Trajectorien sind. Aus dieser Gestalt des Linienelementes kann man sofort einen von Gauss aufgestellten wichtigen Satz ablesen: Die Bogen, die auf den geodätischen Linien $v = \text{const.}$ von zweien ihrer orthogonalen Trajectorien ausgeschnitten werden, besitzen sämmtlich gleiche Länge. Sind nun die Curven $v = \text{const.}$ geschlossen, so brauchen wir bloss mehrere orthogonale Trajectorien zu ziehen, um zu erkennen, dass alle die geschlossenen geodätischen Linien gleiche Länge haben. Zu diesem Satze müssen wir jedoch noch eine einschränkende Bemerkung machen. Es kommt nämlich, wie wir später an Beispielen sehen werden, häufig vor, dass man eine geschlossene geodätische Linie mehrere Mal durchlaufen muss, bis sich die benachbarten schliessen. Dementsprechend sind nicht immer die einfachen Längen der geschlossenen geodätischen Linien einer Schar gleich, vielmehr können wir allgemein nur behaupten, dass die Längen von irgend zweien der geschlossenen geodätischen Linien in einem rationalen Verhältnisse stehen.

Nachdem wir so über die Bogenlänge der geodätischen Linien eine Aussage gemacht haben, wollen wir nunmehr die orthogonalen Trajectorien studiren. Zu diesem Zwecke greifen wir eine Curve C aus den geschlossenen geodätischen Linien $v = \text{const.}$ heraus und bezeichnen die Bogenlänge der orthogonalen Trajectorien gerechnet von einer festen Curve $v = \text{const.}$ an bis zu der Curve C mit n. Es sind dann n und $\frac{\partial n}{\partial v}$, da wir es mit einem System geschlossener geodätischer Linien zu thun haben, periodische Functionen von u, deren Periode die Länge L der Curve C oder ein ganzes Vielfaches davon ist. $\frac{\partial n}{\partial v}$ ist aber, wie man aus Gleichung (1) erkennt, nichts anderes als $\sqrt{g}$. Für das specielle Coordinatensystem, das wir auf der Fläche gewählt haben, nimmt die Gauss'sche Krümmung eine sehr einfache Gestalt an nämlich $K = -\frac{1}{\sqrt{g}} \frac{\partial^2 \sqrt{g}}{\partial u^2}$. Demgemäss genügt unser Ausdruck $y = \frac{\partial n}{\partial v} = \sqrt{g}$ der linearen Differentialgleichung

$$\frac{d^2 y}{du^2} = -y \cdot K. \tag{2}$$

Wollen wir also entscheiden, ob es zu einer geschlossenen geodätischen Linie C benachbarte ebenfalls geschlossene geodätische Linien giebt, so berechnen wir die Gauss'sche Krümmung K längs C als Function der Bogenlänge u und bilden die Differentialgleichung (2). Soll C das Individuum einer Schar geschlossener geodätischer Linien sein, so ist dazu nothwendig, dass Gleichung (2) eine periodische Lösung besitzt, deren Periode die Länge L von C oder ein ganzes Vielfaches davon ist. Die Curve C wird im allgemeinen von einer benachbarten geschlossenen geodätischen Linie in mehreren Punkten geschnitten. Lassen wir die benachbarte geodätische Linie immer näher an C heranrücken, so nähern sich die Schnittpunkte bestimmten Grenzlagen, die wir als die Schnittpunkte mit einer unendlich benachbarten geschlossenen geodätischen Linie bezeichnen wollen. Für diese Schnittpunkte ist $y = \frac{\partial n}{\partial v} = 0$, sie werden also durch die Nullstellen der periodischen Lösung der Gleichung (2) bestimmt. Bekanntlich spielen die erwähnten Schnittpunkte in der Variationsrechnung eine grosse Rolle; zwei auf einander folgende derselben führen den Namen conjugirte Punkte und geben ein Intervall an, innerhalb dessen die geodätische Linie sicher kürzeste ist.

Ein allgemeines Kriterium dafür, wann eine lineare Differentialgleichung 2. Ordnung $\frac{d^2 y}{du^2} = -K \cdot y$ eine periodische Lösung besitzt, ist meines Wissens noch nicht aufgestellt worden; eine nothwendige Bedingung ist, dass K selber periodisch ist, eine Bedingung, die in unserem Falle

von selbst erfüllt ist. Es lassen sich indessen sofort specielle Differentialgleichungen (2) angeben, welche periodische Lösungen besitzen, und zwar sind die einfachsten Beispiele diejenigen, wo K constant ist. Betrachten wir zunächst den Fall $K = 0$, indem wir also eine abwickelbare Fläche nehmen, auf der sich eine geschlossene geodätische Linie C befinden möge, so hat die zugehörige Differentialgleichung $\frac{d^2y}{du^2} = 0$ als einzige periodische Lösung $y = \text{const.}$ Die von uns aufgestellte nothwendige Bedingung ist also erfüllt, und wir wollen nun zusehen, ob sich auch wirklich die Curve C als Individuum einer Schar von geschlossenen geodätischen Linien auffassen lässt. Um dies zu entscheiden, denken wir uns die Fläche in die Ebene abgewickelt, wobei die Curve C mit der Abscissenaxe zusammenfallen möge, und beachten, dass die geodätischen Linien in die geraden Linien der Ebene übergehen. Fassen wir nun y als Ordinate auf, so liefert die Gleichung $\frac{d^2y}{du^2} = 0$ die Gesammtheit der geraden Linien in der Ebene, also auch die Gesammtheit der geodätischen Curven auf der Fläche, und unser nothwendiges Kriterium besagt, dass nur die Curven $y = \text{const.}$, d. h. die geodätischen Parallelcurven zu C geschlossen sein können. Diese sind aber auch wirklich, wie die Anschauung lehrt, alle geschlossen, soweit sie nicht an eine Singularität der Fläche stossen. Es fragt sich nun vor allem, wie man solche abwickelbaren Flächen erhält. Zu diesem Zwecke bilden wir uns einen der zu Anfang dieses Paragraphen erwähnten geschlossenen Streifen, den wir der Kürze halber einen *geodätischen Streifen* nennen wollen. Ist ein solcher Streifen analytisch, so giebt es durch denselben nach dem Cauchy'schen Existenztheorem eine und nur eine abwickelbare Fläche, und auf dieser existirt dann eine Schar von geschlossenen geodätischen Linien.

Wir wenden uns nunmehr zur Untersuchung der Flächen mit durchweg negativem Gauss'schem Krümmungsmass. Nehmen wir an, es sei auf einer solchen Fläche eine geschlossene geodätische Linie C vorhanden, so werden wir zeigen, dass dieselbe stets isolirt ist, d. h. dass sie sich niemals als Individuum einer Schar von geschlossenen geodätischen Linien auffassen lässt. Um uns von der Richtigkeit dieser Behauptung zu überzeugen, brauchen wir bloss nachzuweissen, dass die Differentialgleichung

$$\frac{d^2y}{du^2} = B \cdot y \qquad B > 0 \tag{3}$$

niemals eine überall endliche periodische Lösung besitzt, und unterscheiden hierbei zwei Fälle. Erstens nehmen wir an, die Differentialgleichung besitze eine Lösung, welche für $u = a$ etwa verschwindet. Man kann dann zeigen, dass diese Lösung nicht noch für einen anderen Werth u ver-

schwinden kann. Angenommen nämlich sie verschwände noch für $u = b$, so bilden wir den Ausdruck

$$\int_a^b y\left(\frac{d^2y}{du^2} - B\right) du = 0,$$

welcher identisch verschwindet. Durch partielle Integration geht derselbe über in

$$\int_a^b \left[\left(\frac{dy}{du}\right)^2 + By^2\right] du = 0.$$

Da diese Relation nur durch $y = 0$ befriedigt wird, so sehen wir, dass eine Lösung, welche nicht identisch 0 ist, nur an einer Stelle verschwinden kann; eine solche Lösung ist aber nicht periodisch. Zweitens nehmen wir an, es gäbe eine periodische Lösung y der Gleichung (3), welche an keiner Stelle verschwindet und zwar sei etwa y stets positiv. Dann folgt aus Gleichung (3) $\frac{d^2y}{du^2} > 0$. Es müsste also $\frac{dy}{du}$ mit wachsendem u stets zunehmen. Nach unserer Annahme sollte nun y und daher auch $\frac{dy}{du}$ periodisch sein. Eine überall endliche periodische Function, die stets wächst, ist aber ein Widerspruch. Damit ist gezeigt, dass die geschlossene geodätische Linie C in der That isolirt ist, mit anderen Worten: *Auf einer Fläche mit durchweg negativem Gauss'schem Krümmungsmass existirt niemals eine Schar von geschlossenen geodätischen Linien.* Damit scheiden eine grosse Zahl von Flächen z. B. die grossen Gruppen der Minimalflächen und Regelflächen aus unserer Betrachtung aus.

Der zuletzt behandelte Fall $K < 0$ entspricht dem leichteren Typus der linearen Differentialgleichung 2. Ordnung, wohingegen der Fall $K > 0$ weitaus schwieriger ist. (Vergl. hierüber Picard, traité d'analyse Bd. 3 Kap. VI.) Wir setzen wieder voraus, auf einer Fläche sei bereits eine geschlossene geodätische Linie C von der Länge L vorhanden und beschränken uns auf die Annahme, dass längs C die Gauss'sche Krümmung K constant gleich $\frac{1}{a^2}$ ist, so dass also die zugehörige Differentialgleichung lautet

$$\frac{d^2y}{du^2} + \frac{1}{a^2} y = 0. \tag{4}$$

Das allgemeine Integral dieser Gleichung lautet

$$y = A \sin \frac{u}{a} + B \cos \frac{u}{a}$$

und ist nur dann periodisch, wenn eine Relation besteht von der Form

$$k \cdot L = 2h\pi a \tag{5}$$

wo h und k ganze Zahlen sind. Ist die Relation (5) befriedigt, so ist kL die Periode und unser nothwendiges Kriterium ist erfüllt. Im besonderen wollen wir nun annehmen, dass wir es mit einer Fläche constanter Krümmung $\frac{1}{a^2}$ zu thun haben, auf der bereits eine geschlossene geodätische Linie existire; wir erhalten solche Flächen, indem wir durch einen geschlossenen geodätischen Streifen eine Fläche constanter positiver Krümmung hindurchlegen. Da unter Voraussetzung der Gültigkeit der Relation (5) sämmtliche Integrale der Differentialgleichung (4) periodisch sind, so liegt die Vermuthung nahe, dass auf den beschriebenen Flächen constanter Krümmung alle geodätischen Linien geschlossen sind, so weit sie nicht an eine Singularität stossen. Von der Richtigkeit dieser Vermuthung werden wir uns in der That im II. Theile auf ganz anderem Wege überzeugen.

Wir haben in diesem Paragraphen Flächen mit einer Schar geschlossener geodätischer Linien aufgestellt im Anschluss an die Differentialgleichung $\frac{d^2y}{du^2} = -K \cdot y$, welche periodische Lösungen besitzen musste. Wenn wir nun umgekehrt eine solche Schar haben, so können wir eine zugehörige Differentialgleichung aufstellen, welche dann sicher periodische Lösungen besitzt. Nehmen wir z. B. eine geschlossene Rotationsfläche, so wissen wir, dass die Meridiancurven geschlossene geodätische Linien sind. Bilden wir also die Gleichung $\frac{d^2y}{du^2} = -K(u) \cdot y$, wobei jetzt K die Krümmung der Rotationsfläche längs des Meridians als Function der Bogenlänge u des Meridians bedeuten möge, so hat die angegebene Differentialgleichung sicher eine periodische Lösung.

§ 2.

Allgemeine Methode zur Aufstellung von Flächen mit einer Schar geschlossener geodätischer Linien.

Nachdem wir im vorigen Paragraphen mit Hülfe einer speciellen Methode zur Aufstellung von gewissen Flächen mit einer Schar geschlossener geodätischer Linien gelangt sind, wollen wir nunmehr eine allgemeine Methode zu entwickeln suchen und zu diesem Zwecke unser Problem analytisch formuliren. Nehmen wir an, wir hätten eine Fläche mit einer Schar geschlossener geodätischer Linien, so liegt es nahe, die Fläche auf diese Schar und auf eine andere, etwa die orthogonalen Trajectorien zu beziehen. Die Gleichungen der Flächen mögen dann lauten

$$x = x(u, v) \quad y = y(u, v) \quad z = z(u, v).$$

Sind $v = \text{const.}$ die geodätischen Linien, so müssen x, y, z periodische

Functionen von u mit derselben Periode sein, welches auch der Werth von v sein möge. Wir können also für x, y, z je eine trigonometrische Reihe ansetzen von der Form

$$a_0(v) + a_1(v)\cos u + \cdots + \alpha_1(v)\sin u + \cdots.$$

Bei einem solchen Ansatze haben wir den grossen Vortheil, von vornherein zu wissen, dass die Curven $v = \text{const.}$ geschlossen sind, und brauchen deshalb nur noch dafür Sorge zu tragen, dass dieselben auch geodätische Linien werden. In unserem Ansatze sind dann die allgemeinsten Flächen mit einer Schar geschlossener geodätischer Linien enthalten. Die Bedingung dafür, dass $v = \text{const.}$ geodätische Linien sind, entnehmen wir aus der Differentialgleichung der geodätischen Linien

$$-f\frac{\partial e}{\partial u} + 2e\frac{\partial f}{\partial u} - e\frac{\partial e}{\partial v} = 0, \tag{6}$$

wobei e, f, g die Gauss'schen Fundamentalgrössen 1. Ordnung bedeuten. Ist speciell die Fläche auf ein orthogonales System bezogen, so geht Gleichung (6) über in

$$e = U, \qquad f = 0 \tag{7}$$

d. h. e muss eine Function U von u allein sein. Die Coefficienten der trigonometrischen Reihen müssen nun als Functionen von v so bestimmt werden, dass die Bedingung (6) oder (7) erfüllt wird. Dieses Problem allgemein durchzuführen stösst auf grosse Schwierigkeiten; haben wir doch unendlich viele Functionen dabei zu bestimmen. Wenn wir aber nur eine endliche Anzahl von Gliedern der trigonometrischen Reihe nehmen, so können wir thatsächlich zur Aufstellung von Flächen der gewünschten Eigenschaft gelangen. Einige Beispiele dieser Art habe ich in meiner Dissertation durchgeführt, worauf ich hier verweise. Da man bei solchen Ansätzen vorzugsweise zu Flächen mit einer Schar ebener geschlossener geodätischer Linien gelangt, so lässt sich vermuthen, dass die Aufstellung derartiger Flächen besonders einfach sein muss.

§ 3.

Ebene geodätische Linien.

Für die Theorie der ebenen geodätischen Linien ist von fundamentaler Bedeutung ein Satz von Joachimsthal, wonach jede ebene geodätische Linie zugleich Krümmungslinie ist. Aus diesem Satze erkennen wir sofort, dass die Kugel die einzige Fläche ist, auf der alle geodätischen Linien eben sind. Sollen nämlich auf einer Fläche sämmtliche geodätischen Linien eben sein, so müssen durch jeden Punkt der Fläche unendlich viele Krümmungslinien hindurchgehen; dies ist nur dann möglich, wenn die Fläche

aus lauter Nabelpunkten besteht, und eine solche Fläche ist nur die Kugel. Die nächste Frage ist nun, giebt es ausser der Kugel noch Flächen, auf denen mehrere Scharen geodätischer Linien eben sind? Man sieht sofort, dass dies höchstens zwei Scharen sein können, da sonst durch jeden Punkt der Fläche mindestens drei Krümmungslinien hindurchgingen, also die Fläche wieder aus lauter Nabelpunkten bestände. Um nun zu untersuchen, ob es ausser der Kugel Flächen giebt, auf denen zwei Scharen von geodätischen Linien eben sind, beziehen wir die Fläche auf diese beiden Scharen, welche als Krümmungslinien ein orthogonales System bilden. Das Linienelement nimmt dann die Form an

$$\left(\frac{ds}{dt}\right)^2 = \left(\frac{du}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dv}{dt}\right)^2$$

d. h. die Fläche ist abwickelbar und ihre Krümmungslinien bilden ein Isothermensystem. Die einzige Fläche, welche dieses leistet, ist der Cylinder. Nun giebt es aber Flächen 2. Grades, nämlich das hyperbolische Paraboloïd und das einschalige Hyperboloïd, auf denen zwei Scharen von geraden Linien verlaufen, auf denen es also auch zwei Scharen von ebenen geodätischen Linien giebt. Dieser scheinbare Widerspruch erklärt sich daraus, dass der Satz von Joachimsthal für gerade Linien nicht gilt. Sind doch auf einer Regelfläche die erzeugenden Geraden durchaus nicht Krümmungslinien, dies ist nur dann der Fall, wenn die Fläche abwickelbar ist. Schliessen wir die geraden Linien aus, so haben wir auf dem Cylinder nur noch eine Schar von ebenen geodätischen Linien, so dass wir den Satz aussprechen können: *Die Kugel ist die einzige Fläche, auf der es mehr als eine Schar von ebenen geodätischen Linien giebt, falls man die geraden Linien ausschliesst.* Wir sind hiernach dazu geführt, die Flächen mit einer Schar ebener geodätischer Linien zu untersuchen, und wollen am Schluss dieser Betrachtung zusehen, wann diese ebenen geodätischen Linien geschlossen sind. Zu diesem Zwecke denken wir uns die Fläche auf das System der ebenen geodätischen Curven und ihre orthogonalen Trajectorien bezogen. Sind $v = \text{const.}$ die ebenen geodätischen Linien, so lässt sich das Linienelement in die Form bringen

$$\left(\frac{ds}{dt}\right)^2 = \left(\frac{du}{dt}\right)^2 + g\left(\frac{dv}{dt}\right)^2.$$

Da die Curven $u = \text{const.}$ und $v = \text{const.}$ Krümmungslinien sind, so muss die Gauss'sche Fundamentalgrösse 2. Ordnung F' verschwinden. Durch die drei Gleichungen $e = 1$, $f = 0$, $F = 0$ ist dann unser krummliniges Coordinatensystem auf der Fläche vollständig charakterisirt. Führen wir dieselben in die Formeln von Mainardi-Codazzi (Vergl. Bianchi-Lukat, Differentialgeometrie pag. 91) ein, so ergiebt sich, dass E nur von u

abhängig sein darf. Weil nun E mit dem Krümmungsradius r_2 der Curven $v = \text{const.}$ durch die Relation $E = -\frac{e}{r_2}$ verbunden ist, so ergiebt sich, dass auch r_2 nur von u abhängig ist, mit anderen Worten: die Krümmung der ebenen geodätischen Linien $v = \text{const.}$ ist in allen Punkten, welche auf derselben orthogonalen Trajectorie liegen, die gleiche. Betrachten wir ferner zwei beliebige orthogonale Trajectorien der Curven $v = \text{const.}$, so haben die Bogen der geodätischen Linien, welche hierdurch ausgeschnitten werden, sämmtlich die gleiche Länge. Daraus folgt, dass eine Schar von ebenen geodätischen Curven aus lauter congruenten Curven besteht.

Wie erhalten wir nun die Gesammtheit der Flächen mit einer Schar ebener geodätischer Linien? Wir bemerken hierzu, dass die orthogonalen Trajectorien dieser geodätischen Linien zugleich die Ebenen, in denen die geodätischen Linien liegen, senkrecht durchsetzen. Sie stehen nämlich senkrecht einerseits zu den Tangenten der ebenen geodätischen Linien, andererseits zu deren Hauptnormalen, welche mit den Flächennormalen zusammenfallen, d. h. also zu zwei Richtungen in den Ebenen der geodätischen Linien. Demgemäss erhalten wir die allgemeinste Fläche mit einer Schar ebener geodätischer Linien in folgender Weise: Wir nehmen eine beliebige einfach unendliche Schar von Ebenen und in einer derselben eine beliebige Curve. Die orthogonalen Trajectorien dieser Ebenen, welche durch die beliebige Curve gehen, erzeugen dann die allgemeinste Fläche mit einer Schar von ebenen geodätischen Linien. Diese Flächen wurden zuerst von Monge auf anderem Wege abgeleitet und führen in der Litteratur den Namen Kanalflächen. Da nun die Curve, welche wir in einer der Ebenen annahmen, vollständig beliebig ist, so können wir dafür auch eine geschlossene Curve nehmen und erhalten somit eine grosse Mannigfaltigkeit von Flächen mit einer Schar geschlossener geodätischer Linien. Besonders interessant ist der Fall, wo wir für die beliebige Curve einen Kreis nehmen; wir erhalten nämlich dann die Röhrenflächen, auf denen bekanntlich eine Schar der geodätischen Linien aus Kreisen besteht. Nachdem wir so gesehen, dass die Aufstellung von Flächen mit einer Schar ebener geschlossener geodätischer Linien keinerlei Schwierigkeiten bietet, müssen wir in der Folge unser Augenmerk darauf richten, solche Flächen zu bekommen, auf denen es eine Schar von nicht ebenen geschlossenen geodätischen Linien giebt. Derartige Flächen werden wir in gewissen Schrauben- und Rotationsflächen bekommen.

§ 4.

Schraubenflächen.

Ueber den Verlauf der geodätischen Linien auf den Schraubenflächen erhält man eine anschauliche Vorstellung, wenn man den Satz von Bour berücksichtigt, wonach jede Schraubenfläche auf eine Rotationsfläche abwickelbar ist. Da man die Schraubenfläche unendlich oft um die Rotationsfläche herumwickeln muss, bis sie mit derselben vollständig zusammenfällt, so laufen im allgemeinen sämmtliche geodätischen Linien einer Schraubenfläche in's Unendliche oder stossen an einen Rand. Nur dann wird eine geodätische Linie in sich zurückkehren können, wenn sie die Fläche umwindet, was natürlich nur dann möglich ist, wenn das Meridianprofil selbst geschlossen ist. Es ist nun sehr bemerkenswerth, dass auf den Schraubenflächen mit einem geschlossenen Meridianprofil, das wir natürlich frei von jeglichen Singularitäten annehmen, stets eine und somit eine ganze Schar geschlossener geodätischer Linien existirt. Es scheint dies plausibel, wenn man die Definition der geodätischen Linie benutzt, wonach ein auf die Fläche gespannter Faden die Gestalt einer geodätischen Linie annimmt. Legt man nämlich einen geschlossenen Gummifaden so um die Fläche, dass er dieselbe einmal umwindet, so wird derselbe sich selbst auf die Fläche aufspannen und die Lage einer geschlossenen geodätischen Linie annehmen.

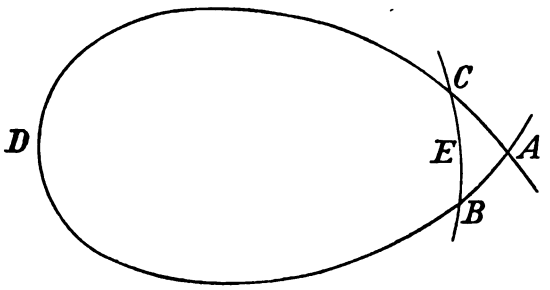


Fig. 1.

Einen exakten Nachweis des erwähnten Satzes kann man etwa in folgender Weise führen: Betrachten wir die Gesammtheit der Curven, welche von einem Punkte A der Fläche ausgehen, die Fläche einmal umwinden und wieder zum Punkte A zurückkehren, so wird es unter diesen nach den Principien der Variationsrechnung eine kürzeste geben, die wir mit k bezeichnen wollen, und diese kürzeste ist eine überall reguläre geodätische Linie. Nur für den Punkt A selbst ist die Regularität von k zunächst noch zweifelhaft. Um uns zu überzeugen, dass auch in A die Curve k keine Ecke haben kann, nehmen wir in der Nachbarschaft von A auf k zwei Punkte an (Vergl. Fig. 1), B und C. Hätte nun k in A eine Ecke, so wäre das Curvenstück BAC sicher nicht die kürzeste Verbindung der Punkte B und C, sondern dies wäre eine andere Curve etwa BEC. Ersetzen wir nun das Stück BAC durch

BEC, so erhalten wir eine neue Curve, $BECDB$, welche kürzer ist als k, und indem wir diese neue Curve eine geeignete Schraubung ausführen lassen, können wir erreichen, dass dieselbe durch den Punkt A geht. Wir hätten also durch A eine Curve, welche kürzer ist als k, was ein Widerspruch ist. Damit ist die Existenz einer geschlossenen geodätischen Linie nachgewiesen, und aus dieser einen erhält man eine ganze Schar, indem man die Fläche in sich verschiebt. Von Wichtigkeit ist noch der Umstand, dass die Curven einer solchen Schar sich nicht gegenseitig schneiden. Um uns hiervon zu überzeugen, nehmen wir einmal an, zwei der geschlossenen geodätischen Linien schnitten sich, dann müssen sich dieselben in mindestens zwei Punkten schneiden. Halten wir nun eine der beiden Curven fest, während wir die andere eine Schraubung ausführen lassen, wobei sie stets geodätische Linie auf der Fläche bleibt, so können wir es erreichen, dass sich die beiden Curven nicht mehr schneiden. Dazwischen müsste es also eine Lage geben, wo sich die beiden geschlossenen Curven berühren. Dies ist jedoch unmöglich, da es durch einen Punkt in einer Richtung nur eine geodätische Linie giebt.

Aus der eben angestellten Ueberlegung geht zugleich hervor, dass es ausser einer Schar geschlossener geodätischer Linien keine weiteren geschlossenen geodätischen Curven auf einer Schraubenfläche geben kann. Demnach können wir zusammenfassend sagen: *Auf jeder regulären Schraubenfläche mit geschlossenem Meridianprofil giebt es eine und nur eine Schar geschlossener geodätischer Linien.*

Ist nun eine Schraubenfläche mit geschlossenem Meridianprofil vorgegeben, so erübrigt noch die Aufgabe, auf dieser die geschlossenen geodätischen Linien analytisch zu bestimmen. Bezüglich dieses Problems verweise ich auf meine Dissertation pg. 19.

§ 5.

Rotationsflächen.

Einen speciellen Fall der Schraubenflächen bilden die Rotationsflächen, bei denen der Parameter der Schraubung $h = 0$ ist. Wir wollen jetzt zusehen, ob und wann es auf einer Rotationsfläche eine Schar geschlossener geodätischer Linien giebt. Der Verlauf der geodätischen Linien auf den Rotationsflächen ist eingehend studirt worden; man findet Ausführliches darüber bei Darboux, t. III, pg. 4; Bianchi pg. 173. Ist

$$x = r\cos\varphi, \quad y = r\sin\varphi, \quad z = f(r)$$

die Gleichung der Rotationsfläche, so ergiebt die Integration der Differentialgleichung der geodätischen Linien

$$\varphi = \int \sqrt{\frac{a^2(1+f'(r)^2)}{r^2(r^2-a^2)}}\, dr + b.$$

Aus der Integrationsconstanten b ersieht man, dass man aus einer geodätischen Linie eine ganze Schar erhält, indem man diese eine rotiren lässt. Setzt man

$$\frac{du}{dr} = \sqrt{1+f'(r)^2},$$

wodurch die Bogenlänge u des Meridians eingeführt wird, so bekommt man

$$\varphi = \int \frac{a\, du}{\pm r\sqrt{r^2-a^2}}. \tag{8}$$

Betrachten wir nun Rotationsflächen, welche einen Maximalparallelkreis besitzen, so verlaufen auf diesen die geodätischen Linien innerhalb eines Streifens, der von zwei Breitenkreisen mit demselben Radius begrenzt wird, und zwar verläuft die geodätische Linie so, dass sie abwechselnd die beiden Breitenkreise berührt und sich im allgemeinen unendlich oft um die Fläche herumwindet. Hier zeigt sich nun ein charakteristischer Unterschied zwischen einer geschlossenen und einer nicht geschlossenen geodätischen Linie. Eine nicht geschlossene geodätische Linie füllt gleichsam den ganzen Bereich, innerhalb dessen sie verläuft, aus, indem man mit ihr jedem Punkte dieses Bereiches beliebig nahe kommen kann. Bei einer geschlossenen geodätischen Linie ist dies nicht der Fall. Dieselbe Bemerkung gilt übrigens für alle Liouville'schen Flächen, deren Linienelement sich in die Form bringen lässt

$$\left(\frac{ds}{dt}\right)^2 = (U-V)\left(\left(\frac{du}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dv}{dt}\right)^2\right).$$

Der Bereich der geodätischen Linien wird hier von zwei Curven $u = \text{const.}$, $v = \text{const.}$ begrenzt. Betrachten wir nun eine geodätische Linie, welche zwischen zwei Breitenkreisen oscillirt. Wenn ein Punkt, der diese geodätische Linie durchläuft, von einem der beiden Breitenkreise etwa dem oberen ausgeht und bis zum unteren Breitenkreise gelangt, so dreht sich hierbei die Meridianebene, welche den Punkt enthält, um einen bestimmten Winkel Φ. Läuft der Punkt dann auf der geodätischen Curve weiter und zwar jetzt vom unteren bis zum oberen Breitenkreise, so dreht sich die zugehörige Meridianebene wieder um denselben Winkel Φ, wie man aus Symmetriegründen erkennt. Soll nun die geodätische Linie geschlossen sein, so ist dafür nothwendig und hinreichend, dass Φ zu π in einem rationalen Verhältniss steht. Greifen wir nun irgend einen Meridianbogen heraus, so giebt es durch jeden Punkt dieses Meridians eine geodätische Linie, welche denselben rechtwinklig schneidet, also den zugehörigen Breitenkreis berührt. Jede dieser geodätischen Linien ist der Repräsentant

ıer ganzen Schar, die man durch Rotation erhält. Ferner ist für jede ıser geodätischen Linien ein bestimmter Winkel Φ charakteristisch. ırchwandern wir den herausgegriffenen Meridianbogen, so wird sich ırbei Φ im allgemeinen stetig ändern. Es kommt also unendlich oft r, dass Φ zu π in einem rationalen Verhältniss steht. Demnach können r sagen: *Auf jeder Rotationsfläche, welche einen Maximalbreitenkreis sitzt, giebt es im allgemeinen unendlich viele Scharen geschlossener geodätischer nien und zwar bilden diese Scharen in gewissem Sinne eine überall dichte enge.* Dieser Satz kann nur dann eine Ausnahme erleiden, wenn der inkel Φ stets derselbe bleibt. In diesem Falle giebt es entweder überupt keine geschlossenen geodätischen Linien oder aber alle sind geıhlossen. Wir werden uns hiermit im II. Theile eingehend beschäftigen. ı dieser Stelle können wir jedenfalls schon folgendes sagen: Wenn man ıiss, dass auf einer Rotationsfläche überhaupt eine geschlossene geodätische nie existirt (abgesehen natürlich von dem Maximalparallelkreise), so giebt auf dieser stets unendlich viele Scharen derartiger Curven.

Nachdem wir uns so von der grossen Mannigfaltigkeit der geschlossenen odätischen Linien auf den Rotationsflächen überzeugt haben, ist es ederum wünschenswerth, solche Curven analytisch aufzustellen, welche schlossene geodätische Linien auf einer Rotationsfläche sind. Hinsichth dieses Problems verweise ich auf meine Dissertation pg. 24.

II. Theil.

ächen, auf denen alle geodätischen Linien geschlossen sind.

§ 6.

Allgemeine Methode zur Aufstellung solcher Flächen.

Im zweiten Theile wollen wir solche Flächen aufzustellen suchen, auf nen alle geodätischen Linien geschlossen sind, und zwar bietet hier ein sonders grosses Interesse die Frage, giebt es ausser der Kugel singuıitätenfreie Flächen mit lauter geschlossenen geodätischen Linien?

Eine allgemeine Methode, wie man versuchen kann, sich Flächen mit ıter geschlossenen geodätischen Linien zu verschaffen, ist folgende: Es i eine geschlossene Fläche S gegeben, auf der eine zweifach unendliche har geschlossener im übrigen aber beliebiger Curven bekannt ist. Gelingt uns nun, eine andere im Endlichen gelegene Fläche F, bei der wir ch einen Rand zulassen, zu ermitteln, welche so auf die Fläche S abbildet werden kann, dass den geodätischen Linien auf F die geschlossenen ırven auf S entsprechen, so werden auf F sämmtliche geodätischen

linien, die nicht an einen Rand stossen, ebenfalls geschlossen sein, vorausgesetzt, dass die Abbildung nicht unendlich vieldeutig ist. Das einfachste Beispiel einer Fläche S ist die Kugel, auf der ja die grössten Kreise eine zweifache Schar geschlossener Curven bilden. Nach dem Satze von Beltrami sind nun die Flächen constanten Gauss'schen Krümmungsmasses die einzigen, die so auf die Kugel abgebildet werden können, dass den geodätischen Linien die grössten Kreise entsprechen. Haben wir eine Fläche F constanter positiver Krümmung, so wird eine derartige Abbildung auf die Kugel durch Abwickelung bewerkstelligt. Wann ist nun diese Abbildung nicht unendlich vieldeutig? Wir nehmen an, es sei auf F bereits eine geschlossene geodätische Linie von der Länge L vorhanden, die bei der Abwickelung mit dem Aequator der Kugel zusammenfallen möge. Man erkennt sofort, dass die Abbildung dann eine nicht unendlich vieldeutige ist, wenn die Länge L zu der Länge des Aequators in einem rationalen Verhältniss steht. Giebt es also auf einer Fläche constanter positiver Krümmung $\frac{1}{a^2}$ eine einzige geschlossene geodätische Linie von der Länge $L = \frac{2h\pi a}{k}$, wobei h und k ganze rationale Zahlen bedeuten sollen, so sind sämmtliche geodätischen Curven geschlossen, welche nicht an einen Rand treffen. Da wir die Bedingung $L = \frac{2h\pi a}{k}$ (s. Gleichung (5) in § 1) auch als nothwendig erkannt haben, so bilden die Flächen, die man erhält, indem man durch einen geschlossenen geodätischen Streifen von der Länge $\frac{2h\pi a}{k}$ eine Fläche von der constanten Krümmung $\frac{1}{a^2}$ legt, auch die Gesammtheit der Flächen constanter Krümmung mit lauter geschlossenen geodätischen Linien. Als einfaches Beispiel führen wir die Rotationsflächen constanter positiver Krümmung vom spindelförmigen Typus an. Erfüllt der Aequator die Bedingung $L = \frac{2h\pi a}{k}$, so sind auf ihr alle geodätischen Linien geschlossen mit Ausnahme des Meridians, der zwei Ecken besitzt.

§ 7.

Singularitätenfreie Rotationsflächen mit lauter geschlossenen geodätischen Linien.

Nachdem wir im vorigen Paragraphen Flächen mit Rand aufgestellt haben, auf denen alle geodätischen Curven geschlossen sind, welche nicht auf einen Rand stossen, wollen wir nunmehr untersuchen, ob es singularitätenfreie Flächen mit lauter geschlossenen geodätischen Linien giebt, und hinsichtlich dieser Frage die Rotationsflächen einer eingehenden Betrachtung unterziehen, da sich auf diesen der Verlauf der geodätischen

Linien am leichtesten überblicken lässt. Von vornherein können wir mit Rücksicht auf die Ergebnisse von § 1 sagen: Sollen auf einer singularitätenfreien Rotationsfläche alle geodätischen Linien geschlossen sein, so darf dieselbe keinen Kehlkreis (Minimalparallelkreis) besitzen; die Meridiancurve hat also ein und nur ein Maximum gegen die Rotationsaxe.

Wenn nun auch auf unseren Rotationsflächen kein Kehlkreis vorkommen kann, so ist damit doch durchaus nicht gesagt, dass die Fläche nur positiv gekrümmt ist, vielmehr können in Folge des Auftretens von Wendepunkten bei der Meridiancurve auch negativ gekrümmte Flächentheile vorkommen. Die Rotationsflächen, die wir untersuchen wollen, haben also etwa die in Figur 2 gezeichneten Gestalten, wobei wesentlich ist, dass zu einem Werthe von r nur zwei Werthe z gehören.

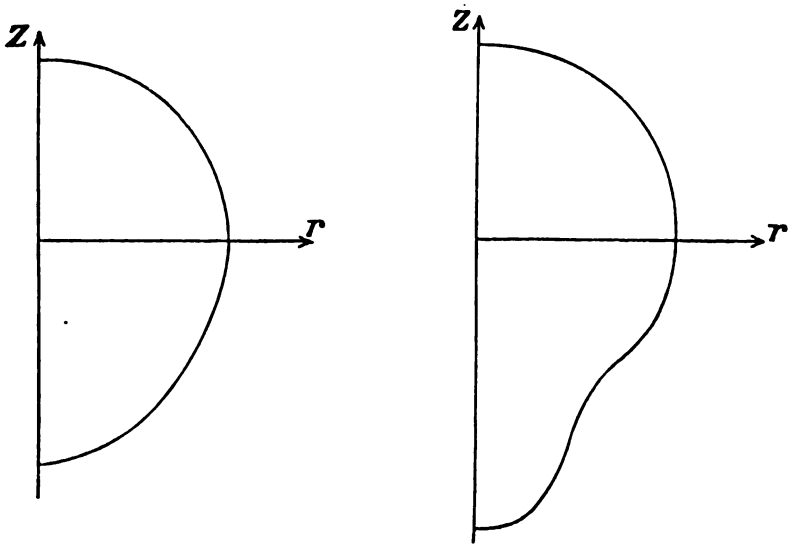


Fig. 2.

Um nun zu untersuchen, wann auf einer solchen Rotationsfläche alle geodätischen Linien geschlossen sind, führen wir die Entwickelungen von § 5 weiter. Als Meridiancurve nehmen wir ein Curvenstück, das ein Maximum M gegen die Rotationsaxe besitzen möge. Erst später werden wir die Bedingung einführen, dass die Meridiancurve mit ihren beiden Enden die Rotationsaxe senkrecht treffen soll, und schliessen uns zunächst an die eleganten Untersuchungen von Darboux an (Vergl. Darboux, Leçons Bd. 3, pg. 5), die wir hier kurz skizziren wollen.

In § 5 haben wir jeder geodätischen Linie einen bestimmten Winkel Φ zugeordnet, der im allgemeinen stetig veränderlich ist. Hier interessirt uns nun gerade der Fall, wo Φ für sämmtliche geodätischen Linien einen

und denselben Werth hat. Zerlegt man die Meridiancurve (Vergl. Figur 3) in zwei Theile, einen oberen MP oberhalb des Maximums M mit der Gleichung $z = f(r)$ und einen unteren mit der Gleichung $z = g(r)$, so lässt sich der Winkel Φ mit Hülfe der integrirten Differentialgleichung der geodätischen Linien berechnen und zwar erhält man

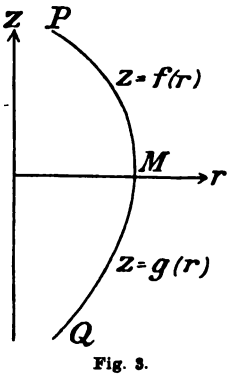


Fig. 3.

$$\Phi = \int_a^R \frac{a\left[\sqrt{1+f'(r)^2}+\sqrt{1+g'(r)^2}\right]dr}{r\sqrt{r^2-a^2}}. \tag{9}$$

wo R der Radius des Maximalparallelkreises, a der Radius der beiden Breitenkreise ist, welche von der geodätischen Linie berührt werden. Soll nun Φ für alle geodätischen Linien denselben Werth haben, so muss Φ von a unabhängig sein; es muss also eine Gleichung bestehen von der Form

$$\Phi = \text{const.} = m\pi. \tag{10}$$

Sollen im besonderen sämmtliche geodätischen Curven geschlossen sein, so muss sich für m eine rationale Zahl ergeben. Das Problem ist also darauf zurückgeführt, $f(r)$ und $g(r)$ so zu bestimmen, dass der Ausdruck (9) von a unabhängig wird.

Die Durchführung der Rechnung liefert die Darboux'sche Bedingungsgleichung

$$\sqrt{1+f'(r)^2}+\sqrt{1+g'(r)^2} = \frac{2mR}{\sqrt{R^2-r^2}}. \tag{11}$$

Im Anschluss an diese Gleichung hat Tannery eine interessante Fläche aufgestellt, auf der mit Ausnahme des Meridians alle geodätischen Linien nicht nur geschlossen, sondern auch algebraisch sind. Die Tannery'sche Fläche hat eine birnenförmige Gestalt und besitzt eine singuläre Stelle, nämlich einen Knotenpunkt; ein Modell derselben ist im Brill'schen Verlage erschienen.

Wir wenden uns nunmehr zur Entscheidung der Frage: Giebt es singularitätenfreie Rotationsflächen mit lauter geschlossenen geodätischen Linien? In diesem Falle muss die Meridiancurve mit ihren beiden Enden senkrecht auf die Rotationsaxe treffen, was sich analytisch ausdrückt durch $f'(0) = 0$ und $g'(0) = 0$. Die Gleichung (11) liefert dann $m = 1$. Dies besagt geometrisch: *Auf den singularitätenfreien Rotationsflächen, auf denen alle geodätischen Linien geschlossen sind, umwinden diese geodätischen Linien die Fläche nur einmal, besitzen also keine Doppelpunkte.* Greifen wir eine dieser geschlossenen geodätischen Curven heraus, so

müssen wir dieselbe gerade einmal durchlaufen, bis sich die unendlich benachbarten geodätischen Linien schliessen. Daraus folgt, dass *auf den singularitätenfreien Rotationsflächen mit lauter geschlossenen geodätischen Linien diese wirklich alle die gleiche Länge besitzen.* Führen wir $m = 1$ in die Gleichung (11) ein, so ergiebt sich

$$\sqrt{1 + f'(r)^2} + \sqrt{1 + g'(r)^2} = \frac{2R}{\sqrt{R^2 - r^2}}. \tag{12}$$

Wir haben im Anfange dieses Paragraphen darauf aufmerksam gemacht, dass die Rotationsflächen mit lauter geschlossenen geodätischen Linien eventuell auch negativ gekrümmte Flächentheile aufweisen; da es uns jedoch zunächst nicht darauf ankommt, alle möglichen Fälle zu discutiren, so wollen wir uns vorläufig auf die Untersuchung der Rotationsflächen mit überall positiver Krümmung beschränken. Diese Flächen entstehen durch Rotation einer gegen die Axe concaven Meridiancurve; der obere Meridianbogen $f(r)$ hat demnach eine überall negative, der untere eine überall positive Tangente; ferner sind Wendepunkte bei beiden Curvenstücken ausgeschlossen. Soll nun die Fläche singularitätenfrei sein, so müssen sich $f(r)$ und $g(r)$ im Intervalle $0 \leqq r \leqq R$ als eindeutige mit ihren ersten Ableitungen stetige Functionen ergeben und ausserdem müssen die Gleichungen bestehen

$$f'(0) = 0, \quad g'(0) = 0; \quad f'(R) = \infty, \quad g'(R) = \infty.$$

Wenn wir nun $f(r)$ diesen Bedingungen gemäss wählen, so können wir $g(r)$ aus Gleichung (12) berechnen und es bleibt zu untersuchen, ob dann $g(r)$ ebenfalls die erwähnten Bedingungen erfüllt. Aus (12) finden wir zunächst

$$g'(r) = + \sqrt{\frac{4R^2}{R^2 - r^2} - \frac{4R\sqrt{1 + f'(r)^2}}{\sqrt{R^2 - r^2}} + f'(r)^2}. \tag{13}$$

Bei der grossen Wurzel müssen wir das positive Zeichen nehmen, weil ja der untere Meridianbogen eine überall positive Tangente besitzen soll. Bei dieser Gelegenheit bemerken wir ausdrücklich, dass wir den Sinn einer Wurzel stets durch das Vorzeichen ausdrücken. Da wir $f(r)$ als eine im Intervalle $0 \leqq r \leqq R$ eindeutige Function angenommen haben, so ist auch $g(r)$ in demselben Intervalle eindeutig definirt und zwar ergiebt sich $g(r)$ aus (13) durch Quadratur; die additive Constante bei der Integration ist so zu bestimmen, dass $g(r)$ durch den Punkt $r = R$ der r-Axe hindurchgeht. Aus Gleichung (13) ersehen wir sofort, dass $g'(0) = 0$ wird, da wir $f'(0) = 0$ angenommen haben. Dahingegen ist es schwieriger, aus Gleichung (13) zu erkennen, ob auch die übrigen für $g(r)$ angegebenen Bedingungen erfüllt sind. Ausserdem ist noch darauf aufmerksam zu

machen, dass $g'(r)$ sicher nicht für jedes beliebige $f(r)$ reell ist; es fragt sich daher, ob sich überhaupt eine solche Function $f(r)$ finden lässt, dass $g'(r)$ für alle Werthe $0 \leqq r \leqq R$ reell wird. Um alle Zweifel zu lösen, wenden wir eine symmetrische Behandlungsweise an, indem wir zunächst noch beide Functionen $f(r)$ und $g(r)$ verfügbar halten, und zwar wollen wir setzen

$$\begin{aligned} \sqrt{1+f'(r^2)} &= \frac{R}{\sqrt{R^2-r^2}} + \varphi(r), \\ \sqrt{1+g'(r)^2} &= \frac{R}{\sqrt{R^2-r^2}} - \varphi(r). \end{aligned} \tag{14}$$

Diese Gleichungen, in denen $\varphi(r)$ zunächst völlig beliebig ist, stimmen im wesentlichen mit (12) überein. Man erkennt aus ihnen, dass $|f(r)|$ und $|g(r)|$ nur dann identisch gleich sein können, wenn $\varphi(r) = 0$ genommen wird. In diesem Falle liefert die Integration der Gleichungen (14) als einzige Fläche die Kugel.

Daraus folgt: *Die Kugel ist die einzige singularitätenfreie Rotationsfläche mit lauter geschlossenen geodätischen Linien, für welche der Aequator* (Maximalkreis) *eine Symmetrieebene ist.*

Wir wollen nun zusehen, ob wir $f(r)$, $g(r)$, $\varphi(r)$ so wählen können, dass alle die besprochenen Bedingungen erfüllt sind. Soll zunächst $f'(0) = 0$ und $g'(0) = 0$ sein, so muss $\varphi(r)$ für $r = 0$ verschwinden. Wir nehmen der Einfachheit halber $R = 1$ und entwickeln $\frac{R}{\sqrt{R^2-r^2}} = \frac{1}{\sqrt{1-r^2}}$ in eine Potenzreihe, die für $0 \leqq r < 1$ convergirt:

$$\frac{1}{\sqrt{1-r^2}} = 1 + \frac{1}{2}r^2 + \frac{1\cdot 3}{2\cdot 4}r^4 + \cdots.$$

Damit nun $f'(r)$ und $g'(r)$ reell werden, muss

$$\sqrt{1+f'(r)^2} > 1 \quad \text{und} \quad \sqrt{1+g'(r)^2} > 1$$

sein. Wir erkennen sofort, dass wir dies erreichen, falls wir $\varphi(r)$ absolut genommen kleiner wählen als

$$\frac{1}{2}r^2 + \frac{1\cdot 3}{2\cdot 4}r^4 + \cdots.$$

Nehmen wir etwa $\varphi(r) = \frac{1}{2}r^2$, so lauten die Gleichungen (14)

$$\begin{aligned} \sqrt{1+f'(r)^2} &= \frac{1}{\sqrt{1-r^2}} + \frac{1}{2}r^2, \\ \sqrt{1+g'(r)^2} &= \frac{1}{\sqrt{1-r^2}} - \frac{1}{2}r^2. \end{aligned} \tag{15}$$

Hiermit haben wir ein Beispiel gewonnen, für das weder $f(r)$ noch $g(r)$ Wendepunkte haben. Betrachten wir nämlich z. B.

$$\sqrt{1+g'(r)^2} = \frac{1\cdot 3}{1\cdot 4} r^4 + \cdots,$$

so sehen wir, dass dieser Ausdruck mit wachsendem r stets wächst. Also nimmt auch $g'(r)^2$ mit wachsendem r stets zu. Die Curve $g(r)$ hat also keine Wendepunkte und da dasselbe für $f(r)$ gilt, so erhalten wir eine Meridiancurve, die gegen die z-Axe überall concav gekrümmt ist. Schliesslich erkennen wir aus den Gleichungen (15) auch sofort, dass bei diesem Beispiele $f'(1) = \infty$ und $g'(1) = \infty$ wird, d. h. beide Curven treffen senkrecht auf die r-Axe auf. Aus (15) ergiebt sich

$$f = -\int \sqrt{\frac{1}{1-r^2} + \frac{r^2}{\sqrt{1-r^2}} + \frac{1}{4} r^4 - 1}\, dr,$$

$$g = \int \sqrt{\frac{1}{1-r^2} - \frac{r^2}{\sqrt{1-r^2}} + \frac{1}{4} r^4 - 1}\, dr.$$

Statt $\varphi(r) = \frac{1}{2} r^2$ können wir auch nehmen $\varphi(r) = c \cdot r^2$ und es gelten dann genau die Betrachtungen, die wir eben angestellt haben falls $c \leqq \frac{1}{2}$ ist. Da wir c beliebig klein wählen können, so folgt: *Die Kugel lässt sich in stetiger Weise so deformiren* (variiren), *dass alle geodätischen Linien geschlossen bleiben.*

Mit dem Beispiele

$$\text{(16)} \qquad \begin{aligned} \sqrt{1+f'(r)^2} &= \frac{1}{\sqrt{1-r^2}} + cr^2, \\ \sqrt{1+g'(r)^2} &= \frac{1}{\sqrt{1-r^2}} - cr^2, \end{aligned}$$

wobei $c \leqq \frac{1}{2}$ sein muss, haben wir eine Meridiancurve aufgestellt, welche durch Rotation eine Fläche mit lauter geschlossenen geodätischen Linien liefert. Da die Meridiancurve eine überall stetige Tangente besitzt, so ist diese Fläche singularitätenfrei; aber es bleibt jetzt noch zu untersuchen, ob die Fläche auch analytisch ist. Hierzu ist zu bemerken, dass die beiden Curvenstücke $f(r)$ und $g(r)$ im Intervalle $0 \leqq r < 1$ analytisch sind. Ferner erkennt man sofort, dass die Rotationsfläche an den Polen analytisch ist, da $f(r)$ und $g(r)$ nur von r^2 abhängen. Die einzige Stelle, welche einer besonderen Untersuchung bedarf, ist daher nur der Punkt $z = 0$, $r = 1$. Um zu zeigen, dass auch in diesem Punkte die beiden Curvenstücke sich analytisch verhalten und dass sie analytische Fortsetzungen von einander sind, suchen wir r als Function von z in eine Potenzreihe zu entwickeln. Aus der ersten Gleichung (16) ergiebt sich

$$\frac{dz}{dr} = f'(r) = -\sqrt{\frac{1}{1-r^2} + c^2r^4 + \frac{2cr^2}{\sqrt{1-r^2}} - 1},$$

$$\frac{dr}{dz} = -\frac{1}{\sqrt{\frac{1}{1-r^2} + c^2r^4 + \frac{2cr^2}{\sqrt{1-r^2}} - 1}}.$$

Machen wir hierin die Substitution $s = \sqrt{1-r^2}$, so ergiebt sich

$$\frac{dr}{dz} = -\frac{1}{\sqrt{\frac{1}{s^2} + c^2(1-s^2)^2 - 1 + \frac{2c(1-s^2)}{s}}}$$

$$= -\frac{1}{\frac{1}{s}\sqrt{1 + c^2s^2(1-s^2)^2 - s^2 - 2cs(1-s^2)}}$$

$$= -s(1 + a_1 s + a_2 s^2 + \cdots).$$

Nun ist

$$\frac{ds}{dz} \equiv \frac{d\sqrt{1-r^2}}{dz} = -\frac{r}{s}\frac{dr}{dz}$$

also

$$\frac{ds}{dz} = r(1 + a_1 s + a_2 s^2 + \cdots) = \sqrt{1-s^2}\,(1 + a_1 s + \cdots) = \mathfrak{P}(s).$$

Nach dem Cauchy'schen Existenztheorem giebt es nun von dieser Differentialgleichung eine einzige Lösung $s = \mathfrak{P}_1(z)$, welche für $z = 0$ verschwindet. Aus dieser Lösung $s = \sqrt{1-r^2} = \mathfrak{P}_1(z)$ ergiebt sich

$$r = \sqrt{1 - (\mathfrak{P}_1(z))^2} = \mathfrak{P}_2(z).$$

Eine analoge Entwickelung können wir nun auch für die zweite Gleichung (16) machen. Jetzt ist zunächst

$$\frac{dr}{dz} = +\frac{1}{\sqrt{\frac{1}{1-r^2} + c^2r^4 - \frac{2cr^2}{\sqrt{1-r^2}} - 1}}.$$

Machen wir jetzt die Substitution $s_1 = -\sqrt{1-r^2}$, so ergiebt sich

$$\frac{dr}{dz} = s_1(1 + a_1 s_1 + a_2 s_1^2 + \cdots)$$

und da jetzt $\frac{ds_1}{dz} = +\frac{r}{s_1}\frac{dr}{dz}$,

$$\frac{ds_1}{dz} = r(1 + a_1 s_1 + a_2 s_1^2 + \cdots).$$

Mit Hülfe derselben Ueberlegung, wie wir sie vorhin angestellt haben, erhalten wir demnach

$$s_1 = \mathfrak{P}_1(z),$$

wobei $\mathfrak{P}_1(z)$ dieselbe Potenzreihe ist, die wir vorhin für s erhalten hatten. Aus $s_1 = -\sqrt{1-r^2} = \mathfrak{P}_1(z)$ ergiebt sich wieder

$$r = \sqrt{1-(\mathfrak{P}_1(z))^2} = \mathfrak{P}_2(z).$$

Wir haben also für die beiden Curvenstücke dieselbe Potenzreihenentwickelung bekommen und damit gezeigt, dass sie analytische Fortsetzungen von einander sind. *Demgemäss liefert unser Beispiel* (16) *eine singularitätenfreie überall analytische Fläche mit lauter geschlossenen geodätischen Linien.*

Die durch die Gleichungen (16) definirten Meridiancurven sind sämmtlich gegen die z Axe concav gekrümmt, da $c \leqq \frac{1}{2}$ sein muss, so dass also die zugehörigen Rotationsflächen überall convex sind. Es ist interessant zu bemerken, dass es auch singularitätenfreie Rotationsflächen mit lauter geschlossenen geodätischen Linien giebt, welche negativ gekrümmte Flächentheile aufweisen. In diesem Falle muss die Meridiancurve Wendepunkte besitzen. Ein einfaches Beispiel dieser Art ist

$$\sqrt{1+f'(r)^2} = \frac{1}{\sqrt{1-r^2}} + \frac{3}{2}r^4,$$

$$\sqrt{1+g'(r)^2} = \frac{1}{\sqrt{1-r^2}} - \frac{3}{2}r^4.$$

Bei diesem Beispiele besitzt das obere Curvenstück $f(r)$ keinen, das untere $g(r)$ zwei Wendepunkte, welche annähernd bei $r = \frac{1}{2}$ und $r = \frac{3}{4}$ liegen. Die Meridiancurve hat daher die in der zweiten Figur 2 gezeichnete Form und liefert eine singularitätenfreie Fläche von birnenförmiger Gestalt. Bei der Durchführung der Entwickelungen dieses Paragraphen erfreute ich mich der Anregung und des Rathes von Herrn Professor Hilbert.

§ 8.

Eigenschaften von singularitätenfreien Flächen mit lauter geschlossenen geodätischen Linien.

Wir sind im vorigen Paragraphen zu dem merkwürdigen Resultat gelangt, dass es auch ausser der Kugel noch singularitätenfreie Flächen giebt, auf denen sämmtliche geodätischen Linien geschlossen sind, und zwar haben wir Rotationsflächen von dieser Eigenschaft aufgestellt. Insofern man die Erde als Kugel betrachten kann, laufen auf ihr alle kürzesten Linien in sich zurück; wenn man also von einem Punkte der Erde aus in einer bestimmten Richtung auf dem kürzesten Wege wandert, so gelangt man schliesslich wieder mit derselben Richtung an die Aus-

gangsstelle zurück. Diese Eigenschaft wird in den Lehrbüchern der Geographie gewöhnlich als eine charakteristische Eigenschaft der Erde bezeichnet. Wir sehen jedoch hier, dass dies durchaus nicht der Fall ist; vielmehr giebt es noch unzählig viele andere Flächen, welche in dieser Hinsicht die Erde vertreten könnten. Ausser den Rotationsflächen existiren nun wahrscheinlich noch andere singularitätenfreie Flächen mit lauter geschlossenen geodätischen Linien, die allerdings nur schwer analytisch aufzustellen sein dürften. Unter ihnen interessiren uns besonders diejenigen singularitätenfreien Flächen, die überall positiv gekrümmt sind und auf denen die geschlossenen geodätischen Curven keine Doppelpunkte besitzen. Diese überall convexen Flächen mit der Totalkrümmung 4π wollen wir als G-Flächen bezeichnen und wollen nunmehr die Eigenschaften derselben studiren. Die Resultate, die wir bekommen werden, gelten sicher für die Rotations-G-Flächen. Greifen wir eine der geschlossenen geodätischen Linien heraus, so müssen wir dieselbe gerade einmal durchlaufen, bis sich die unendlich benachbarten geodätischen Curven schliessen, weil ja nach unserer Annahme Doppelpunkte nicht vorkommen sollen. Daraus folgt: *Auf den G-Flächen besitzen wirklich alle geodätischen Linien die gleiche Länge.* Aus der Annahme, dass keine Doppelpunkte vorhanden sein sollen, ergiebt sich ferner, dass jede der geschlossenen geodätischen Curven auf der G-Fläche einen singularitätenfreien Bereich begrenzt. Nehmen wir auf einer der geschlossenen geodätischen Linien drei beliebige Punkte an, so können wir die Curve als ein geodätisches Dreieck auffassen. Nach dem berühmten Satze von Gauss über die curvatura integra ergiebt sich dann die Totalkrümmung des eingeschlossenen Bereiches gleich 2π. Bilden wir also unsere G-Fläche auf die Gauss'sche Kugel ab, wobei einem Punkte der Fläche ein und nur ein Punkt der Kugel entspricht, so geht jede der geschlossenen geodätischen Linien in eine geschlossene Curve auf der Kugel über, welche die Kugel in zwei inhaltsgleiche Theile theilt. Da die G-Fläche überall convex ist, so giebt es zu jeder Normalen eine andere Normale mit entgegengesetzter Richtung. Bezeichnen wir die zugehörigen Punkte als Gegenpunkte, so können wir den eben aufgestellten Satz auch so aussprechen: *Die G-Fläche wird durch jede der geschlossenen geodätischen Linien in zwei Theile zerlegt; nehmen wir in dem einen Theile einen beliebigen Punkt an, so liegt sein Gegenpunkt in dem anderen Theile.* Wie in der Einleitung bemerkt, hat Hadamard allgemein den Satz bewiesen: Giebt es auf einer überall convexen Fläche zwei beliebige geschlossene geodätische Linien, so müssen sich dieselben nothwendig schneiden. (Vergl. Liouville's Journal 1897.) Der allgemeine Beweis dieses Satzes ist ziemlich complicirt; indessen können wir seine Richtigkeit in dem uns

hier interessirenden Falle, wo wir nur geodätische Linien ohne Doppelpunkte haben, leicht einsehen. Bilden wir nämlich (in ein-eindeutiger Weise) die G Fläche auf die Kugel ab, so theilen die Bildcurven der geodätischen Linien die Kugel in zwei gleiche Theile. Dies ist nur dann möglich, wenn sich die Bildcurven schneiden und demgemäss müssen sich auch auf der G Fläche je zwei der geodätischen Linien schneiden.

Von den Längen der geschlossenen geodätischen Linien haben wir bereits ausgesagt, dass sie alle gleich sind. Wir wollen nun noch diese Länge zu der Krümmung der G Fläche in Beziehung setzen und knüpfen zu diesem Zwecke wieder an die Differentialgleichung $\frac{d^2y}{du^2} + Ky = 0$ an, die uns bereits in § 1 gute Dienste geleistet hat. Im vorliegenden Falle ist nun K nur positiver Werthe fähig. Für eine solche lineare Differentialgleichung 2. Ordnung hat Sturm einige wichtige Sätze aufgestellt, (Vergl. Liouville's Journal, Bd. 1) die wir hier benutzen wollen. Sei also die Differentialgleichung

$$\frac{d^2y}{du^2} = K \cdot y \qquad K(u) > 0 \tag{17}$$

vorgelegt und betrachten wir alle Integrale, welche für $u = 0$ verschwinden, so werden diese sämmtlich an ein und derselben Stelle $u = \alpha$ zum ersten Male wieder verschwinden. Nimmt man noch eine zweite Differentialgleichung hinzu,

$$\frac{d^2y}{du^2} + P(u)y = 0 \qquad P(u) > 0,$$

so möge an die Stelle von α der Werth $u = \beta$ treten. Setzen wir nun $K > P$ voraus, so besagt der Sturm'sche Satz, dass $\alpha < \beta$ ist. Welche geometrische Bedeutung hat nun der eben citirte Satz? Die Differentialgleichung (17), in der wir u als die Bogenlänge einer der geschlossenen geodätischen Curven C deuten, steht bekanntlich in innigem Zusammenhange mit der Theorie der conjugirten Punkte. Zwei auf einander folgende Nullstellen eines Integrals von (17) sind zwei conjugirte Punkte oder in dem in § 1 festgesetzten Sinne Schnittpunkte der Curve C mit einer unendlich benachbarten geodätischen Linie. Unter den Integralen von (17) greifen wir nun diejenigen heraus, welche für $u = 0$ verschwinden. Ist $u = \alpha$ die Stelle, wo sie zum ersten Male wieder verschwinden, so sind also $u = 0$ und $u = \alpha$ zwei auf einander folgende Schnittpunkte der Curve C mit einer unendlich benachbarten geodätischen Linie. Wir vergleichen nun (17) mit der Differentialgleichung

$$\frac{d^2y}{du^2} + \frac{1}{b^2}\, y = 0,$$

worin $\frac{1}{b^2}$ die Minimalkrümmung der G-Fläche längs C sei also $K(u) \geqq \frac{1}{b^2}$. Das Integral der letzten Differentialgleichung, welches für $u = 0$ verschwindet, ist $y = C \sin \frac{u}{b}$. Der nächste Werth, für den dieses Integral wieder verschwindet, ist $u = \pi b$. Aus dem Sturm'schen Satze folgt daher $\alpha < \pi b$. Vergleicht man ähnlich (17) mit

$$\frac{d^2y}{du^2} + \frac{1}{a^2} y = 0,$$

wo $\frac{1}{a^2}$ die Maximalkrümmung längs C sein möge, so ergiebt sich $\alpha > \pi a$. α ist die Bogenlänge eines Stückes der geschlossenen geodätischen Curve C, welches zwischen zwei auf einander folgenden Schnittpunkten von C mit einer unendlich benachbarten geschlossenen geodätischen Linie liegt. Ist die Anzahl dieser Schnittpunkte $2m$, so haben wir auch $2m$ solcher Stücke und bekommen daher, wenn L die Länge der geschlossenen geodätischen Curve C bedeutet

$$2m\pi b > L > 2m\pi a.$$

Da m mindestens 1 ist, so ist sicher $L > 2\pi a$. Wir haben demnach den Satz: *Auf den G-Flächen besitzen die geschlossenen geodätischen Linien eine Länge $L > 2\pi a$, falls $\frac{1}{a^2}$ die Maximalkrümmung der Fläche ist.* Besonders interessant ist nun der Fall, wo längs einer der geschlossenen geodätischen Linien C die G-Fläche constante Gauss'sche Krümmung $\frac{1}{a^2}$ besitzt. Die zugehörige Differentialgleichung (17), die dann

$$\frac{d^2y}{du^2} + \frac{1}{a^2} y = 0$$

lautet, hat als allgemeines Integral

$$y = A \sin \frac{u}{a} + B \cos \frac{u}{a}.$$

Da nun auf der G-Fläche alle geodätischen Curven geschlossen sein sollen, so muss nach § 1 y eine periodische Function von u sein. Für die Länge L folgt daher die Relation

$$\frac{kL}{a} = 2h\pi.$$

Es ist hier $k = 1$ zu nehmen, da wir zufolge unserer Annahme eine geschlossene geodätische Linie bloss einmal zu durchlaufen brauchen, bis sich die unendlich benachbarten schliessen. $2h$ ist die Anzahl der Schnittpunkte, die C mit einer unendlich benachbarten ebenfalls geschlossenen geodätischen Linie besitzt. Ist im besonderen $2h = 2$, so erhalten wir $L = 2\pi a$. Der letzte Fall tritt nun gerade bei den singularitätenfreien

Rotationsflächen mit lauter geschlossenen geodätischen Linien ein. Längs des Aequators ist nämlich die Krümmung der Rotationsflächen constant etwa $\frac{1}{a^2}$; ferner hat der Aequator mit einer unendlich benachbarten geodätischen Linie genau zwei Schnittpunkte gemeinsam, da sämmtliche geodätischen Curven die erwähnten Rotationsflächen nur einmal umwinden. Es ist also im vorliegenden Falle $L = 2\pi a$. Bedeutet R den Radius des Aequatorkreises, so ist andererseits $L = 2\pi R$. Es folgt also $a = R$. Wir ziehen daraus den Schluss: *Längs des Aequators einer singularitätenfreien Rotationsfläche mit lauter geschlossenen geodätischen Linien ist die Krümmung der Fläche gerade so gross, wie diejenige der Kugel, die den Aequator als grössten Kreis hat.* Anders ausgedrückt lautet dieser Satz: *Der Schmiegungskreis der Meridiancurve einer singularitätenfreien Rotationsfläche mit lauter geschlossenen geodätischen Linien im Punkte* ($z = 0$, $r = R$) *ist der mit R um den Coordinatenanfang beschriebene Kreis.*

Zum Schlusse möchte ich mir erlauben, meinem hochverehrten Lehrer Herrn Prof. Dr. Hilbert, der mich zu der vorliegenden Arbeit angeregt und stets mit förderndem Rathe unterstützt hat, meinen herzlichsten Dank auszusprechen.

Über partielle Integration.

Von

N. J. HATZIDAKIS in Athen.

1. Die von Herrn M. Brendel (*Math. Annalen* Bd. LV, S. 248—256) hergeleitete Verallgemeinerung der fälschlich als *„partielle Integration"* bezeichneten Integration eines Produktes (die eigentlich nur eine *„Faktorenintegration"* oder *„Integration nach Faktoren"* genannt werden soll*)) ist mit Fug und Recht die *partielle* Integration zu nennen. Diese partielle Integration läßt sich leicht auf eine Funktion von beliebig vielen unabhängigen Veränderlichen $u_1, u_2, \cdots, u_n$ übertragen.

2. Ich möchte aber zuerst das Verhalten von Herrn Brendel in ein wenig verschiedenen, meines Erachtens zweckmäßigeren Bezeichnungen kurz andeuten: Es seien u, v zwei beliebige Funktionen von x und $f(u, v)$ eine ebenfalls willkürliche Funktion; dann ist:

$$df(u,v) = \frac{\partial f}{\partial u}\,du + \frac{\partial f}{\partial v}\,dv,$$

mithin:

$$\frac{\partial f}{\partial u}\,du = df(u,v) - \frac{\partial f}{\partial v}\,dv,$$

woraus durch Integration folgt:

$$(\alpha) \qquad \int \frac{\partial f}{\partial u}\,du = f(u,v) - \int \frac{\partial f}{\partial v}\,dv;$$

wir setzen nun $\frac{\partial f}{\partial u} \equiv \Phi(u,v)$; dann ist offenbar:

$$\int \frac{\partial f}{\partial u}\,du \equiv \int \Phi(u,v)\,du, \quad \text{und:} \quad f = \int \textit{nach } u \text{ von } \Phi(u,v);$$

Dieses *partielle* Integral *nach* u ist, was Herr Brendel (*loc. cit.*) mit $\int'$ angedeutet hat, wofür er aber doch ein definitives, dem ∂ der partiellen Differentiation entsprechendes Zeichen verlangt (Math. Annalen Bd. LV, 4. H.).

*) Es mag hier beiläufig erwähnt werden, daß wir Neugriechen diese Benennung schon längst in Gebrauch haben (Ὁλοκλήρωσις κατὰ παράγοντας).

Ich glaube, daß das geeignetste Zeichen dafür folgendes wäre: $\int_u$, nämlich dasselbe Integralzeichen, nach links hin umgedreht (wie auch ∂ das d, nach links hin gebeugt ist) und mit dem Index u versehen, zur Andeutung der Variablen, nach der man partiell integriert. Dieses Zeichen hat zugleich den Vorteil, daß es den Unterschied zwischen *partieller* und *totaler* Integration scharf hervorhebt. Demgemäß schreibe ich:

$$f \equiv \int_u \Phi(u, v)\, du;$$

nun ist also auch:

$$\frac{\partial f}{\partial v} \equiv \frac{\partial}{\partial v}\left(\int_u \Phi(u, v)\, du\right);$$

es läßt sich mithin die Formel (α), welche die von Herrn Brendel ist*), in folgender, klarer Form schreiben:

$$(1) \qquad \int \Phi(u, v)\, du = \int_u \Phi(u, v)\, du - \int \frac{\partial}{\partial v}\left(\int_u \Phi(u, v)\, du\right) dv.$$

Setzt man darin $\Phi(u, v) \equiv v$, so bekommt man gleich die *Faktorenintegration:*

$$\int v\, du = vu - \int u\, dv.$$

Setzt man dagegen $u \equiv x$, so wird:

$$(1') \qquad \int \Phi(x, v)\, dx = \int_x \Phi(x, v)\, dx - \int \frac{\partial}{\partial v}\left(\int_x \Phi\, dx\right)\frac{dv}{dx}\, dx,$$

3. Es ist nun offenbar klar, daß sich die Brendelsche Formel (1) auch auf eine beliebige Anzahl von Veränderlichen übertragen läßt. Denn ist $f(u_1, u_2, \cdots, u_n)$ vorgelegt und sind $u_1, u_2, \cdots, u_n$ Funktionen von x, dann ist:

$$\frac{\partial f}{\partial u_1}\, du_1 = df - \frac{\partial f}{\partial u_2}\, du_2 - \cdots - \frac{\partial f}{\partial u_n}\, du_n,$$

mithin

$$(\beta) \qquad \int \frac{\partial f}{\partial u_1}\, du_1 = f - \int \frac{\partial f}{\partial u_2}\, du_2 - \cdots - \int \frac{\partial f}{\partial u_n}\, du_n;$$

Setzt man nun wieder:

$$\frac{\partial f}{\partial u_1} \equiv \Phi(u_1, u_2, \cdots, u_n),$$

so wird:

$$f = \int_{u_1} \Phi\, du_1$$

*) Es mag erwähnt werden, daß, außer Worpitsky und Scheibner, auch Bertrand in seinem „*Calcul Intégral*", bereits 1870, diese Formel hat, allerdings in einer anderen Form und ganz anders bewiesen (S. 10—11).

und die Formel (β) nimmt die Form an:

$$(2)\quad \int \Phi(u_1, u_2, \cdots, u_n)\, du_1 = \int_{u_1} \Phi\, du_1 - \sum_{k=2}^{k=n} \int \frac{\partial}{\partial u_k} \left(\int_{u_1} \Phi\, du_1 \right) du_k.$$

Setzt man speziell:

$$\Phi = u_2 \cdot u_3 \cdots u_n,$$

so wird die *Faktorenintegration für n Faktoren* gefunden:

$$(2')\quad \int (u_2 \cdot u_3 \cdots u_n)\, du_1 = u_1 \cdot u_2 \cdots u_n - \sum_{k=2}^{k=n} \int (u_1 \cdot u_2 \cdots u_{k-1} \cdot u_{k+1} \cdots u_n)\, du_k.$$

Athen, den 13. April 1902.

Föppl, Prof. Dr. **Aug.**, Vorlesungen über technische Mechanik. In 4 Bänden, gr. 8. Preis des ganzen Werkes in 4 Leinwand-Bänden n. ℳ 44.—

I Band. Einführung in die Mechanik. (1. Aufl. 1898.) 2. Aufl. [XIV u. 412 S.] 1900. geb. n. ℳ 10.—

II. — Graphische Statik. (1. Aufl. 1900.) 2. Aufl. [XII. u. 471 S.] 1903. geb. n. ℳ 10.—

III. — Festigkeitslehre. (1. Aufl. 1897.) 2. Aufl. [XVIII u. 512 S.] 1900. geb n. ℳ 12.—

IV — Dynamik. [XIV u. 456 S.] 1899. geb. n. ℳ 12.—

Gleichen, Dr. **A.**, Oberlehrer am Königl. Kaiser Wilhelms-Realgymnasium zu Berlin, Lehrbuch der geometrischen Optik. Aus Teubners Sammlung von Lehrbüchern auf dem Gebiete der mathematischen Wissenschaften mit Einschluſs ihrer Anwendungen). Band VIII. Mit 251 Figuren im Text. [XIV u. 511 S.] gr. 8. 1902. geb. n. ℳ 20.—

Grassmann's, Hermann, gesammelte mathematische und physikalische Werke. Auf Veranlassung der mathematisch-physikalischen Klasse der Königl. Sächsischen Gesellschaft der Wissenschaften und unter Mitwirkung der Herren Jacob Lüroth, Eduard Study, Justus Grassmann, Hermann Grassmann der Jüngere, Georg Scheffers herausgegeben von Friedrich Engel. II. Band. II. Teil. Die Abhandlungen zur Mechanik und zur mathematischen Physik. Mit 51 Figuren im Text. gr. 8. geh. n. ℳ 14.—

Hamburger, M., Gedächtnisrede auf Immanuel Lazarus Fuchs. Mit dem Bildnis des Verstorbenen sowie einem Verzeichnis seiner Schriften. gr. 8. 1902. geh. n. ℳ 1.—

Hensel, K., und **G. Landsberg**, Theorie der algebraischen Funktionen einer Variabeln und ihre Anwendung auf algebraische Kurven und Abelsche Integrale. Mit zahlreichen Textfiguren. [XVI u. 708 S.] gr. 8. 1902. In Leinwand geb. n. ℳ 28.— (Auch in 2 Hälften zu je n. ℳ 14.—)

Klein, F., Anwendung der Differential- und Integralrechnung auf Geometrie, eine Revision der Principien. Vorlesung, gehalten während des Sommersemesters 1901. Ausgearbeitet von Conrad Müller. [VIII u. 468 S.] gr. 8. 1902. geh. n. ℳ 10.—

Krazer, Dr. **Adolf**, o. Professor der Mathematik an der Technischen Hochschule zu Karlsruhe, Lehrbuch der Thetafunktionen. Mit 9 Textfiguren. gr. 8. 1903. In Leinw. geb.

Kübler, J., Baurat in Eßlingen, Die Berechnung der Kessel- und Gefäßwandungen. In zwei Teilen. I. Teil: Aufstellung der allgemeinen Gleichungen. Mit 6 Figuren. Mit einem Anhang: Welches Hindernis versperrt in der Knick-Theorie den Weg zur richtigen Erkenntnis!? [52 S.] gr. 8. 1902. geh. n. ℳ 1.60.

Loria, Dr. **Gino**, ord. Professor der Geometrie an der Universität Genua, spezielle algebraische und transscendente ebene Kurven. Theorie und Geschichte. Autorisierte, nach dem italienischen Manuskript bearbeitete deutsche Ausgabe von Fritz Schütte, Oberlehrer am Kgl. Gymnasium zu Neuwied. Mit 74 Figuren auf 7 lithographierten Tafeln. [XXI u. 744 S.] gr. 8. 1902. In Leinw. geb. n. ℳ 28.— (Auch in 2 Teilen zu ℳ 16.— u. ℳ 12.—)

Musil, A., o. ö. Professor an der k. k. deutschen technischen Hochschule in Brünn, Grundlagen der Theorie und des Baues der Wärmekraftmaschinen. Zugleich autorisierte, erweiterte deutsche Ausgabe des Werkes The steam-engine and other heat-engines von J. A. Ewing, Prof. an der Universität in Cambridge. Mit 302 Abbildungen im Text. [X u. 794 S.] gr. 8. 1902. In Leinw. geb. n. ℳ 20.-

Netto, E., Lehrbuch der Kombinatorik. A. u. d. T.: B. G. Teubners Sammlung von Lehrbüchern auf dem Gebiete der Mathematischen Wissenschaften mit Einschluß ihrer Anwendungen. VII. Band. [VIII u. 260 S.] gr. 8. 1902. In Leinw. geb. n. ℳ 9 —

Perry, Dr. **John**, F. R. S., Professor der Mechanik und Mathematik am Royal College of Science zu London, höhere Analysis für Ingenieure. Autorisierte deutsche Bearbeitung von Dr. Robert Fricke, o. Professor an der technischen Hochschule zu Braunschweig, und Fritz Süchting, Oberingenieur am städtischen Elektrizitätswerke zu Minden i. W. Mit 106 in den Text gedruckten Figuren. [X u. 423 S.] gr. 8. 1902. geb. n. ℳ 12.—

Riemann's gesammelte mathematische Werke. Nachträge herausgegeben von M. Noether und W. Wirtinger. Mit 9 Figuren im Text. [VIII u. 116 S.] gr. 8. 1902. geh. n. ℳ 6.—

Schreber, Dr. E., die Theorie der Mehrstoffdampfmaschinen. Untersuchung der Frage: „Ist Wasser die vorteilhafteste Flüssigkeit zum Betriebe von Dampfmaschinen?“ und Bearbeitung der auf diese Frage sich ergebenden Antworten. Mit 12 Zeichnungen im Text. [IV u. 126 S.] gr. 8. geh. n. ℳ 3.60.

Serret-Bohlmann, Lehrbuch der Differential- und Integral-Rechnung. Zweite, durchgesehene Auflage. Dritter Band. Erste Lieferung. Differentialgleichungen. Herausgegeben von G. Bohlmann und E. Zermelo. Mit 10 in den Text gedruckten Figuren. [304 S.] gr. 8. 1903. geh. n. ℳ 6.—

Sitzungsberichte der Berliner Mathematischen Gesellschaft. Herausgegeben vom Vorstande der Gesellschaft. Erster Jahrgang. Sonderabdruck aus dem Archiv der Mathematik und Physik. III. Reihe. II. Band. 3. u. 4. (Doppel-) Heft und III. Band. Heft 1—4. [IV u. 66 S.] gr. 8. 1902. geh. n. ℳ 2.40.

Study, Professor Dr. E., Geometrie der Dynamen. Die Zusammensetzung von Kräften und verwandte Gegenstände der Geometrie. [XIII u. 603 S.] gr. 8. 1903. geh. n. ℳ 21.—, geb. n. ℳ 23.—

INHALT.

	Seite
Gauß' wissenschaftliches Tagebuch 1796—1814. Mit Anmerkungen herausgegeben von Felix Klein in Göttingen. (Hierzu 1 Faksimile)	1
Über den Stand der Herausgabe von Gauß' Werken. Fünfter Bericht. Von Felix Klein in Göttingen	25
Zur zweiten Variation bei isoperimetrischen Problemen. Von Oskar Bolza in Chicago	51
Über das isoperimetrische Problem auf einer gegebenen Fläche. Von Oskar Bolza in Chicago	64
Über die Darstellung definiter binärer Formen durch Quadrate. Von Edmund Landau in Berlin	83
Eugenio Beltrami. Von Ernesto Pascal in Pavia	98
Über Flächen mit Schaar geschlossener geodätischer Linien. Von Otto Zoll in Göttingen. (Mit 3 Figuren im Text)	102
Über partielle Integration. Von N. J. Hatzidakis in Athen	134

Wir ersuchen unsere geehrten Herren Mitarbeiter, etwaigen den Abhandlungen beizufügenden Figuren — gleichviel ob dieselben im Texte selbst oder auf besonderen Tafeln veröffentlicht werden sollen — in Zukunft aber stets und starken Ausführung stets auf besonderem Blättern, wenn möglich in der gewünschten Größe und in thunlichst präziser Zeichnung dem Manuskripte beilegen zu wollen. Ausserdem wird um möglichst genaue Angabe der Adresse gebeten.

Die Redaction.

☞ **Jeder Band der Annalen besteht aus 4 Heften und umfasst ca. 36 Druckbogen. Um jedoch in jedem Heft nur abgeschlossene Artikel zu geben, werden die einzelnen Hefte mitunter von ungleicher Stärke sein.**

Der Preis für den Band von 4 Heften beträgt 20 Mark; jährlich erscheinen etwa 4—6 Hefte. Alle Buchhandlungen und Postanstalten nehmen Bestellungen an.

Verantwortliche Redaction: **F. Klein**, Göttingen, Wilh.-Weber-Str. 3, **W. v. Dyck**, München, Hildegardstr. 1½, **David Hilbert**, Göttingen, Wilh.-Weber-Str. 28.

Hierzu Beilagen von **B. G. Teubner** in **Leipzig**, welche wir der Beachtung unserer Leser bestens empfehlen.

Druck und Verlag von B. G. Teubner in Leipzig, Poststrasse 3.

Stanford University Library
MAY 29

MATHEMATISCHE ANNALEN.

BEGRÜNDET 1868 DURCH

ALFRED CLEBSCH UND CARL NEUMANN.

Unter Mitwirkung der Herren

PAUL GORDAN, ADOLPH MAYER, CARL NEUMANN, MAX NOETHER,
KARL VONDERMÜHLL, HEINRICH WEBER

gegenwärtig herausgegeben

von

Felix Klein
in Göttingen

Walther v. Dyck
in München

David Hilbert
in Göttingen

57. Band. 2. Heft.

Mit 39 Figuren im Text.

Ausgegeben am 7. Mai.

LEIPZIG,
DRUCK UND VERLAG VON B. G. TEUBNER.
1903.

Neuester Verlag von B. G. Teubner in Leipzig

Encyklopädie der Mathematischen Wissenschaften, mit Einschluß ihrer Anwendungen. Hrsg. im Auftrage der Akademien der Wissenschaften zu München und Wien und der Gesellschaft der Wissenschaften zu Göttingen, sowie unter Mitwirkung zahlreicher Fachgenossen. In 7 Bänden zu je 6—8 Heften. gr. 8. geh.

Bisher erschien:

I. Arithmetik und Algebra, red. von Fr. Meyer. [Heft 1: (VIII u. 240 S.) 1898. ℳ 5.40; Heft 2: (VIII u. 240 S.) 1898. ℳ 5.40; Heft 3: (VIII u. 240 S.) 1899. ℳ 5.40; Heft 4: (VIII u. 240 S.) 1899. ℳ 5.40; Heft 5: (VIII u. 272 S.) 1900. ℳ 6.80; Heft 6: (VIII u. 240 S.) 1901. ℳ 5.60]

II. Analysis, 3 Hefte, red. von H. Burkhardt. [1. Teil: Heft 1: (VIII u. 240 S.) 1899. ℳ 5.40; Heft 2: (VIII u. 240 S.) 1899. ℳ 5.40; Heft 3: (VIII u. 240 S.) 1901. ℳ 6.40. II. Teil: Heft 1: (VIII u. 240 S.) 1901. ℳ 5.60]

III. Geometrie, 3 Hefte, red. von Fr. Meyer. [III. Teil: Heft 1: (VIII u. 240 S.) 1902. ℳ 5.40; III. Teil: Heft 2: (VIII u. 240 S.) 1903. ℳ 5.40]

IV. Mechanik, 4 Hefte, red. von F. Klein. [1. Teil: Heft 1: (VIII u. 240 S.) 1901. ℳ 5.40; Heft 2: (VIII u. 240 S.) 1901. ℳ 5.40. II. Teil: Heft 1: (VIII u. 240 S.) 1901. ℳ 5.40; Heft 2: (VIII u. 240 S.) 1903. ℳ 5.40]

V. Physik, 2 Hefte, red. von A. Sommerfeld. [1. Teil: Heft 1: (VIII u. 240 S.) 1903. ℳ 5.60]

Unter der Presse:

VI. 1: Geodäsie u. Geophysik, red. v. E. Wiechert.

In Vorbereitung:

VI. 2: Astronomie, red. von K. Schwarzschild.

VII. Historische, philosophische und didaktische Fragen (Schlußheft, mit Generalregister).

Abel, Niels Henrik, Mémoire sur une propriété générale d'une classe très étendue de fonctions transcendantes. [III u. 109 S.] 4. 1902. geh. n. ℳ 11.—

Inhalt: Niels Henrik Abel. — Sur quelques propriétés générales. — Introduction historique. Par Sophus Lie. — Correspondance d'Abel complétant ou rectifiant ce qu'on lit sur lui aujourd'hui. — Lettres relatives à Abel. — Notes et éclaircissements sur la correspondance. — Texte original des lettres écrites par Abel en français. — Bibliographie. Publiée par Carl Stormer. — Bibliographie sur les fonctions abéliennes. — Les études d'Abel et les mathématiques. Par L. Sylow.

Bardey, Dr. Ernst, algebraische Gleichungen nebst den Resultaten und den Methoden zu ihrer Auflösung. Fünfte Auflage, bearbeitet von Friedrich Pietzker. [XIII u. 420 S.] gr. 8. 1902. geh. n. ℳ 6.—

Berichte, Mathematische und Naturwissenschaftliche aus Ungarn. Mit Unterstützung der Ungarischen Akademie der Wissenschaften und der Kgl. Ungar. naturwissenschaftlichen Gesellschaft herausgegeben von Roland Baron Eötvös, Julius König, Karl von Than. Redigiert von Andreas Heinrich. 17. Band. [VII u. 354 S.] gr. 8. 1902. geh. n. ℳ 8.—

——— 18. Band. [X u. 477 S.] gr. 8. 1903. geh.

Bolyai de Bolya, Joannes, Libellus post saeculum quam Anno MDCCCII a. d. XVIII Kalendas Januarias Claudiopoli natus est, ad celebrandam memoriam ejus immortalem, ex consilio ordinis Mathematicorum et Naturae scrutatorum regiae Litterarum Universitatis Hungaricae Francisco-Josephinae Claudiopolitanae editus. 4. [XVI u. 134 S.] gr. 8. 1902. geh. ℳ 6.—

——— Appendix scientiam spatii absolute veram exhibens; a veritate aut falsitate axiomatis XI. Euclidei, a priori haud unquam decidendâ, independentem, adjecta ad casum falsitatis quadratura circuli geometrica. Editio nova oblata ab Academia Scientiarum Hungarica ad diem natalem centesimum auctoris concelebrandum. Ediderunt Isaacus Kürschak, Maximilius Réthy, Béla Törökösy de Zsirovnicza, Academiae Scientiarum Hungaricae sodales. 4. [VIII u. 40 S.] 1903. geh. ℳ 4.—

Braunmühl, Professor Dr. A. von, Vorlesungen über Geschichte der Trigonometrie. II. Hälfte: Von der Erfindung der Logarithmen bis auf die Gegenwart. Mit 39 Figuren im Text. [XI u. 304 S.] gr. 8. 1903. geh. ℳ 10.—

Buchherer, Dr. A. H., Privatdozent an der Universität Bonn, Elemente der Vektor-Analysis. Mit Beispielen aus der theoretischen Physik. [VI u. 91 S.] gr. 8. 1903. geh. ℳ 2.40.

Curtze, M., Urkunden zur Geschichte der Mathematik im Mittelalter und der Renaissance. In 2 Teilen. Mit zahlreichen Textfiguren. gr. 8. 1902. geh. I. Teil. [X u. 336 S.] n. ℳ 16.—; II. Teil. [IV u. 231 S.] n. ℳ 14.—

Czuber, E., Wahrscheinlichkeitsrechnung und ihre Anwendung auf Fehlerausgleichung, Statistik und Lebensversicherung. [XV u. 594 S.] gr. 8. 1903. In Leinwand geb. n. ℳ 24.—

Doppler, Prof. Dr. Aug., Vorlesungen über technische Mechanik. In 4 Bänden. gr. 8. Preis des ganzen Werkes in 4 Leinwand-Bänden n. ℳ 44.—

I. Band: Einführung in die Mechanik. (1. Aufl. 1898.) 2. Aufl. [XIV u. 412 S.] 1900. geb. n. ℳ 10.—

II. — Graphische Statik. (1. Aufl. 1898.) 2. Aufl. [XII u. 471 S.] 1900. geb. n. ℳ 10.—

III. — Festigkeitslehre. (1. Aufl. 1897.) 2. Aufl. [XVIII u. 512 S.] 1900. geb. n. ℳ 12.—

IV. — Dynamik. [XIV u. 450 S.] 1899. geb. n. ℳ 12.—

[Fortsetzung siehe 3. Umschlagseite.]

Neue Begründung der Bolyai-Lobatschefskyschen Geometrie.

Von

David Hilbert in Göttingen.

In meiner Festschrift „Grundlagen der Geometrie"*) habe ich ein System von Axiomen für die Euklidische Geometrie aufgestellt und dann gezeigt, daß lediglich auf Grund der die Ebene betreffenden Bestandteile dieser Axiome der Aufbau der ebenen Euklidischen Geometrie möglich ist, selbst wenn man die Anwendung der Stetigkeitsaxiome vermeidet. In der folgenden Untersuchung ersetze ich das Parallelenaxiom durch eine der Bolyai-Lobatschefskyschen Geometrie entsprechende Forderung und zeige dann ebenfalls, *daß ausschließlich auf Grund der ebenen Axiome ohne Anwendung von Stetigkeitsaxiomen die Begründung der Bolyai-Lobatschefskyschen Geometrie in der Ebene möglich ist.*

Diese neue Begründung der Bolyai-Lobatschefskyschen Geometrie steht, wie mir scheint, auch hinsichtlich ihrer Einfachheit den bisher bekannten Begründungsarten, nämlich derjenigen von Bolyai und Lobatschefsky, die beide sich der Grenzkugel bedienten, und derjenigen von F. Klein mittelst der projektiven Methode nicht nach. Die genannten Begründungen benutzen wesentlich den Raum sowohl wie die Stetigkeit.

Zur Erleichterung des Verständisses stelle ich nach meiner Festschrift „Grundlagen der Geometrie" die Axiome der ebenen Geometrie zusammen, wie folgt:

I. Axiome der Verknüpfung.

I, 1. Zwei von einander verschiedene Punkte A und B bestimmen stets eine Gerade.

I, 2. Irgend zwei von einander verschiedene Punkte einer Geraden bestimmen diese Gerade.

*) Leipzig 1899. Vergleiche auch die mit Zusätzen versehenen Übersetzungen ins Französische (Annales de l'Ecole Normale 1900) und Englische (Chicago 1902); sowie meine Abhandlung „Ueber den Satz von der Gleichheit der Basiswinkel im gleichschenkligen Dreieck". Proceedings of the London Mathematical Society, Bd. 35. 1903.

I, 3. Auf jeder Geraden gibt es wenigstens zwei Punkte. Es gibt wenigstens drei Punkte, welche nicht in einer Geraden liegen.

II. Axiome der Anordnung.

II, 1. Wenn A, B, C Punkte einer Geraden sind und B zwischen A und C liegt, so liegt auch B zwischen C und A.

II, 2. Wenn A und B zwei Punkte einer Geraden sind, so gibt es wenigstens einen Punkt C, der zwischen A und B liegt und wenigstens einen Punkt D, so daß B zwischen A und D liegt.

II, 3. Unter irgend drei Punkten einer Geraden gibt es stets einen und nur einen Punkt, der zwischen den beiden anderen liegt.

Definition: Die zwischen zwei Punkten A und B gelegenen Punkte heißen auch die Punkte der *Strecke* AB oder BA.

II, 4. Es seien A, B, C drei nicht in gerader Linie gelegene Punkte und a eine Gerade, die keinen der Punkte A, B, C trifft; wenn dann diese Gerade durch einen Punkt der Strecke AB geht, so geht sie gewiß auch durch einen Punkt der Strecke BC oder der Strecke AC.

III. Axiome der Kongruenz.

Definition: Jede Gerade zerfällt von irgend einem ihrer Punkte aus in zwei *Halbgerade* oder *Hälften*.

III, 1. Wenn A, B zwei Punkte der Geraden a sind und A' ein Punkt einer Geraden a' ist, so kann man auf einer gegebenen Hälfte der Geraden a' von A' aus stets einen und nur einen Punkt B' finden, so daß die Strecke AB (oder BA) der Strecke $A'B'$ kongruent oder gleich ist; in Zeichen:

$$AB \equiv A'B'.$$

Jede Strecke ist sich selbst kongruent; in Zeichen:

$$AB \equiv AB \quad \text{und} \quad BA \equiv AB.$$

III, 2. Wenn die Strecke AB sowohl der Strecke $A'B'$ als auch der Strecke $A''B''$ kongruent ist, so ist auch $A'B'$ der Strecke $A''B''$ kongruent.

III, 3. Es seien AB und BC zwei Strecken ohne gemeinsame Punkte auf a und ferner $A'B'$ und $B'C'$ zwei Strecken ohne gemeinsame Punkte auf einer Geraden a'; wenn dann $AB \equiv A'B'$ und $BC \equiv B'C'$, so ist auch $AC \equiv A'C'$.

Definition. Zwei von einem Punkte A ausgehende Halbgerade h und k

die nicht zusammen eine Gerade ausmachen, nennen wir einen *Winkel* und bezeichnen ihn entweder mit

$$\sphericalangle(hk) \quad \text{oder} \quad \sphericalangle(kh).$$

Die Punkte der Ebene, welche bezüglich h auf derselben Seite wie k und zugleich bezüglich k auf derselben Seite wie h liegen, bilden den *Winkelraum* von $\sphericalangle(hk)$.

III, 4. Es sei ein Winkel (hk), eine Gerade a und eine bestimmte Seite von a' gegeben. Es bedeute h' eine Halbgerade der Geraden a', der vom Punkte O ausgeht: dann gibt es eine und nur eine Halbgerade k', so daß der Winkel (hk) dem Winkel $(h'k')$ kongruent oder gleich ist, in Zeichen:

$$\sphericalangle(hk) \equiv \sphericalangle(h'k')$$

und daß zugleich alle Punkte des Winkelraums von $\sphericalangle(h'k')$ auf der gegebenen Seite von a' liegen.

Jeder Winkel ist sich selbst kongruent, in Zeichen:

$$\sphericalangle(hk) \equiv \sphericalangle(hk) \quad \text{und} \quad \sphericalangle(hk) \equiv (kh).$$

III, 5. Wenn ein Winkel (hk) sowohl dem Winkel $(h'k')$ als auch dem Winkel $(h''k'')$ kongruent ist, so ist auch der Winkel $(h'k')$ dem Winkel $(h''k'')$ kongruent.

III, 6. Wenn für zwei Dreiecke ABC und $A'B'C'$ die Kongruenzen

$$AB \equiv A'B', \; AC \equiv A'C' \quad \text{und} \quad \sphericalangle BAC \equiv \sphericalangle B'A'C'$$

gelten, so gilt auch stets

$$\sphericalangle ABC \equiv \sphericalangle A'B'C' \quad \text{und} \quad \sphericalangle ACB \equiv \sphericalangle A'C'B'.$$

Aus den Axiomen I—III folgen leicht die Sätze über die Kongruenz der Dreiecke und über das gleichschenklige Dreieck und zugleich erkennt man die Möglichkeit, ein Lot zu errichten oder zu fällen, sowie eine gegebene Strecke oder einen gegebenen Winkel zu halbieren. Insbesondere folgt auch wie bei Euklid der Satz, daß in jedem Dreiecke die Summe zweier Seiten größer als die dritte ist.

IV. Axiom von den sich schneidenden und nicht schneidenden Geraden.

Wir sprechen nun das Axiom, welches in der Bolyai-Lobatschefskyschen Geometrie dem Parallelenaxiom der Euklidischen Geometrie entspricht, wie folgt, aus:

IV. Ist b eine beliebige Gerade und A ein nicht auf ihr gelegener Punkt, so gibt es stets durch A zwei Halbgerade a_1, a_2, die nicht ein und dieselbe Gerade ausmachen und die

Gerade b nicht schneiden, während jede in dem durch a_1, a_2 gebildeten Winkelraum gelegene von A ausgehende Halbgerade die Gerade b schneidet.

Definition. Die Gerade b zerfalle von irgend einem ihrer Punkte B aus in die beiden Halbgeraden b_1, b_2 und es mögen a_1, b_1 auf der einen und a_2, b_2 auf der anderen Seite der Geraden AB liegen: dann soll die Halbgerade a_1 zu der Halbgeraden b_1 und ebenso die Halbgerade a_2 zu der Halbgeraden b_2 *parallel* genannt werden; desgleichen sagen wir, es seien die beiden Halbgeraden a_1, a_2 zu der Geraden b *parallel* und auch von jeder der beiden Geraden, die zu a_1 und a_2 gehören, sagen wir, daß sie zu b *parallel* sind.

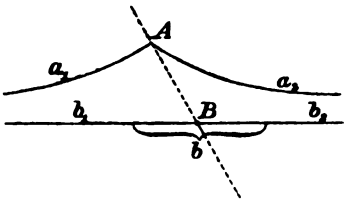


Fig. 1.

Es folgt sofort die Richtigkeit folgender Tatsachen:

Wenn eine Gerade oder Halbgerade zu einer anderen Geraden oder Halbgeraden parallel ist, so ist stets auch diese zu jener parallel.

Wenn zwei Halbgerade einer dritten Halbgeraden parallel sind, so sind sie unter einander parallel.

Definition. Jede Halbgerade bestimmt ein *Ende;* von allen Halbgeraden, die zu einander parallel sind, sagen wir, daß sie dasselbe Ende bestimmen. Eine Gerade besitzt demgemäß zwei Enden. Allgemein werde eine Gerade, deren Enden α und β sind, mit (α, β) bezeichnet.

Endlich definieren wir noch in bekannter Weise den Begriff des Spiegelbildes:

Definition. Wenn wir von einem Punkte aus auf eine Gerade das Lot fällen und dieses über seinen Fußpunkt hinaus um sich selbst verlängern, so heiße der entstehende Endpunkt das *Spiegelbild des ursprünglichen Punktes* an jener Geraden.

Die Spiegelbilder für die Punkte einer Geraden liegen wiederum auf einer Geraden; diese heiße das *Spiegelbild der ursprünglichen Geraden.*

§ 1.

Hilfssätze.

Wir beweisen zunächst der Reihe nach folgende Hilfssätze:

Satz 1. Wenn zwei Gerade eine dritte Gerade unter gleichen Winkeln schneiden, so sind sie gewiss nicht zu einander parallel.

Beweis. Wir nehmen im Gegenteil an, daß die beiden Geraden nach einer Richtung hin zu einander parallel wären. Führen wir dann um die Mitte der auf der dritten Geraden ausgeschnittenen Strecke eine Halb-

drehung aus, so würde folgen, daß die beiden ersteren Geraden auch nach der anderen Richtung hin zu einander parallel sind und dies widerspräche dem Axiom IV.

Satz 2. Wenn irgend zwei Gerade a, b vorgelegt sind, die sich weder schneiden noch zueinander parallel sind, so gibt es stets eine Gerade, welche auf beiden zugleich senkrecht steht.

Beweis. Von irgend zwei Punkten A und P der Geraden a fällen wir die Lote AB und PB' auf die Gerade b. Es sei das Lot PB' größer als das Lot AB: dann tragen wir AB von B' aus auf $B'P$ ab bis A', so daß der Punkt A' zwischen P und B' liegt. Nunmehr konstruieren wir die Gerade a' durch A', welche $B'A'$ in A' unter demselben Winkel

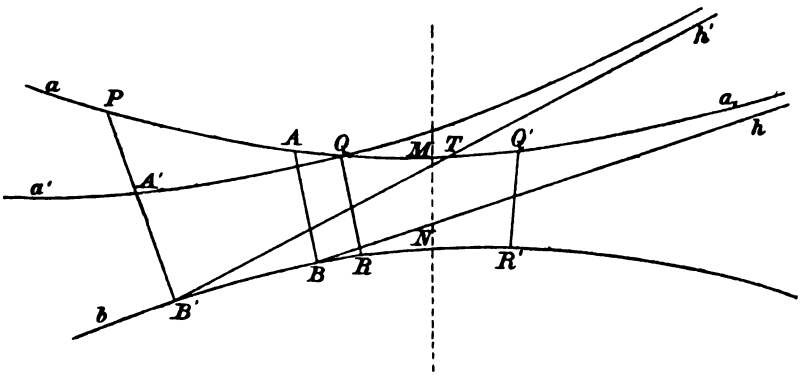


Fig. 2.

und im selben Sinne wie die Gerade a das Lot BA in A schneidet. Wir wollen beweisen, daß diese Gerade a' notwendig die Gerade a treffen muß.

Zu dem Zwecke bezeichnen wir diejenige Halbgerade, in welche a von P aus zerfällt und auf welcher der Punkt A liegt mit a_1 und ziehen dann von B aus eine Halbgerade h parallel zu a_1. Ferner sei h' diejenige Halbgerade, welche von B' unter demselben Winkel gegen b und nach derselben Richtung wie h von B ausgeht. Da nach Satz 1 die Halbgerade h' nicht zu h und daher auch nicht zu a_1 parallel ist und auch h gewiß nicht schneidet, so schneidet sie, wie man im Hinblick auf Axiom IV leicht erkennt, notwendig a_1; es sei T der Schnittpunkt der Halbgeraden h' und a_1. Da a' parallel zu h' ist, so muß nach Axiom II, 4 die Gerade a' das Dreieck $PB'T$ durch die Seite PT verlassen, womit der gewünschte Nachweis erbracht ist. Wir wollen den Schnittpunkt der Geraden a und a' mit Q bezeichnen.

Von Q fällen wir das Lot QR auf b; sodann tragen wir $B'R$ von B aus auf b bis zum Punkte R' ab, so daß auf b die Richtung B nach R' dieselbe, wie die von B' nach R ist. Ebenso tragen wir die Strecke

$A'Q$ von A aus auf a in derselben Richtung bis Q' ab. Suchen wir dann die Mitten M und N der Strecken QQ' bez. RR', so liefert deren Verbindungsgerade MN das gesuchte gemeinsame Lot auf a und b.

In der Tat, aus der Kongruenz der Vierecke $A'B'QR$ und $ABQ'R'$ folgt die Gleichheit der Strecken QR und $Q'R'$, sowie die Tatsache, daß $Q'R'$ auf b senkrecht steht. Hieraus wiederum erschließen wir die Kongruenz der Vierecke $QRMN$ und $Q'R'MN$ und damit ist die aufgestellte Behauptung und zugleich der Satz 2 vollständig bewiesen.

Satz 3. Wenn irgend zwei Halbgeraden vorgelegt sind, so gibt es stets eine Gerade, welche zu diesen beiden Halbgeraden parallel ist d. h. es gibt stets eine Gerade, die zwei vorgeschriebene Enden α und β besitzt.

Beweis. Wir ziehen durch irgend einen Punkt O zu den vorgelegten

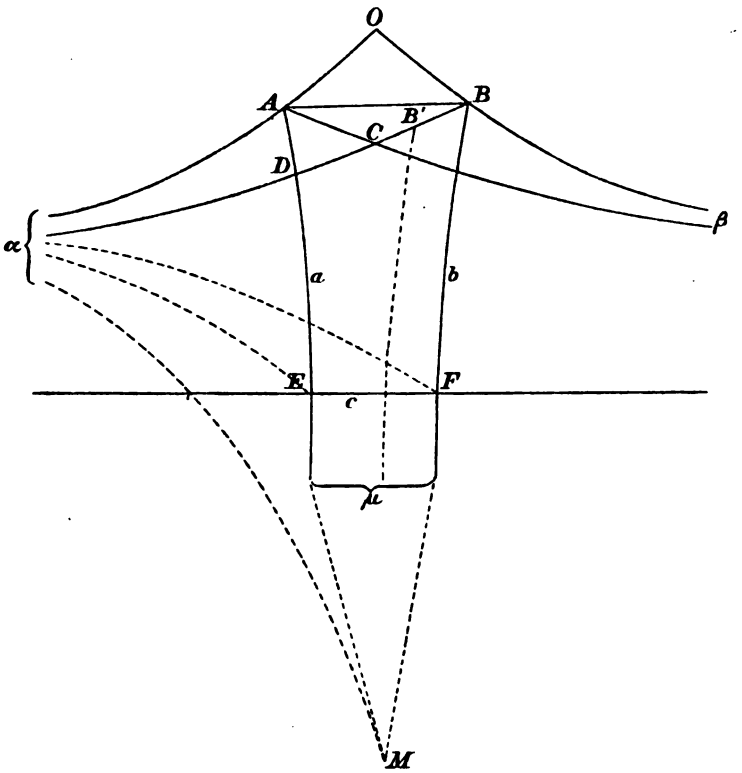


Fig 3.

Halbgeraden Parallele und tragen auf diesen von O aus gleiche Strecken ab, etwa bis A und B, so daß

$$OA = OB$$

wird und die von O aus durch A gehende Halbgerade das Ende α und

die von O aus durch B gehende Halbgerade das Ende β besitzt. Sodann verbinden wir den Punkt A mit dem Ende β und halbieren den Winkel zwischen den beiden von A ausgehenden Halbgeraden; desgleichen verbinden wir den Punkt B mit dem Ende α und halbieren den Winkel zwischen den beiden von B ausgehenden Halbgeraden. Die erstere Halbierungslinie werde mit a, die letztere mit b bezeichnet. Aus der Kongruenz der Figuren $OA\beta$ und $OB\alpha$ folgt die Gleichheit der Winkel

$$\sphericalangle(OA\beta) = \sphericalangle(OB\alpha),$$
$$\sphericalangle(\alpha A\beta) = \sphericalangle(\alpha B\beta)$$

und aus letzterer Gleichung entnehmen wir auch die Gleichheit der Winkel, die durch die Halbierungen entstanden sind, nämlich

$$\sphericalangle(\alpha Aa) = \sphericalangle(aA\beta) = \sphericalangle(\alpha Bb) = \sphericalangle(bB\beta).$$

Es kommt zunächst darauf an zu zeigen, daß die beiden Halbierungslinien a und b sich weder schneiden noch zu einander parallel sind.

Wir nehmen an, a und b schnitten sich im Punkte M. Da OAB nach Konstruktion ein gleichschenkliges Dreieck ist, so folgt

$$\sphericalangle BAO = \sphericalangle ABO$$

und hieraus nach den vorigen Gleichungen

$$\sphericalangle BAM = \sphericalangle ABM;$$

mithin ist

$$AM = BM.$$

Verbinden wir nun M mit dem Ende α durch eine Halbgerade, so folgt aus der letzteren Streckengleichung und wegen der Gleichheit der Winkel $\sphericalangle(\alpha AM)$ und (αBM) die Kongruenz der Figuren αAM und αBM und diese Kongruenz hätte die Gleichheit der Winkel $\sphericalangle(\alpha MA)$ und $\sphericalangle(\alpha MB)$ zur Folge. Da diese Folgerung offenbar nicht zutrifft, so ist die Annahme zu verwerfen, daß die Halbierungsgeraden a und b sich einander schneiden.

Wir nehmen ferner an, die Geraden a und b seien zu einander parallel; das durch sie bestimmte Ende möge dann mit μ bezeichnet werden. Die von B aus nach α gehende Halbgerade möge die von A nach β gehende Halbgerade im Punkte C und die Gerade a im Punkte D treffen: dann beweisen wir die Gleichheit der Strecken DA und DB. In der Tat, im gegenteiligen Falle tragen wir DA von D aus auf DB etwa bis B' ab und verbinden B' mit μ durch eine Halbgerade. Aus der Kongruenz der Figuren $DA\alpha$ und $DB'\mu$ würde dann die Gleichheit der Winkel $\sphericalangle(DA\alpha)$ und $\sphericalangle(DB'\mu)$ folgen und mithin wären auch die Winkel $\sphericalangle(DB'\mu)$ und $\sphericalangle(DB\mu)$ einander gleich, was nach Satz 1 nicht möglich ist.

Die Gleichheit der Strecken DA und DB hat die Gleichheit der Winkel $\sphericalangle(DAB)$ und $\sphericalangle(DBA)$ zur Folge und da nach dem Früheren

und die Formel (β) nimmt die Form an:

$$(2)\quad \int \Phi(u_1, u_2, \cdots, u_n)\, du_1 = \int_{u_1} \Phi\, du_1 - \sum_{k=2}^{k=n} \int \frac{\partial}{\partial u_k} \left(\int_{u_1} \Phi\, du_1 \right) du_k.$$

Setzt man speziell:

$$\Phi = u_2 \cdot u_3 \cdots u_n,$$

so wird die *Faktorenintegration für n Faktoren* gefunden:

$$(2')\quad \int (u_2 \cdot u_3 \cdots u_n)\, du_1 = u_1 \cdot u_2 \cdots u_n - \sum_{k=2}^{k=n} \int (u_1 \cdot u_2 \cdots u_{k-1} \cdot u_{k+1} \cdots u_n)\, du_k.$$

Athen, den 13. April 1902.

Föppl, Prof. Dr. **Aug.**, Vorlesungen über technische Mechanik. In 4 Bänden, gr. 8. Preis des ganzen Werkes in 4 Leinwand-Bänden n. *M.* 44.—

I Band. Einführung in die Mechanik. (1. Aufl. 1898.) 2. Aufl. [XIV u. 412 S.] 1900. geb. n. *M.* 10.—

II. — Graphische Statik. (1. Aufl. 1900.) 2. Aufl. [XII. u. 471 S.] 1903. geb. n. *M.* 10.—

III. — Festigkeitslehre. (1. Aufl. 1897.) 2. Aufl. [XVIII u. 512 S.] 1900. geb n. *M.* 12.—

IV. — Dynamik. [XIV u. 456 S.] 1899. geb. n. *M.* 12.—

Gleichen, Dr. **A.**, Oberlehrer am Königl. Kaiser Wilhelms-Realgymnasium zu Berlin, Lehrbuch der geometrischen Optik. Aus Teubners Sammlung von Lehrbüchern auf dem Gebiete der mathematischen Wissenschaften mit Einschluß ihrer Anwendungen). Band VIII. Mit 251 Figuren im Text. [XIV u. 511 S.] gr. 8. 1902. geb. n. *M.* 20.—

Grassmann's, Hermann, gesammelte mathematische und physikalische Werke. Auf Veranlassung der mathematisch-physikalischen Klasse der Königl. Sächsischen Gesellschaft der Wissenschaften und unter Mitwirkung der Herren Jacob Lüroth, Eduard Study, Justus Grassmann, Hermann Grassmann der Jüngere, Georg Scheffers herausgegeben von Friedrich Engel. II. Band. II. Teil. Die Abhandlungen zur Mechanik und zur mathematischen Physik. Mit 51 Figuren im Text. gr. 8. geh. n. *M.* 14.—

Hamburger, M., Gedächtnisrede auf Immanuel Lazarus Fuchs. Mit dem Bildnis des Verstorbenen sowie einem Verzeichnis seiner Schriften. gr. 8. 1902. geh. n. *M.* 1.—

Hensel, K., und **G. Landsberg**, Theorie der algebraischen Funktionen einer Variabeln und ihre Anwendung auf algebraische Kurven und Abelsche Integrale. Mit zahlreichen Textfiguren. [XVI u. 708 S.] gr. 8. 1902. In Leinwand geb. n. *M.* 28.— (Auch in 2 Hälften zu je n. *M.* 14.—)

Klein, F., Anwendung der Differential- und Integralrechnung auf Geometrie, eine Revision der Principien. Vorlesung, gehalten während des Sommersemesters 1901. Ausgearbeitet von Conrad Müller. [VIII u. 468 S.] gr. 8. 1902. geh. n. *M.* 10.—

Krazer, Dr. **Adolf**, o. Professor der Mathematik an der Technischen Hochschule zu Karlsruhe. Lehrbuch der Thetafunktionen. Mit 9 Textfiguren. gr. 8. 1903. In Leinw. geb.

Kübler, J., Baurat in Eßlingen, Die Berechnung der Kessel- und Gefäßwandungen. In zwei Teilen. I. Teil: Aufstellung der allgemeinen Gleichungen. Mit 6 Figuren. Mit einem Anhang: Welches Hindernis versperrt in der Knick-Theorie den Weg zur richtigen Erkenntnis!? [52 S.] gr. 8. 1902. geh. n. *M.* 1.60.

Loria, Dr. **Gino**, ord. Professor der Geometrie an der Universität Genua, spezielle algebraische und transscendente ebene Kurven. Theorie und Geschichte. Autorisierte, nach dem italienischen Manuskript bearbeitete deutsche Ausgabe von Fritz Schütte. Oberlehrer am Kgl. Gymnasium zu Neuwied. Mit 74 Figuren auf 7 lithographierten Tafeln. [XXI u. 744 S.] gr. 8. 1902. In Leinw. geb. n *M.* 28.— (Auch in 2 Teilen zu *M.* 16.— u. *M.* 12.—)

Musil, A., o. ö. Professor an der k. k. deutschen technischen Hochschule in Brünn, Grundlagen der Theorie und des Baues der Wärmekraftmaschinen. Zugleich autorisierte, erweiterte deutsche Ausgabe des Werkes The steam-engine and other heat-engines von J. A. Ewing, Prof. an der Universität in Cambridge. Mit 302 Abbildungen im Text. [X u. 794 S.] gr. 8. 1902. In Leinw. geb. n. *M.* 20.

Netto, E., Lehrbuch der Kombinatorik. A. u. d. T.: B. G. Teubners Sammlung von Lehrbüchern auf dem Gebiete der Mathematischen Wissenschaften mit Einschluß ihrer Anwendungen. VII. Band. [VIII u. 260 S.] gr. 8. 1902. In Leinw. geb. n. *M.* 9 —

Perry, Dr. **John**, F. R. S., Professor der Mechanik und Mathematik am Royal College of Science zu London, höhere Analysis für Ingenieure. Autorisierte deutsche Bearbeitung von Dr. Robert Fricke, o. Professor an der technischen Hochschule zu Braunschweig, und Fritz Süchting, Oberingenieur am städtischen Elektrizitätswerke zu Minden i. W. Mit 106 in den Text gedruckten Figuren. [X u. 423 S.] gr. 8. 1902. geb. n. *M.* 12.—

Riemann's gesammelte mathematische Werke. Nachträge herausgegeben von M. Noether und W. Wirtinger. Mit 9 Figuren im Text. [VIII u. 116 S.] gr. 8. 1902. geh. n. *M.* 6.—

Spiegelbild des Punktes O an der Geraden (α, ∞) und O_β sei das Spiegelbild des Punktes O an der Geraden (β, ∞); die Mitte der Strecke $O_\alpha O_\beta$ verbinden wir mit dem Ende ∞: das andere Ende der so konstruierten Geraden heiße die *Summe der beiden Enden* α *und* β und werde mit $\alpha + \beta$ bezeichnet.

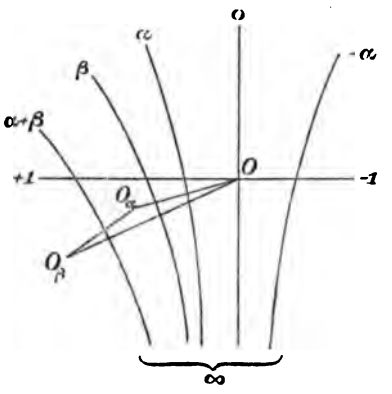


Fig. 5.

Wenn wir eine Halbgerade mit dem Ende α an der Geraden $(0, \infty)$ spiegeln, so werde das Ende der so entstehenden Halbgeraden mit $-\alpha$ bezeichnet.

Wir erkennen leicht die Richtigkeit der Gleichungen.

$$\begin{aligned} \alpha + 0 &= \alpha, \\ 1 + (-1) &= 0, \\ \alpha + (-\alpha) &= 0, \\ \alpha + \beta &= \beta + \alpha. \end{aligned}$$

Die letzte Gleichung spricht *das commutative Gesetz für die Addition von Enden* aus.

Um *das associative Gesetz für die Addition von Enden* zu beweisen, bezeichnen wir mit S_0, S_α, S_β bez. die Spiegelungen an den Geraden $(0, \infty)$, (α, ∞), (β, ∞): nach Satz 5 in § 1 gibt es dann gewiß eine Gerade (σ, ∞), so daß für die Spiegelung S_σ an dieser Geraden die Formel

$$S_\sigma = S_\beta S_0 S_\alpha$$

gilt. Da bei der Operation $S_\beta S_0 S_\alpha$ der Punkt O_α in den Punkt O_β übergeht, so ist notwendig O_β das Spiegelbild von O_α an der Geraden (σ, ∞) und folglich wird $\sigma = \alpha + \beta$, d. h. es gilt die Formel

$$S_{\alpha+\beta} = S_\beta S_0 S_\alpha.$$

Bezeichnet γ ebenfalls ein Ende, so lehrt die wiederholte Anwendung der eben gefundenen Formel:

$$\begin{aligned} S_{\alpha+(\beta+\gamma)} &= S_{\beta+\gamma} S_0 S_\alpha = S_\gamma S_0 S_\beta S_0 S_\alpha, \\ S_{(\alpha+\beta)+\gamma} &= S_\gamma S_0 S_{\alpha+\beta} = S_\gamma S_0 S_\beta S_0 S_\alpha \end{aligned}$$

und folglich ist

$$S_{\alpha+(\beta+\gamma)} = S_{(\alpha+\beta)+\gamma}$$

und mithin auch

$$\alpha + (\beta + \gamma) = (\alpha + \beta) + \gamma.$$

Die vorhin abgeleitete Formel

$$S_{\alpha+\beta} = S_\beta S_0 S_\alpha$$

lehrt zugleich, daß die angegebene Konstruktion der Summe zweier Enden von der getroffenen Wahl des Punktes O auf der Geraden $(0, \infty)$ unabhängig ist. Bezeichnet mithin O' irgend einen von O verschiedenen

unkt der Geraden $(0, \infty)$ und sind O'_α, O'_β die Spiegelbilder des Punktes O' bez. an den Geraden (α, ∞), (β, ∞), so ist die Mittelsenkrechte auf $O'_\alpha O'_\beta$ wiederum die Gerade $(\alpha+\beta, \infty)$.

Wir führen hier noch eine Tatsache an, deren Kenntnis für unsere späteren Entwickelungen in § 4 nötig ist.

Wenn wir die Gerade (α, ∞) an der Geraden (β, ∞) spiegeln, so entsteht die Gerade $(2\beta - \alpha, \infty)$.

In der Tat, ist P irgend ein Punkt derjenigen Geraden, die aus (α, ∞) durch Spiegelung an (β, ∞) vorgeht, so bleibt derselbe offenbar ungeändert, wenn wir auf ihn der Reihe nach die Spiegelungen

$$S_\beta,\ S_0,\ S_{-\alpha},\ S_0,\ S_\beta$$

anwenden. Wegen der obigen Formel ist aber

$$S_\beta S_0 S_{-\alpha} S_0 S_\beta = S_{2\beta-\alpha},$$

d. h. jener zusammengesetzte Prozeß kommt einer Spiegelung an der Geraden $(2\beta - \alpha, \infty)$ gleich; der Punkt P liegt mithin notwendig auf der letzteren Geraden.

§ 3.

Die Multiplikation der Enden.

Wir definieren jetzt das Produkt zweier Enden folgendermaßen:

Definition. Wenn ein Ende auf derselben Seite der Geraden $(0, \infty)$ wie das Ende $+1$ liegt, so heiße das Ende *positiv* und wenn ein Ende auf derselben Seite der Geraden $(0, \infty)$ wie das Ende -1 liegt, so heiße das Ende *negativ*.

Es seien nun α, β irgend zwei von 0 und ∞ verschiedene Enden. Die beiden Geraden $(\alpha, -\alpha)$ und $(\beta, -\beta)$ stehen senkrecht auf der Geraden $(0, \infty)$; sie mögen diese Gerade bez. in A und B schneiden. Ferner tragen wir die Strecke $0A$ von B aus auf der Geraden $(0, \infty)$ bis C in der Weise ab, daß auf der Geraden $(0, \infty)$ die Richtung von O nach A die nämliche wie die Richtung von B nach C ist: dann konstruieren wir in C auf der Geraden $(0, \infty)$ die Senkrechte und bezeichnen das positive *oder* das negative Ende dieser Senkrechten als das *Produkt $\alpha\beta$ der beiden Enden α, β,*

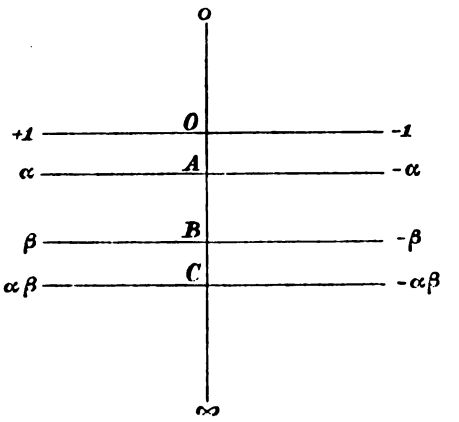


Fig. 6.

jenachdem diese Enden entweder beide positiv bez. beide negativ *oder* eine positiv und das andere negativ ist.

Wir setzen endlich die Formel

$$\alpha \cdot 0 = 0 \cdot \alpha = 0$$

fest.

Auf Grund der Axiome III, 1—3 über die Kongruenz von Strecke erkennen wir unmittelbar die Gültigkeit der Formeln

$$\alpha\beta = \beta\alpha,$$

$$\alpha(\beta\gamma) = (\alpha\beta)\gamma,$$

d. h es gilt sowohl das *commutative* wie auch das *associative Gesetz für die Multiplikation von Enden.*

Auch finden wir leicht, daß die Formeln

$$1 \cdot \alpha = \alpha, \quad (-1)\alpha = -\alpha.$$

gelten und daß, wenn α, β die Enden einer durch O laufenden Geraden sind, notwendig die Gleichung

$$\alpha\beta = -1$$

bestehen muß.

Die Möglichkeit der Division erhellt unmittelbar; auch gibt es zu jedem positiven Ende stets ein positives (und ebenso ein negatives) Ende dessen Quadrat jenem Ende π gleich wird und welches daher mit $\sqrt{\pi}$ bezeichnet werden möge.

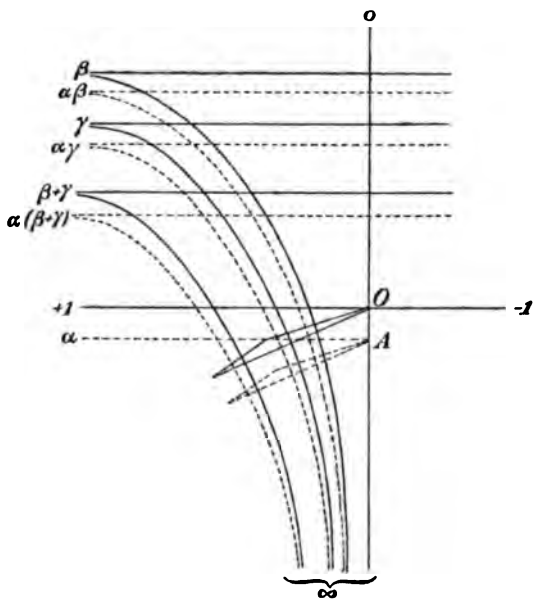


Fig. 7.

Um das distributive Gesetz für die Rechnung mit Enden zu beweisen konstruieren wir zunächst aus den Enden β und γ auf die in § 2 angegebene Weise das Ende $\beta + \gamma$. Suchen wir sodann auf die eben angegebene Weise die Enden $\alpha\beta$, $\alpha\gamma$, $\alpha(\beta + \gamma)$, so erkennen wir, daß diese Konstruktion auf einer Verschiebung der Ebene längst der Geraden $(0, \infty)$ um die Strecke OA hinausläuft und wenn wir demnach die Summe der Enden $\alpha\beta$ und $\alpha\gamma$ durch eine Konstruktion von A aus anstatt von O aus ermitteln — was nach

einer der Bemerkungen in § 2 gestattet ist —, so ergibt sich in der Tat für diese Summe das Ende $\alpha(\beta+\gamma)$, d. h. es gilt die Formel:

$$\alpha\beta + \alpha\gamma = \alpha(\beta+\gamma).$$

§ 4.

Die Gleichung des Punktes.

Nachdem wir in § 2—§ 3 erkannt haben, daß für die Rechnung mit Enden die nämlichen Regeln gelten, wie für die Rechnung mit gewöhnlichen Zahlen, bietet der Aufbau der Geometrie keine weiteren Schwierigkeiten; er geschehe etwa in folgender Weise:

Wenn ξ, η die Enden irgend einer Geraden sind, so mögen die Enden

$$u = \xi\eta,$$
$$v = \frac{\xi+\eta}{2}$$

die *Koordinaten* jener Geraden heißen. Es gilt die fundamentale Tatsache:

Wenn α, β, γ drei Enden von solcher Beschaffenheit sind, daß das Ende $4\alpha\gamma - \beta^2$ positiv ausfällt, so laufen die sämtlichen Geraden, deren Koordinaten u, v der Gleichung

$$\alpha u + \beta v + \gamma = 0$$

genügen, durch einen Punkt.

Beweis. Konstruieren wir gemäß § 2—§ 3 die Enden

$$\varkappa = \frac{2\alpha}{\sqrt{4\alpha\gamma - \beta^2}}, \qquad \lambda = \frac{\beta}{\sqrt{4\alpha\gamma - \beta^2}},$$

so nimmt mit Rücksicht auf die Bedeutung der Koordinaten u, v die vorgelegte lineare Gleichung die Gestalt an

$$(\varkappa\xi + \lambda)(\varkappa\eta + \lambda) = -1.$$

Wir wollen nunmehr die Transformation eines willkürlich veränderten Endes ω untersuchen, welche durch die Formel

$$\omega' = \varkappa\omega + \lambda$$

vermittelt wird. Zu dem Zwecke betrachten wir zunächst die Transformationen

$$\omega' = \varkappa\omega \quad \text{und} \quad \omega' = \omega + \lambda.$$

Was die erstere Transformation betrifft, so kommt offenbar die Multiplikation des willkürlichen Endes ω nach § 3 einer Verschiebung der Ebene längs der Geraden $(0, \infty)$ um eine gewisse von $\varkappa$ abhängige Strecke gleich.

Aber auch der letzteren Transformation, d. h. der Zufügung des Endes λ zu dem willkürlich veränderlichen Ende ω entspricht eine gewisse nur

von λ abhängige Bewegung der Ebene in sich, nämlich eine solche, d sich als eine Drehung der Ebene um das Ende ∞ auffassen läßt.

Um dies einzusehen, bedenken wir, daß nach den Darlegungen a Schluß von § 2 die Gerade (ω, ∞) durch Spiegelung an der Gerad $(0, \infty)$ in die Gerade $(-\omega, \infty)$ und diese wiederum durch Spiegelu an der Geraden $\left(\frac{\lambda}{2}, \infty\right)$ in die Gerade $(\omega+\lambda, \infty)$ übergeht, d. h. d Hinzufügung des Endes λ zu dem willkürlich veränderlichen Ende kommt den nach einander ausgeführten Spiegelungen an den Gerad $(0, \infty)$ und $\left(\frac{\lambda}{2}, \infty\right)$ gleich.

Aus dem eben Bewiesenen folgt, daß, wenn ξ, η die Enden ein Geraden sind, durch die Formeln

$$\xi' = \varkappa\xi + \lambda,$$
$$\eta' = \varkappa\eta + \lambda$$

sich die Enden einer solchen Geraden bestimmen, die durch eine gewis allein von $\varkappa$, λ abhängige Bewegung der Ebene aus der Geraden mit d Enden ξ, η hervorgeht. Da aber die obige Gleichung

$$(\varkappa\xi + \lambda)(\varkappa\eta + \lambda) = -1$$

für die Enden ξ', η' die Relation

$$\xi'\eta' = -1$$

zur Folge hat und nach einer Bemerkung in § 3 diese Relation die B dingung dafür ist, daß die betreffenden Geraden durch den Punkt O laufe so ersehen wir, daß auch alle der ursprünglichen Gleichung

$$(\varkappa\xi + \lambda)(\varkappa\eta + \lambda) = -1$$

genügenden Geraden (ξ, η) durch einen Punkt laufen und damit ist d Beweis für den aufgestellten Satz vollkommen erbracht.

Nachdem wir erkannt haben, daß die Gleichung des Punktes Linienkoordinaten eine lineare ist, folgern wir leicht den speziellen Pasc schen Satz für das Geradenpaar und den Desarguesschen Satz üb perspektiv liegende Dreiecke, sowie die übrigen Sätze der projektiv Geometrie. Auch sind dann die bekannten Formeln der Bolyai-Lob schefskyschen Geometrie ohne Schwierigkeit ableitbar und damit ist d Aufbau dieser Geometrie mit alleiniger Hilfe der Axiome I—IV vollend

Über die Curvatura integra und die Topologie geschlossener Flächen.

Von

WERNER BOY in Leipzig.

Einleitung.

In seiner berühmten Abhandlung: Disquisitiones generales circa superficies curvas geht Gauß von der Definition des Krümmungsmaßes k einer Fläche in einem bestimmten Punkte aus. Das Integral dieses Krümmungsmaßes erstreckt über einen endlichen Bereich einer Fläche nennt er die „Curvatura integra" dieses Bereiches. Wir bezeichnen sie heute zum Unterschiede vom „Krümmungsmaß" als „Gesamtkrümmung" oder „Totalkrümmung" oder wohl auch noch als Curvatura integra, um Verwechslungen vorzubeugen, die dadurch entstehen könnten, daß man in Frankreich unter „courbure totale" unser „Krümmungsmaß" versteht. Die Curvatura integra eines Flächenstückes ist gleich dem Inhalt seines sphärischen Bildes, d. h. gleich dem Inhalt des Kugelstückes, das von den durch den Mittelpunkt einer Einheitskugel zu der Gesamtheit der Normalen der Fläche gelegten Parallelen aus der Kugeloberfläche ausgeschnitten wird. Die Krümmung eines Flächenstückes wird positiv oder negativ gerechnet, je nachdem der Umlaufungssinn seines Umfangs bei der Übertragung auf die Kugel erhalten bleibt oder sich umkehrt. Bedeckt das sphärische Bild eines Flächenstückes die Kugel mehrfach, so zerlegt man dieses Flächenstück in Teile, die sich einfach auf die Kugel abbilden, und bestimmt die Größe der Totalkrümmung der einzelnen Teile; die algebraische Summe dieser Einzelkrümmungen ist dann die Totalkrümmung des gesamten Flächenstückes.

Auf diese Totalkrümmung geht Gauß nicht weiter ein. Er sagt am Schlusse von Art. 6 der angeführten Abhandlung: „Indessen müssen wir die weitere Erörterung dieses Gegenstandes, *der die allgemeinste Auffassung der Figuren betrifft*, uns für eine andere Gelegenheit vorbehalten". Diese versprochene Untersuchung über die Totalkrümmung hat Gauß nicht ver-

öffentlicht. Aber aus der gesperrt gedruckten Bemerkung geht hervor, daß er die Beziehung der Curvatura integra zu den Zusammenhangsverhältnissen der Flächen gekannt hat. Diese Beziehung ist aufgedeckt worden von Kronecker und von Dyck.

Kronecker definiert in seiner Abhandlung: „Über Systeme von Funktionen mehrer Variablen*) für Systeme von Funktionen eine gewisse „Charakteristik" K, d. h. eine gewisse Zahl, die dem Funktionssystem in bestimmter Weise zugeteilt ist. Durch die Gleichung $z = f(x, y)$ einer Fläche und ihre partiellen Ableitungen ist ein Funktionensystem (f, f_x, f_y) bestimmt, dessen Charakteristik auch schlechtweg als Charakteristik der Fläche: $z = f(x, y)$ bezeichnet wird. Ist die Fläche nun geschlossen und hat sie eine stetige Tangentialebene und eine abteilungsweise stetige Krümmung, so besteht zwischen ihrer Charakteristik K und der Totalkrümmung C die einfache Beziehung:

$$K = \frac{1}{2\pi} C$$

soweit Kronecker.

Dyck**) hat nun seinerseits für Flächen eine Charakteristik K' durch die Zahl der Rückkehrschnitte und der Ränder definiert, und zwar für geschlossene Flächen in folgender Weise. Eine geschlossene Fläche ist im Sinne der Analysis situs bekanntlich definiert durch die Zahl der auf ihr gleichzeitig möglichen, einander nicht schneidenden, nicht zerstückenden Rückkehrschnitte. Bei diesen muß man nun zwei Arten unterscheiden. Bei den Schnitten „der ersten Art" kehrt die mit einem gewissen Richtungssinn versehene Normale nach einmaligem Umlauf längs des Rückkehrschnittes in der Ausgangsrichtung zum Anfangspunkt zurück. Die Zahl dieser Schnitte sei σ. Jeder von ihnen liefert *zwei* Ränder. Bei den Schnitten „der zweiten Art" kehrt sich die Normale bei einmaligem Umlauf um. Ihre Zahl sei σ'. Jeder von ihnen liefert bloß *einen* Rand. (Vergl. etwa den Schnitt längs der Mittellinie des Möbiusschen Bandes.) Dyck setzt nun:

$$K' = 2 - 2\sigma - \sigma'.$$

Danach ist die Charakteristik der Kugel 2, die der Ringfläche 0 etc. Bei zweiseitigen Flächen ist $\sigma' = 0$. Bei einseitigen sind, wie wir bemerken wollen, σ und σ' nicht fest. Vielmehr können je zwei Schnitte σ' ersetzt werden durch einen Schnitt σ, und bei einseitigen Flächen auch umgekehrt je ein Schnitt σ durch zwei Schnitte σ'. Die Charakteristik K bleibt dabei, wie man sieht, ungeändert.

*) Berl. Monatsber. 1869, März und Aug. pag. 688 f.

**) Dyck, Analysis situs I, Math. Annalen Bd. 32, 1888. In dieser Abhandlung ist auch die gesamte einschlägige Litteratur in höchst übersichtlicher Weise zusammengestellt.

Von dieser Charakteristik K' zeigt nun Dyck, daß sie identisch ist mit der Kroneckerschen Charakteristik des Systems (f, f_x, f_y). Damit ist die Totalkrümmung in Beziehung gesetzt zu den Rückkehrschnitten, also auch zu dem Begriff des Zusammenhangs und des Geschlechts von Flächen. Für zweiseitige Flächen, für die $\sigma' = 0$ ist, ist der Zusammenhang: $Z = 1 + 2\sigma$, das Geschlecht: $p = \sigma$. Also besteht zwischen der Totalkrümmung C und den angeführten Ausdrücken bei zweiseitigen Flächen die Beziehung:

$$\frac{1}{2\pi} C = K = 2(1-p) = 3 - Z.$$

Damit ist die von Gauß angedeutete Beziehung zwischen der Totalkrümmung und den allgemeinsten Eigenschaften der Flächen aufgedeckt. Wie man aber sieht, ist der dabei eingeschlagene Weg ein ziemlich komplizierter. Man ist nicht von der Totalkrümmung ausgegangen, sondern diese ist beiläufig in die Untersuchung hineingekommen. Auf Veranlassung von Herrn Prof. Hilbert-Göttingen hatte ich es unternommen, die von Gauß angedeutete Beziehung zwischen der Curvatura integra und den allgemeinsten Eigenschaften der Flächen aufzudecken. Ich ging dabei aus von der geometrischen Bedeutung der Totalkrümmung und fand natürlich die obigen Relationen, konnte diese aber auch erweitern auf Flächen, die nicht frei von Singularitäten sind, die etwa endende Doppelkurven enthalten. Das Mittel dazu bot mir eine Erweiterung des Begriffes der Krümmung auf singuläre Punkte wie Knoten, Spitzen, Kantenpunkte usw. Diese ganz in Analogie zum Krümmungsmaß definierte Krümmung habe ich aus einem später hervortretenden Grunde Äquivalentkrümmung genannt. Diese letztere ermöglichte es nun auch, den Begriff der Totalkrümmung und somit die obige Beziehung auf Polyeder anzuwenden. Durch eine einfache Umformung liefert die letztere dann die als verallgemeinerte Eulersche Sätze bekannten Relationen an Polyedern.

Diese Fragen habe ich im zweiten Kapitel meiner Dissertation: „Über die Curvatura integra und die Topologie geschlossener Flächen"*) behandelt. In § 1—§ 4 des Folgenden will ich einen kurzen Überblick über die dort eingeschlagene Methode und die gefundenen Resultate geben, ohne mich aber auf Ausführungen einzulassen, derentwegen ich auf die angeführte Dissertation verweise.

Diese Betrachtungen führen nun unmittelbar zur Topologie der Flächen. Die Größe der Curvatura integra C bestimmt sich durch die Charakteristik K und die Zahl n der *endenden* Doppelkurven als:

$$C = K \cdot 2\pi + n \cdot 4\pi.$$

*) Göttingen, 1901.

Da drängt sich nun die Frage auf: Gibt es zu jedem $K(\leqq 2)$ und zu zu jedem $n(\geqq 0)$ auch eine zugehörige reelle Fläche? Die Frage spitzt sich dann zu der folgenden zu:

Gibt es eine ganz im Endlichen gelegene, geschlossene, singularitätenfreie Fläche, auf der nur ein Rückkehrschnitt zweiter Art möglich ist? Dabei sehen wir das Auftreten von Doppelelementen nicht als Singularität an, wohl aber das Auftreten von Enden von Doppelkurven. Wir verlangen nämlich, daß jeder Mantel für sich vollkommen regulär verlaufe.

Die gesuchte Fläche existiert in der Tat. Wir werden im Folgenden zwei Typen von dieser Fläche beschreiben*). Diese Fläche interessiert nun nicht nur in rein topologischer Hinsicht, sie verdient auch aus einem ganz anderen Grunde Beachtung. *Sie entspricht nämlich im Sinne der Analysis situs vollkommen der projektiven Ebene.* Sie entspricht ihr in demselben Sinne wie die Kugel der komplexen Zahlenebene. Bei geeigneten Festsetzungen würde auf unserer Fläche die projektive Geometrie gelten und zwar ausnahmlos für alle Punkte.

Diese Fläche habe ich schon behandelt im Cap. III, § 3—§ 5 meiner Dissertation und in einem Aufsatz: „Über die Abbildung der projektiven Ebene auf eine im Endlichen geschlossene, *singularitätenfreie* Fläche." Göttinger Nachrichten, 1901, Heft 1.

Wir wollen im Folgenden das dargelegte Programm ausführen.

§ 1.

Die vollkommen stetige Deformation von Flächen. Die Curvatura integra als Kurvenintegral.

Betrachten wir ein überall positiv gekrümmtes Gebiet einer Fläche. Sein sphärisches Bild wird einen gewissen Kugelteil bedecken. Wir wählen das Gebiet so klein, daß es diesen Kugelteil nur einfach bedeckt. Halten wir dann die Grenzkurve des betreffenden Gebietes samt ihren Tangentialebenen, d. h. den sogenannten Grenz*streifen* fest, so bleibt sein Bild auf der Kugel, also auch der von diesem umschlossene Inhalt erhalten, wenn wir die von ihm umschlossene Fläche irgendwie deformieren. Wir sehen daraus, daß der Curvatura integra eines Flächenstückes ein hoher Grad von Invarianz zukommt. Betrachten wir nun statt eines Flächenstücks eine geschlossene Fläche, etwa die Kugel, so erkennt man leicht, daß ihre Totalkrümmung bei allen Deformationen ungeändert bleibt, bei denen die Fläche mit ihren Tangentialebenen stetig und das Krümmungsmaß in

*) Diese beiden Flächen sind als Gypsmodelle in dem bekannten Modellverlage von Martin Schilling, Halle a. d. S. erschienen.

jedem Punkte unter einer endlichen Grenze bleibt. Die Notwendigkeit der letzteren Annahme habe ich in meiner Dissertation dargelegt (pag. 17). Deformationen, die die genannten Voraussetzungen erfüllen, nennen wir „vollkommen stetige" Deformationen*). Die Gleichheit der Totalkrümmung ist also die notwendige, (aber nicht hinreichende) Bedingung dafür, daß zwei Flächen vollkommen stetig ineinander übergeführt werden können. Nun kann ich jede Fläche, die denselben Zusammenhang hat wie die Kugel, d. h. für die $K = 2$ ist, und die außerdem frei von Doppelkurven ist, auf die Kugel vollkommen stetig deformieren. Daß ich solche Flächen überhaupt auf die Kugel transformieren kann, ist aus der Funktionentheorie her geläufig. Die vollkommene Stetigkeit wird dabei nur beim Verschwinden der Doppelkurven unterbrochen. Sind solche nicht vorhanden, so läßt sich die Verwandlung vollkommen stetig ausführen. Daraus ergibt sich: Alle Flächen mit der Charakteristik $K = 2$ ohne Doppelkurven haben die Totalkrümmung 4π.

Wir könnten nun diesen rein auf der Anschauung beruhenden Weg weiter verfolgen. Wir wollen aber zunächst rechnerisch aus dem die Curvatura integra bestimmenden Integral einige Resultate ableiten. Diese werden uns dann die Fortsetzung der Überlegung sehr erleichtern.

Die Curvatura integra C eines Stückes G der Fläche: $z = z(x, y)$ mit der Randkurve c ist gegeben durch:

$$C = \int_G \frac{z_{xx} \cdot z_{yy} - z_{xy}^2}{(1 + z_x^2 + z_y^2)^2} \, d\sigma,$$

wo $d\sigma$ das Flächenelement bezeichnet. Damit unser Integral einen Sinn hat, ist vorausgesetzt, daß die Fläche $z = z(x, y)$ in dem Gebiete G mit ihren ersten Differentialquotienten stetig und das Krümmungsmaß stets endlich sei und daß das letztere sich beim Fortschreiten längs einer beliebigen Linie in G wenigstens abteilungsweise stetig ändere. Außerdem nehmen wir vorderhand ausdrücklich an, die betrachteten Flächen seien zweiseitig. Flächen, die diese Voraussetzung erfüllen, erhalte ich, wenn ich Stücke beliebiger Flächen so zusammensetze, daß die entstehende Fläche nirgends Ecken, Kanten oder dergl. hat. Am einfachsten übersieht man das bei den Rotationsflächen. Ich kann etwa einen Kreiscylinder von endlicher Höhe durch Halbkugeln schließen.

*) In analoger Weise kann man bei geschlossenen ebenen Kurven eine vollkommen stetige Deformation definieren. Bestimmt man dann als Curvatura integra der Kurve $\int k \, ds$, wo k die bekannte Krümmung, ds das Längenelement ist, so ergibt sich der hübsche Satz: *Die Gleichheit der Curvatura integra ist die hinreichende und notwendige Bedingung dafür, daß sich zwei geschlossene ebene Kurven vollkommen stetig in einander deformieren lassen.* (Vergl. Cap. I m. Diss.)

Nun haben wir gesehen, daß die Curvatura integra eines Flächenstückes, dessen Bild die Kugel einmal bedeckt, nur abhängt von der Randkurve und den Tangentialebenen in dieser. Daraus entnimmt man, daß es möglich ist, das Flächenintegral, durch das die Curvatura integra gegeben ist, darzustellen als Kurvenintegral über den Rand des Gebietes. Diese Umformung gelingt nun unschwer, wenn man bedenkt, daß das Integral der Curvatura integra nichts anderes darstellt als einen Flächeninhalt auf der Kugel. Einen solchen kann man leicht als Integral über den Rand darstellen und dieses Integral dann auf der Fläche deuten. Aber das so gefundene Integral gilt nur für Gebiete der Fläche, welche Pole der Kugel nicht enthalten. Das abzubildende Flächenstück darf also keine vertikalen Normalen, d. h. keine Extreme und Sattelpunkte enthalten. Enthält es solche Punkte doch, so sind diese durch kleine Ovale auszuschließen. Die Ovale und ihre Bilder hat man zu den Grenzen hinzuzurechnen. Wir nehmen nun an, die horizontalen Tangentialebenen berührten nur in Punkten, deren Krümmungsmaß von 0 verschieden ist, eine Annahme, die, wie man leicht erkennt, unwesentlich ist. Dann geben die Ovale um diese Punkte wieder Ovale auf der Kugel und der Beitrag, den eine Oval zur Gesamtkrümmung liefert, läßt sich von vorneherein bestimmen. Wir können dann die Ovale aus der Begrenzung des Kurvenintegrals fortlassen und die ihnen entsprechenden Werte zu dem Werte, den die eigentliche Begrenzung des Flächenstückes liefert, addieren. Man findet so:

$$\text{I.} \qquad C = \int_c \frac{z_x dz_y - z_y dz_x}{(1+W)\cdot W} + R_1 \cdot 4\pi,$$

$$\text{II.} \qquad C = -\int_{c_i} \frac{z_x dz_y - z_y dz_x}{W\cdot(W-1)} + R_2 \cdot 4\pi,$$

$$\text{III.} \qquad C = -\int_c \frac{z_x dz_y - z_y dz_x}{(z_x^2+z_y^2)\cdot W} + R_3 \cdot 2\pi,$$

wo:

$$W = \sqrt{1+z_x^2+z_y^2}$$

ist und die Indizes partielle Ableitungen nach den betreffenden Variablen bedeuten. Die Grenzkurve c ist stets so zu durchlaufen, daß das Gebiet, dessen Curvatura integra bestimmt werden soll, zur Linken liegt. Die drei angegebenen Werte für die Totalkrümmung unterscheiden sich nur durch die Stellung, die Nord- und Südpol in ihnen einnehmen und dementsprechend in der Bestimmung der Zusatzglieder.

In Formel I liefern die Punkte, die sich auf den Nordpol abbilden, keinen Beitrag, die sich auf den Südpol abbildenden Extreme E_s und Sattelpunkte S_s einen solchen von je $+4\pi$ resp. -4π, so daß ist:

$$R_1 = E_s - S_s.$$

In Formel II vertauschen Nordpol und Südpol ihre Rollen, sodaß, wenn wir die sich auf den Nordpol abbildenden Extreme und Sattelpunkte resp. mit E_n und S_n bezeichnen, wird:

$$R_2 = E_n - S_n.$$

Schließlich ist in Formel III:

$$R_3 = E - S = R_1 + R_2,$$

wo E die Gesamtzahl der Extreme, S die der Sattelpunkte ist. Durch eine leichte Umformung kann man den Integranden allein als Funktion der Richtungscosinus ξ, η, ζ auf dem Rande der betrachteten Fläche darstellen. Der erste Integrand wird beispielsweise:

$$\frac{\xi d\eta - \eta d\xi}{1+\zeta}.$$

Wir erhalten so den Satz: *Die Curvatura integra eines Flächenstückes hängt nur ab von dem begrenzenden Streifen und von der Zahl der im Inneren gelegenen Extreme und Sattelpunkte.*

Für eine geschlossene Fläche ergiebt sich:

Die Curvatura integra einer geschlossenen Fläche hängt nur ab von der Zahl der Extreme und Sattelpunkte.

Zerlegen wir nämlich durch eine geschlossene Kurve die Fläche in zwei Teile, so heben sich aus der Summe der Totalkrümmungen beider Teile die Integrale heraus, da diese über dieselbe Kurve in entgegengesetztem Sinne zu erstrecken sind. *Genauer ergibt sich für die Totalkrümmung einer geschlossenen Fläche:*

$$\begin{aligned} C &= R_1 \cdot 4\pi = (E_s - S_s) \cdot 4\pi \\ &= R_2 \cdot 4\pi = (E_n - S_n) \cdot 4\pi \\ &= R_3 \cdot 2\pi = (E - S) \cdot 2\pi, \end{aligned}$$

welche Relationen man leicht in Worte faßt. Es ergibt sich auch:

$$E_s - S_s = E_n - S_n = \frac{1}{2}(E - S).$$

Die Differenz der Extreme und Sattelpunkte ist also stets eine gerade Zahl; wir fügen hinzu *bei zweiseitigen Flächen*, denn diese Voraussetzung ist in unserem Resultate wesentlich enthalten.

Um nun die Totalkrümmung C zu bestimmen, könnten wir die Differenz $E - S$ zu bestimmen suchen, sie etwa in Beziehung setzen zur Charakteristik. Wir würden dann im Prinzip dasselbe Verfahren einschlagen wie Dyck. Wir verfahren aber anders: wir drücken die Totalkrümmung direkt aus durch die Charakteristik, indem wir alle Flächen

zurückführen auf doppelkurvenlose Flächen der Charakteristik $k = 2$, deren Totalkrümmung wir schon als 4π erkannt haben. Als Mittel zu dieser Reduktion dient die Äquivalentkrümmung.

§ 2.

Die Äquivalentkrümmung.

Wir gehen aus von der Betrachtung der Spitze eines Kreiskegels. (s. Fig. 1.) Wir legen in den Kegel eine Kugelschale FEG. Wir können uns nun die Kegelspitze entstanden denken dadurch, daß der Mittelpunkt M dieser Kugelschale auf der Geraden OH auf die Spitze O sich zubewegt, während ihr Radius so abnimmt, daß die Kugel dauernd den Kegel berührt, bis OM schließlich unendlich klein wird. Der Inhalt der Kugelschale wird dabei immer kleiner, aber ihre Curvatura integra ändert sich nicht. Es hindert uns nun nichts, festzusetzen, daß der Kegelspitze, in die die Kugelschale übergeht, wenn ihr Radius nach 0 hin abnimmt, dieselbe Krümmung zukomme, wie der Kugelschale. Da das die Curvatura integra einer der Spitze „äquivalenten" Fläche ist, so wollen wir diese Krümmung kurz: *„Äquivalentkrümmung"* nennen. Es entspricht also der Kegelspitze auf der Kugel ein endliches Flächenstück. Das steht vollkommen damit in Einklang, daß das Gaußsche Krümmungsmaß: $\lim_{f=0} \frac{f'}{f}$, wo f der Flächeninhalt einer den Punkt enthaltenden Fläche, f' der ihres sphärischen Bildes ist, für einen solchen Punkt ∞ ist.

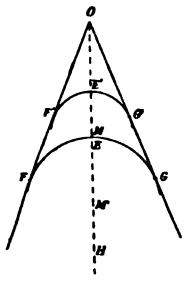


Fig. 1.

Was wir jetzt bei der Kreiskegelspitze gemacht haben, wollen wir allgemein durchführen.

Wir schließen die betreffende Singularität (Punkte oder Kurven) durch eine oder wenn nötig durch mehrere Kurven ein und denken uns diese Kurven so durchlaufen, daß die Singularität stets zur Linken liegt. Diese Kurven übertragen wir auf die Kugel, wo sie einen bestimmten Flächeninhalt umschließen, der durch ein Integral über die Kurven gegeben ist. Die die Singularität einschließenden Kurven lassen wir sich immer enger um die Singularität zusammenziehen und bilden schließlich den Grenzwert (indem wir irgend einen Prozeß zugrunde legen, der uns die Garantie gibt, diesen Grenzwert zu erhalten, bei einer Spitze etwa den größten geodätischen Abstand der Spitze von der Kurve nach 0 hin konvergieren lassen). Wenn dieser Grenzlage ein bestimmter Flächeninhalt auf der Kugel entspricht, so schreiben wir ihn der Singularität als Äquivalentkrümmung zu.

Die Äquivalentkrümmung ist also gleich dem Grenzwert des Flächeninhaltes, den das Bild einer die Singularität umschließenden Kurve auf der Kugel bestimmt, wenn diese Kurve sich in die Singularität zusammenzieht.

Dieser Grenzwert ist nach der Definition bei einer kegelförmigen Spitze identisch mit der Äquivalentkrümmung der Spitze des Tangentialkegels, da beide ja denselben Grenznormalenkegel haben. Bei der Spitze eines Kegels brauchen wir aber nicht erst den Grenzübergang auszuführen, um die Krümmung zu erhalten; denn das in § 1 abgeleitete Integral über irgend einen die Spitze einfach umschließenden Streifen ist gleich der Äquivalentkrümmung der Spitze, da ja das Krümmungsmaß des Mantels in jedem Punkte 0 ist. Die Äquivalentkrümmung ist also durch ein Integral über einen Streifen des Tangentialkegels gegeben.

Denken wir uns die Spitze des Tangentialkegels in dem Mittelpunkte der Einheitskugel liegen, so ist der zugehörige Normalkegel der sogenannte zum Tangentialkegel „polare" Kegel, und die Äquivalentkrümmung ist nichts anderes wie das von dem Polarkegel ausgeschnittene Kugelstück, also die „Appertur" des Polarkegels.

Wir wollen im folgenden nun einige Singularitäten in Bezug auf ihre Äquivalentkrümmung betrachten.

In einer wirklichen Spitze artet der Tangentialkegel in eine Gerade aus. Der zugehörige Normalkegel ist eine Ebene. Die Äquivalentkrümmung einer solchen Spitze ist also 2π.

Betrachten wir jetzt eine geschlossene Kante. Dieselbe wird eingeschlossen durch zwei Kurven. Die Integrale I, II oder III (§ 1) über diese Kurve geben in der Grenze die Äquivalentkrümmung. Hierbei müssen natürlich, wenn der Nord- oder Südpol innerhalb des der Kante äquivalenten Gebietes liegt, diese in richtiger Weise berücksichtigt werden. Das macht aber in speziellen Fällen keine Schwierigkeit. Diese Definition der Äquivalentkrümmung einer Kante ist gleichwertig der folgenden, die für die Anwendung und namentlich für die Anschauung meist bequemer ist. In einem Kantenpunkte nimmt die Normale zwei bestimmte Grenzwerte an. Zu der Ebene dieser Normalen — der Normalebene der Kante — legen wir durch den Mittelpunkt der Einheitskugel eine Parallelebene. Diese schneidet auf der Kugel einen größten Kreis aus. Dem Kantenpunkte schreiben wir als Äquivalent den zwischen den Bildpunkten der beiden Normalen liegenden kürzeren Teil dieses Kreisbogens zu. Wenn wir die beiden Normalen an der geschlossenen Kurve entlang laufen lassen, so bewegt sich der Kreisbogen auf der Kugel, und der von ihm beschriebene Flächenraum, in der richtigen Weise in positive und negative Teile zerlegt, ist die Äquivalentkrümmung der Kante. Diese Auffassung der Äquivalentkrümmung einer Kante, die sich in praxi mit der früher

entwickelten deckt, hat ihr gegenüber den Vorzug, daß sie einem beliebig aus einer Kante herausgegriffenen Stück eine bestimmte Äquivalentkrümmung zuschreibt.

Zwei Flächenmäntel mögen sich längs einer Kurve durchdringen; wir zerschneiden diese Mäntel längs dieser Kurve und heften je zwei der entstandenen Ränder so zusammen, daß zwei Kanten entstehen. Aus diesen Kanten denken wir uns durch die Normalebenen in einander entsprechenden Punkten R, R' und S, S' je ein Stück herausgeschnitten und wollen sehen, wie sich die Äquivalentkrümmungen dieser Stücke verhalten (s. Fig. 2). Die Normale auf einem Flächenstück bestimmen wir dabei willkürlich, die auf den anderen wählen wir dann so, wie wir sie auf der unzerschnittenen Fläche hätten bestimmen *müssen*. Dann ergibt eine einfache Betrachtung: Die Äquivalentkrümmungen der beiden Kurvenstücke sind absolut genommen gleich, haben aber entgegengesetztes Vorzeichen; denn die den beiden Kanten entsprechenden Flächeninhalte decken sich, werden aber entgegengesetzt durchlaufen. *Wenn wir also die sich in einer geschlossenen Doppelkurve durchdringenden Mäntel zerschneiden und in anderer Weise aneinanderheften, so haben die entstehenden Kanten entgegengesetzte Äquivalentkrümmung.* Eine einzelne Kurve auf einer Fläche liefert keinen Beitrag zur Totalkrümmung; die Kurven, die die geschlossene Doppelkurve auf den einzelnen Mänteln bestimmt, liefern also keinen Beitrag. Zerschneide ich die Fläche, bilde durch Umheftung die Kanten, und rechne ihre Äquivalentkrümmungen zur Curvatura integra hinzu, so liefert zwar jede der Kanten einen Beitrag, aber diese Beiträge heben sich fort, sodaß die Curvatura integra der Gesamtfläche durch unsere Umschaltung ungeändert bleibt. Wir bemerken noch, daß, wenn einer der sich durchdringenden Flächenmäntel eine Kante enthält, diese Kante beim Umschalten zwei Ecken liefert, deren Äquivalentkrümmungen auch entgegengesetzt gleich sind, die sich also auch gegenseitig in ihrem Einfluß zerstören.

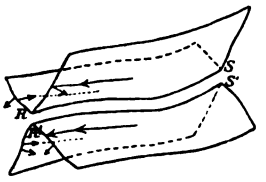


Fig. 2.

Im besonderen Grade erregt unsere Beachtung der Endpunkt einer Doppelkurve. Wir denken uns zwei übereinanderliegende ebene Blätter längs eines vom Punkte P ausgehenden Strahles zerschnitten und die Ränder nach Art eines Riemannschen Blattes überkreuz aneinander geheftet. Dieses Blatt werde dann in irgend einer Weise deformiert. In der Umgebung von P hat dann die Fläche etwa die in Fig. 3 gezeichnete Form. Den Tangentialkegel in P erhalten wir, wenn wir zwei Kegel

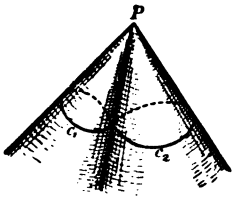


Fig. 3.

aneinanderlegen (im allgemeinen mit einer scharfen Kante), längs der Berührungslinie zerschneiden und überkreuz aneinanderheften. Diesen Tangentialkegel brauchen wir allein zu betrachten. Die Äquivalentkrümmung der Spitze ergibt sich, wenn wir die Gesamtspitze mit einer Kurve umgeben und längs dieser Kurve hin integrieren. Ihre Krümmung sei A. Bezeichnen wir die beiden Teile, in die diese Kurve durch die Doppelkurve geteilt wird, mit c_1 und c_2, und die Integrale über eine Kurve immer mit I und dem Index, durch den die Kurve bezeichnet wird, so ist:

$$A = I_1 + I_2.$$

Dabei wählen wir den Integranden passend nach § 1 I—III oder umgeben die Pole mit Kreisen, die wir als schon in c_1 oder c_2 enthalten ansehen. Von P aus zerschneiden wir die Flächenmäntel längs der Doppelkurve und heften die Ränder so aneinander, daß aus P zwei getrennte Spitzen entstehen. Hat die eine von ihnen die Äquivalentkrümmung A_1, die andere A_2, so ergibt sich leicht:

$$A = A_1 + A_2,$$

denn es ist: $A_1 = I_1 + I_3$, $A_2 = I_2 - I_3$, wo I_3 das Integral über den Kreisbogen c_3 ist, auf den sich die Kantenpunkte abbilden; derselbe ist, wenn wir den Normalen der beiden Kegel ihre ursprüngliche Richtung lassen, für die Punkte beider Kanten derselbe, wird aber bei der Integration in verschiedenen Richtungen durchlaufen. Wenn also eine Fläche eine endende Doppelkurve enthält und es nach dem Zerschneiden möglich ist, die Ränder so zu heften, daß an beiden Enden gleichzeitig zwei getrennte Spitzen entstehen, (siehe Fig. 4), so wird durch diese Umschaltung die Curvatura integra der Gesamtfläche nicht geändert, (wobei, wie immer, die Äquivalentkrümmung als ein Teil der Curvatura integra angesehen wird).

Fig. 4.

Die ausgeführte Zerschneidung und Umheftung einer endenden Doppelkurve, bei der im Ganzen vier Spitzen entstehen, ist aber durchaus nicht immer möglich. Wenn wir ein ebenes Doppelblatt wie vorhin längs eines Strahls von P aus zerschneiden, die Ränder kreuzweise aneinanderheften, jetzt aber nur bis zum Punkte P' (s. Fig. 5), von dort ab die direkt übereinanderliegenden Ränder miteinander verbinden, so erhalten wir eine Kurve, bei deren Umheftung, immer nur an einer Seite zwei getrennte Spitzen entstehen. Diese Doppelkurven nennen wir: *„Doppelkurven mit ungleicher Endenschaltung"*, die vorigen *„Doppelkurven mit gleicher Endenschaltung"*. Ihr Auftreten veranlaßt uns zu der Frage: Wenn ich das Ende einer Doppelkurve so umschalte, daß bloß eine Spitze

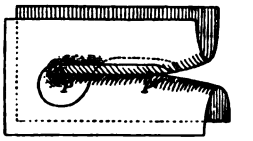


Fig. 5.

entsteht, wie verhält sich dann die Äquivalentkrümmung A' der entstehenden Spitze zu der A der ursprünglich gegebenen?

Durch einfache Betrachtungen findet man:

$$A = A' + 2\pi.$$

Diese Relation kann bei der Ableitung der Curvatura integra spezieller einseitiger Flächen zuweilen gute Dienste tun.

Noch eine kurze Bemerkung wollen wir hinzufügen. Die über die Äquivalentkrümmung zweier durch Umschaltung einer Doppelkurve entstandenen Kanten angestellte Betrachtung gilt auch in folgendem speziellen Falle. Wir denken uns eine Fläche doppelt belegt, zerschneiden die beiden Belegungen längs einer geschlossenen Kurve und heften die obere Belegung an die untere. Die dadurch entstehenden Kanten haben auch entgegengesetzt gleiche Äquivalentkrümmung; jedem Kantenpunkte entspricht ein Halbkreis auf der Kugel. Ein einzelner Kantenpunkt liefert zur Äquivalentkrümmung keinen Beitrag (vorausgesetzt natürlich, daß die Schnittkurve in ihm eine stetige Tangente hat). Zerschneiden wir aber jetzt von einem Punkte der Kante ausgehend die beiden Blätter abermals und heften die übereinanderliegenden Ränder zusammen, so haben die dadurch entstehenden zwei Spitzen zusammen die Äquivalentkrümmung 2π, wie man leicht sieht. Das Entstehen eines solchen Punktes vermehrt also die Curvatura integra um 2π.

§ 3.

Die Curvatura integra von zweiseitigen Flächen.

Wir wollen nun zunächst die Totalkrümmung einer beliebigen zweiseitigen Fläche bestimmen. Wir haben gesehen: Eine geschlossene Fläche vom Geschlechte $p = 0$, d. i. eine Fläche der Charakteristik $K = 2$, die selbst stetig ist, stetige Richtungscosinus der Normalen hat und deren Krümmungsmaß nirgends unendlich wird, hat die Totalkrümmung 4π. Nach Definition der Äquivalentkrümmung können wir die obigen Voraussetzungen fallen lassen bis auf die Forderung, daß die Fläche selbst stetig ist. Auch Flächen mit Kanten und Ecken der Charakteristik $K = 2$, die frei von Doppelkurven sind, haben die Curvatura integra 4π. Dabei verstehen wir hier unter der Curvatura integra C stets die Totalkrümmung der regulären Flächenmäntel vermehrt um die Äquivalentkrümmung der singulären Stellen. Unsere Definition der Äquivalentkrümmung tut ja nichts anderes, als die Stellen mit unendlichem Krümmungsmaß ersetzen durch Flächen mit endlicher Krümmung; sie rundet die Unstetigkeiten ab. Die Kurven auf der Kugel, welche die den Singularitäten entsprechenden Flächenstücke begrenzen, treten gleichzeitig als Begrenzung der Bilder der

regulären Flächenmäntel auf, so daß die Integrale über sie sich fortheben. Wenn wir ein einfach berandetes einfach zusammenhängendes Flächenstück doppelt belegt denken, und annehmen, die beiden Belege hingen an den Rändern zusammen, so hat diese Fläche die Totalkrümmung 4π. Bei einem so als doppelt belegt aufgefaßten Kugeloktanten hat z. B. jede Belegung die Krümmung $\frac{\pi}{2}$, jede Kante die Krümmung 0, jede der Ecken die Äquivalentkrümmung π, so daß diese Fläche in der Tat die Curvatura integra 4π hat.

Wir denken uns eine zweiseitige, doppelpunktlose Fläche mit der Curvatura integra C und der Charakteristik K doppelt belegt, ziehen durch beide Belege die σ nicht zerstückenden Rückkehrschnitte und heften die übereinanderliegenden Ränder aneinander. Wir erhalten eine Fläche mit 2σ geschlossenen Kanten. Hierbei ändert sich nach § 4 die Totalkrümmung nicht, bleibt also in Rücksicht auf die doppelte Belegung $2C$. Ziehen wir auf der entstandenen Fläche $2\sigma - 1$ die Kanten in bestimmter Weise verbindende, beide Belege durchdringende Schnitte und heften die übereinanderliegenden Ränder aneinander, so erhalten wir eine Fläche von der Charakteristik $K = 2$. Diese hat einerseits die Totalkrümmung 4π, anderseits die Krümmung $2C + 4\pi(2\sigma - 1)$; denn bei jedem der letzten Schnitte entstehen zwei der am Schlusse von § 4 besprochenen Punkte, die die Äquivalentkrümmung 2π haben. Mithin ist:

$$4\pi = 2C + 4\pi(2\sigma - 1),$$

also:

$$C = K \cdot 2\pi = (1 - p)4\pi$$

d. h. die Totalkrümmung einer geschlossenen zweiseitigen Fläche ohne Doppelpunkte ist gleich der mit 2π multiplizierten Charakteristik der Fläche.

Bevor wir nun die Formeln für Flächen mit Doppelkurven aufstellen, müssen wir einige Worte über Doppelkurven im allgemeinen sagen.

Die beiden Arten von nichtgeschlossenen Doppelkurven: Doppelkurven mit gleicher und solche mit ungleicher Endenschaltung haben wir schon im § 2 kennen gelernt. Die letzteren haben stets die Einseitigkeit zur Folge, kümmern uns hier also noch nicht. (In Fig. 5 ist ein Rückkehrschnitt eingezeichnet, längs dessen sich die Normale umkehrt).

Mannigfaltiger sind scheinbar die Arten der geschlossenen Doppelkurven. Denken wir uns in einem Punkte der Doppelkurve auf beiden Mänteln in einer bestimmten Richtung die Normalen errichtet und nun diese beiden Normalen miteinander die Doppelkurve durchlaufen, so können diese nach ihrer Rückkehr zum Ausgangspunkte acht verschiedene Lagen einnehmen. Wie man leicht sieht, sind dreimal je zwei von den erhaltenen Konfigurationen insofern identisch, als sie bei Umkehrung einer der

Anfangsrichtungen der Normalen oder bei Umkehr des Umlaufungssinnes der Doppelkurve ineinander übergehen. Es bleiben nur noch die fünf in Fig. 6 *a*—*e* dargestellten Fälle übrig. Fig. 6 *a* stellt die Anfangslage der Normalen dar, von denen die eine von der anderen durch Strichelung unterschieden ist. Die Normalen können in den Lagen *a*, *b*, *c*, *d*, *e* zurückkehren. Die Doppelkurven wollen wir entsprechend als Typus *a*—*e* unterscheiden. Fall *a* ist der gewöhnliche. Im Falle *b* kehren beide Normalen ihre Richtung um. Die zugehörige Fläche ist also einseitig, und bei ihr ist $k' \leqq 0$ ($\sigma' \geqq 2$) da die Spuren der Doppelkurve auf den Mänteln zwei Rückkehrschnitte der zweiten Art liefern. Im Falle *c* kehrt sich die eine Normale um, die Fläche ist also auch einseitig. Fall *d* und *c* gehören insofern zusammen, als bei ihnen die Normalen nach einmaligem Umlauf nicht auf den Ausgangsmänteln zurückkehren. Bei zweimaligem Umlauf haben bei Typus *d* die Normalen wieder ihre alte Richtung, bei *e* dagegen die entgegengesetzte. Erst nach viermaligem Umlauf nehmen in diesem Falle die Normalen wieder die Ausgangsrichtung an. Während Typus *d* sehr wohl auf zweiseitigen Flächen möglich ist, hat eine Doppelkurve vom Typus *e* die Einseitigkeit der zugehörigen Fläche im Gefolge.

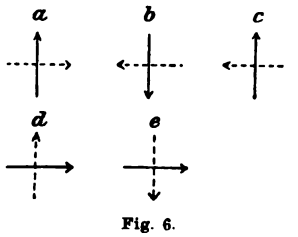


Fig. 6.

Aber eine einfache Bemerkung wird die Zahl dieser Typen abermals um drei verringern. Solange man die Fläche als ein starres Gebilde ansieht, steht jeder Typus gleichwertig neben dem anderen. Von dem allgemeinen Standpunkte der Analysis situs aus gehören aber Flächen, die durch vollkommen stetige Deformation in einander übergehen, zusammen, und Eigenschaften, die bei einer solchen Deformation nicht erhalten bleiben, fallen aus dem Rahmen unserer Betrachtung. Durch eine beliebig kleine, vollkommen stetige Deformation lassen sich aber die Typen *b*, *c*, *d* auf Typus *a* und *e* reduzieren. Nehmen wir der Einfachheit wegen wieder Stetigkeit der Tangentialebene an. Dann sind die Doppelkurven *b*, *c*, *d* nicht ohne Selbstberührungspunkte möglich, in denen sich die Flächenmäntel längs zweier Doppelkurven durchsetzen (s. Fig. 7a). Nun sieht man leicht, daß durch eine beliebig kleine Hebung oder Senkung eines Blattes der Selbstberührungspunkt verschwindet, und die in Fig. 7a gezeichnete Umgebung des Selbstberührungspunktes das in Fig. 7b dargestellte Aussehen gewinnt. Die beiden sich im Selbstberührungspunkte schneidenden Doppelkurven werden durch diese unendlich kleine Deformation also hintereinander geschaltet oder ge-

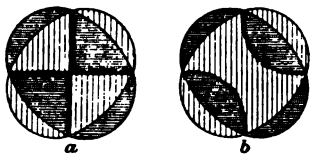


Fig. 7.

trennt. Mit den Selbstberührungspunkten verschwinden gleichzeitig die Typen *b, c, d*. Wir haben also bloß die Doppelkurven *a* und *e* zu betrachten, von denen die letztere auch aus den Betrachtungen dieses Paragraphen herausfällt, da sie nur bei einseitigen Flächen möglich ist. Von den offenen Doppelkurven untersuchen wir hier nur die mit gleicher Endenschaltung.

Die betrachtete Fläche enthalte *eine* geschlossene Doppelkurve. Wir zerschneiden die beiden sich durchdringenden Mäntel längs der Durchdringungskurve und heften so um, daß wir wieder eine geschlossene Fläche erhalten. Dabei kehren sich eventuell in einigen Flächenteilen die Normalen um; das ändert aber nur die Lage der Bilder dieser Teile auf der Kugel, nicht ihre Größe. Hiernach und nach dem in § 2 über solche Umschaltungen Abgeleiteten ist die Totalkrümmung der entstehenden Fläche gleich der der ursprünglichen. Läßt sich zeigen, daß die entstehende Fläche dieselbe Charakteristik hat wie die frühere, so folgt, daß eine geschlossene Doppelkurve die Totalkrümmung nicht ändert.

Dieser Nachweis läßt sich nun in der Tat leicht führen. Somit haben wir den Satz: Eine geschlossene, sich nicht schneidende Doppelkurve vom Typus *a* ändert die Totalkrümmung einer Fläche nicht; es ist immer noch:

$$C = K \cdot 2\pi.$$

Dieses Resultat läßt sich nun ohne weiteres auf n einander nicht schneidende Doppelkurven erweitern.

Ebenso leicht erledigen sich die nicht geschlossenen Doppelkurven mit gleicher Endenschaltung. Es sei bei einer Fläche bloß eine solche Doppelkurve vorhanden. Wir zerschneiden längs der Doppelkurve und heften so um, daß an beiden Enden zwei getrennte Spitzen entstehen. Das ist nach Definition immer möglich und ändert nach § 2 die Curvatura integra der Gesamtfläche nicht. Zerfällt die Fläche bei dieser Umschaltung, so sind auf den beiden entstehenden Flächen zusammen genau so viel Rückkehrschnitte wie auf der ursprünglichen; denn der Schnitt längs der Doppelkurve ist gleichwertig dem Schnitt längs der der Doppelkurve beliebig nahen Kurve *c* (s. Fig. 4). Wir können das System der Rückkehrschnitte so wählen, daß es diese geschlossene zerstückende Kurve *c* nicht schneidet. Bezeichnen wir die Totalkrümmungen der entstehenden beiden Flächen und die Zahl ihrer Rückkehrschnitte durch die Indices 1 bezw. 2, so ist:

$$\begin{gathered} C_1 = (1-\sigma_1)\,4\pi, \\ C_2 = (1-\sigma_2)\,4\pi, \\ C = C_1 + C_2 = \{2-(\sigma_1+\sigma_2)\} \cdot 4\pi, \\ \sigma_1 + \sigma_2 = \sigma, \\ C = (2-2\sigma) \cdot 2\pi + 4\pi. \\ C = K \cdot 2\pi + 4\pi. \end{gathered}$$

Dieselbe Formel ergibt sich, wenn c nicht zerstückt, denn dann enthält die neue Fläche einen Rückkehrschnitt weniger als die alte, hat aber dieselbe Totalkrümmung. Wir sehen also:

Eine offene Doppelkurve mit gleicher Endenschaltung erhöht die Curvatura integra einer Fläche um 4π.

Hat die Fläche n offene, einander nicht schneidende Doppelkurven so finden wir in ganz entsprechender Weise:

$$C = K \cdot 2\pi + n \cdot 4\pi,$$

d. h. die Curvatura integra wird durch diese n Kurven um $n \cdot 4\pi$ erhöht.

Hiernach hat die zweiblättrige Riemannsche Fläche auf der Kugel mit zwei Verzweigungspunkten die Curvatura integra 8π, denn bei ihr ist $K = 2$, $n = 1$. Das stimmt aufs beste mit der Anschauung überein.

Haben wir eine zweiblättrige Riemannsche Fläche auf der Kugel mit n Verzweigungsschnitten, so bestimmt sich das Geschlecht p dieser Fläche auf die einfachste Weise. Ihre Curvatura Integra C ist nämlich einerseits:

$$C = 8\pi,$$

anderseits nach vorigem Satze:

$$C = (1-p)4\pi + n \cdot 4\pi,$$

Mithin:

$$p = n - 1.$$

Das Geschlecht einer zweiblättrigen Riemannschen Fläche ist also um 1 kleiner als die Zahl der Verzweigungsschnitte.

Wir haben bisher angenommen die Doppelkurven schnitten sich nicht. Diese Annahme ist nun überflüssig, worauf wir hier aber nicht eingehen wollen (vergl. m. Diss. pg. 31). Auch sonstige Besonderheiten lassen sich mit den bisher besprochenen Methoden leicht behandeln. Das Resultat können wir dahin zusammenfassen:

Die Curvatura integra einer geschlossenen, zweiseitigen Fläche mit n nichtgeschlossenen Doppelkurven ist:

$$C = K \cdot 2\pi + n \cdot 4\pi.$$

Da wir schon früher gesehen hatten, daß die Totalkrümmung einer Fläche mit stetiger Tangentialebene, die frei ist von offenen Doppelkurven, ist:

$$C = (E-S) \cdot 2\pi,$$

so ergibt sich für die Charakteristik K:

$$K = E - S.$$

§ 4.

Die Curvatura integra von einseitigen Flächen. Die Polyeder. Ein Satz über Flächen von durchweg positiver Krümmung.

Unter einer *einseitigen* Fläche versteht man bekanntlich eine Fläche, auf der geschlossene Wege existieren, längs deren sich die Normale umkehrt. Auf einer bestimmten Fläche gibt es eine Maximalzahl σ'_M von solchen Wegen, die einander nicht schneiden. Die Schnitte längs dieser Wege zerstücken die Fläche nie. Ihre Charakteristik ist dann:

$$K = 2 - \sigma'_M.$$

Je zwei dieser Schnitte lassen sich zu einem Schnitte erster Art zusammenfassen, wie das schon in der Einleitung bemerkt wurde. Während nun bei geschlossenen zweiseitigen Flächen die Charakteristik stets gerade ist, kann sie hier jeden Wert $\leqq 1$ annehmen.

Für die einseitigen Flächen gebraucht man außer diesem Namen noch die Bezeichnung „Doppelfläche“*). Den beiden Bezeichnungen entspricht eine verschiedene Auffassung desselben Gegenstandes. Bei einer „einseitigen Fläche“ unterscheiden wir in *der Umgebung eines Punktes* innere und äußere Seite der Fläche, gerade wie bei den zweiseitigen Flächen. Der Unterschied liegt darin, daß wir bei den einseitigen Flächen von der äußeren zur inneren Seite gelangen können, ohne den Mantel zu durchdringen, was bei den zweiseitigen Flächen unmöglich ist. Die *gesamte* einseitige Fläche hat deshalb nicht zwei Seiten. Eine Kurve denkt man sich nicht „auf“ sondern „in“ der Fläche gezogen, so daß sie gleichzeitig auf den beiden Seiten erscheint. Ein Rückkehrschnitt zweiter Art ist nach einmaligem Umlauf geschlossen. Mit dem Namen „Doppelfläche“ verbindet man die Vorstellung, die einseitige sei durch eine zugehörige zweiseitige Fläche ersetzt. Tragen wir auf den Normalen einer Fläche nach beiden Seiten hin das beliebig kleine Stückchen ε ab, so bekommen wir eine Parallelfläche. Bei zweiseitigen Flächen besteht diese aus zwei getrennten Mänteln, bei einseitigen Flächen bloß aus einem Mantel. Man könnte füglich ein- und zweiseitige Flächen unterscheiden als Flächen mit ein- und zweischaligen Parallelflächen. Wenn man eine einseitige Fläche eine Doppelfläche nennt, so denkt man dabei an diese zweiseitige, einschalige Parallelfläche, bei der man sich ε nach 0 hin abnehmen denkt. Ein Rückkehrschnitt zweiter Art ist auf ihr nach zweimaligem Umlauf

*) Die Namen einseitige Fläche, Fläche mit umkehrbarer Normale, Fläche mit umkehrbarer Indikatrix sind gleichbedeutend. Wegen der dem letzten Namen zu Grunde liegenden Vorstellung, die die Einseitigkeit als eine „innere“ Eigenschaft der Fläche zeigt, vergl. Klein, Math. Ann. IX, pg. 479. Dyck, a. a. O., pg. 474.

geschlossen. Wir wollen dementsprechend die Bezeichnungen einseitige Fläche und Doppelfläche auseinanderhalten. Die letztere ist, wie wir noch einmal hervorheben, ein zweiseitiges Surrogat der einseitigen Fläche. Faßt man die einseitigen Flächen als Doppelflächen auf, so muß man konsequenter Weise auch alle zweiseitigen Flächen durch ihre unendlich benachbarten Parallelflächen ersetzen und ihnen die doppelte Charakteristik geben. Auch die Curvatura integra der zweiseitigen Flächen wäre dann zu verdoppeln. Übertragen wir die einseitigen Flächen auf die Kugel, so entsprechen jedem Flächenpunkte zwei einander diametral gegenüberliegende Punkte der Kugel. Die Totalkrümmung C' der einseitigen Fläche ist identisch mit der der Doppelfläche. Um sie mit der Curvatura integra zweiseitiger Flächen vergleichen zu können, müßten wir diese also mit zwei multiplizieren. Statt dessen wollen wir aber die Curvatura integra C' der einseitigen Flächen durch zwei dividieren und die erhaltene Zahl C fernerhin kurz Curvatura integra der einseitigen Fläche, C' Curvatura integra der Doppelfläche nennen, so daß ist: $C = \frac{1}{2} C'$.

Die Totalkrümmung C der einseitigen Fläche bestimmt sich also als die Hälfte der Totalkrümmung C' der Doppelfläche. Da diese aber zweiseitig ist, so gelten für sie die im vorigen Kapitel gefundenen Werte, und es handelt sich hier nur darum, die Charakteristik K' der Doppelfläche auszudrücken durch die K der einseitigen Fläche, und zu sehen, wie sich die Doppelkurven auf die Doppelfläche übertragen.

Nehmen wir an, auf der einseitigen Fläche seien alle Rückkehrschnitte erster Art durch die zweiter Art ersetzt. Deren Zahl sei σ_M'. Dann ist: $K = 2 - \sigma_M'$. Nach Ausführung dieser Schnitte gibt es keinen Weg mehr von der einen Seite auf die andere, die zugehörige Doppelfläche besteht dann aus zwei getrennten Blättern. Damit die Doppelfläche nicht in diese zerfällt, müssen wir noch eine Bahn offen lassen, die die beiden Seiten verbindet. Ich darf also bloß $\sigma_M' - 1$ Schnitte legen. Jeder dieser Schnitte erscheint auf der Doppelfläche als Rückkehrschnitt erster Art. Danach ist ihre Charakteristik K':

$$K' = 2 - 2(\sigma_M' - 1) = 2(2 - \sigma_M'),$$
$$K' = 2K.$$

Die Curvatura integra der Doppelfläche ist nun:

$$C' = K' \cdot 2\pi + m \cdot 4\pi,$$

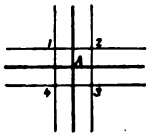


Fig. 8.

wo m in noch zu bestimmender Weise von den Doppelkurven der einseitigen Fläche abhängt. Eine geschlossene Doppelkurve A des Typus a liefert auf der Doppelfläche vier solche Kurven 1, 2, 3, 4 (s. Fig. 8). Einer geschlossenen

Doppelkurve vom Typus e entspricht auf der Doppelfläche *eine* Kurve vom Typus a. Denn erst nach dem Durchlaufen von 2, 3, 4 (Fig. 8) komme ich nach 1 zurück und zwar mit der ursprünglichen Konfiguration der Normale. Daraus folgt: Geschlossene Doppelkurven der einseitigen Flächen ändern die Curvatura integra der Doppelfläche nicht. Anders ist es natürlich mit den offenen Doppelkurven. Eine offene Doppelkurve a mit gleicher Endenschaltung liefert, wie die Anschauung lehrt, auf der Doppelfläche zwei entsprechende offene Doppelkurven 1, 2 und eine geschlossene Doppelkurve 3, die in Fig. 9a schematisch gezeichnet sind. In jedem Ende einer Doppelkurve b mit ungleicher Endenschaltung hat nun die Doppelfläche dasselbe Aussehen wie bei den Enden von a, nur die Lage der Enden in Bezug aufeinander ist gedreht, so daß einer Doppelkurve b mit ungleicher Endenschaltung zwei Doppelkurven mit gleicher Endenschaltung entsprechen (s. Fig. 9b). Jede offene Doppelkurve erhöht demnach die Curvatura integra der Doppelfläche um $2 \cdot 4\pi$. Demzufolge ist:

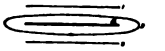


Fig. 9a.

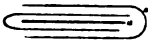


Fig. 9b.

$$C' = K' \cdot 2\pi + 2n \cdot 4\pi,$$

wo n die Zahl der offenen Doppelkurven der einseitigen Flächen ist, oder da:

$$C = \frac{1}{2} C', \quad K = \frac{1}{2} K',$$

$$C = K \cdot 2\pi + n \cdot 4\pi.$$

Mehrfache Punkte übertragen sich auf die Doppelfläche, sie ändern die Curvatura integra dieser und dementsprechend die der einseitigen Fläche nicht.

Wir haben also für die Curvatura integra der einseitigen Fläche dieselbe Formel gefunden, wie für die der zweiseitigen Flächen, wenn wir die Curvatura in der besprochenen Weise auffassen.

Die für die Totalkrümmung abgeleitete Formel gilt nun vermöge der Definition der Äquivalentkrümmung auch für Polyeder. Dort liefern aber nur die Ecken Beiträge zur Totalkrümmung; diese ist gleich der Summe der Äquivalentkrümmungen der Ecken. Die Äquivalentkrümmung einer Ecke ist nun nichts anderes wie der von der Polarecke gebildete räumliche Winkel. Die Summe dieser Winkel läßt sich in einfacher Weise ausdrücken durch die Anzahl der Kanten, Ecken, Flächen und sonstiger für das Polyeder charakteristischer Zahlen. Man erhält so die Curvatura integra C ausgedrückt einmal durch K und n (oder p und n), das andere Mal durch Kanten, Ecken, Flächen etc. Die Gleichsetzung gibt je nach den über das Polyeder gemachten Annahmen die Eulerschen Sätze oder die

Hesseschen Formeln die so auf einheitliche Weise aus einem höheren Prinzipe abgeleitet werden.

Bei Flächen, die unsere ursprünglichen Voraussetzungen erfüllen, die also frei von Kanten, endenden Doppelkurven etc. sind, ist:

$$K' = E' - S',$$

wo E', S' die Zahl der Extreme, resp. Sattelpunkte der Doppelfläche bezeichnet. Jedes Extrem und jedes Maximinimum der einseitigen Fläche liefert nun *zwei* entsprechende Punkte der Doppelfläche, so daß wir für die Charakteristik K, und die Anzahl E und S der Extreme und Sattelpunkte der einseitigen Fläche die Relation haben:

$$K = E - S.$$

Diese Relation gilt also für alle geschlossenen Flächen, die in unserem Sinne singularitätenfrei sind, d. h. für Flächen, die ganz im Endlichen liegen, keine Ränder, Kanten, Spitzen oder Verzweigungspunkte enthalten, die dementsprechend keine endenden, wohl aber geschlossene Doppelkurven enthalten dürfen.

Eine solche Fläche hat notwendig mindestens *ein* Maximum und *ein* Minimum, sodaß:

$$E \geqq 2$$

ist. Da nun nach obiger Relation:

$$S = E - K,$$

also

$$S \geqq 2 - K$$

ist, so ergibt sich beim Einsetzen der Werte von $K (K = 2, 1, 0, -1 \cdots)$ nur für $K = 2$

$$S \geqq 0,$$

für alle anderen K ist:

$$S > 0.$$

Alle Flächen, die unsere Voraussetzung erfüllen, außer Flächen $K = 2$, enthalten somit Sattelpunkte, also Gebiete negativer Krümmung. Das liefert den Satz:

Geschlossene, in obigem Sinne singularitätenfreie Flächen von durchweg positiver Krümmung haben stets denselben Zusammenhang wie die Kugel, d. h. sie enthalten keinen nicht zerstückenden Rückkehrschnitt.

Für die Curvatura integra von Flächen haben wir gefunden:

$$C = K \cdot 2\pi + n \cdot 4\pi.$$

Es fragt sich nun: *Wenn wir K und n beliebige Werte erteilen, die ihrer Bedeutung nach zulässig sind,* d. h. Werte $K \leqq 2$ und $n \geqq 0$, *entspricht dann einem solchen System ein geometrisches Gebilde?* Es ergibt sich somit das Problem, zu zeigen, daß diese Flächen alle existieren, oder aber die Unmöglichkeit der Existenz gewisser Arten darzutun.

§ 5.

Die bisher bekannten geschlossenen Flächen.

Wir wollen nun nicht bloß die Flächen in Bezug auf die Werte von K und n untersuchen, sondern wir wollen bei n unterscheiden Kurven mit gleicher und solche mit ungleicher Endenschaltung, bei K noch besonders berücksichtigen, ob die Flächen ein- oder zweiseitig sind.

Die *zweiseitigen Flächen* haben stets eine gerade Charakteristik, da ja in $K = 2 - 2\sigma - \sigma'$ die Zahl σ' stets gleich 0 ist. Die Repräsentanten dieser Flächen mit irgend einer Charakteristik erhält man, wenn man an die Kugel Henkel ansetzt. Jeder Henkel erhöht σ um 1. Die Kugel mit einem Henkel entspricht der Ringfläche. Geschlossene Doppelkurven vom Typus a erhält man dadurch, daß man an die Kugeln oder um die Henkel ringförmige Wülste legt und die sich berührenden Mäntel längs der Berührungskurve aufschneidet und überkreuz aneinanderheftet. Man kann auch einen Henkel die Kugelfläche eine gerade Anzahl von Malen durchdringen lassen. Offene Doppelkurven mit gleicher Endenschaltung erhält man, wenn man eine kugelförmige geschlossene Fläche eine Fläche mit der vorgeschriebenen Charakteristik berühren läßt längs einer offenen Kurve und nun genau wie oben bei den geschlossenen Kurven umschaltet. Hierher gehören auch die Riemannschen Blätter über der Kugel. Bei einer zweiblättrigen Riemannschen Fläche mit n Verzweigungsschnitten ist das Geschlecht:

$$p = n - 1,$$

die Charakteristik also:

$$K = 4 - 2n.$$

Diese Typen kann man nun leicht in mannigfachster Weise abändern. Geschlossene Doppelkurven vom Typus e und offene Doppelkurven mit ungleicher Endenschaltung können nicht vorkommen, da diese stets die Einseitigkeit zur Folge haben.

Weniger bekannt wie die Gestalten der zweiseitigen sind die der *einseitigen Flächen*. Wir könnten hier auch bei den Rückkehrschnitten erster Art im Anschluß an Dyck noch zwei Unterarten unterscheiden, worauf wir aber nicht eingehen wollen. In Bezug auf die Gestalten der einseitigen Flächen ist zu bemerken, daß diese Flächen, soweit sie ganz im Endlichen liegen, stets Doppelkurven enthalten müssen. Der Beweis findet sich für algebraische Flächen bei Darboux*). Allgemein läßt er sich leicht führen mit Hilfe der Betrachtungen des § 6 (vergl. m. Diss., pag. 43).

*) Darboux, Leçons sur la Théorie générale des surfaces, Bd. II, pg. 360.

Die bekannteste einseitige Fläche ohne Singularitäten ist die Fläche, die man erhält, wenn man einen Schlauch umbiegt, das eine Ende durch die Wandung hindurchsteckt und im Inneren weiterführt und dann die beiden Ränder aneinanderheftet*). Die Charakteristik dieser Fläche ist 0; die Curvatura integra entsprechend auch 0.

Einfacher und im engeren Anschluß an die zweiseitigen Flächen verfährt man, wenn man auch hier an die Kugel Henkel ansetzt, diese Henkel aber die Kugelfläche einmal durchdringen läßt (s. Fig. 10). Die Anzahl der Henkel ist wieder gleich σ. Die erhaltenen Flächen haben alle eine gerade Charakteristik. Die geschlossenen Doppelkurven vom Typus a lassen sich in bekannter Weise beliebig vermehren. Unter den Flächen, für die $n = 0$ ist, ist also keine Fläche ungerader Charakteristik.

Fig. 10.

Nehmen wir nun offene Doppelkurven zu Hilfe, so lassen sich einseitige Flächen beliebiger (auch ungerader) Charakteristik konstruieren. Die letzteren enthalten immer offene Doppelkurven ungleicher Endenschaltung.

Es sind sogar geschlossene algebraische Repräsentanten der Flächen von der Charakteristik 1 bekannt: Die Steinerschen Flächen mit einer oder drei reellen Doppelgeraden**).

Wir denken uns ein flaches Rotationsellipsoid, pressen die obere und untere Seite vom Äquator aus auf den Mittelpunkt zu zusammen, sodaß sich die nördliche und südliche „Hemisphäre" längs einer Strecke der Äquatorialebene berühren, zerschneiden längs dieser Strecke und heften diese Ränder kreuzweise aneinander (s. Fig. 11). Wir erhalten eine Fläche von der Charakteristik 1. Der eine Rückkehrschnitt zweiter Art ist aus Fig. 5 zu entnehmen. Die Fläche ist im wesentlichen identisch mit der Steinerschen Fläche mit einer reellen Geraden. Ihre Curvatura integra ist $C = 6\pi$. Die Doppelkurve ist eine solche mit ungleicher Endenschaltung. Durch Vermehrung dieser Doppelkurven a, a' (s. Fig. 12a) läßt sich σ' beliebig erhöhen. Je zwei solche Kurven können ersetzt werden durch eine mit gleicher Endenschaltung. Ich erhalte dieselbe, wenn ich die zwei Doppelkurven a, a' verschiebe (s. Fig. 12b) bis sie einander berühren, was in einem Selbstberührungspunkte der Fläche geschieht, und über diesen hin die Doppelkurven in

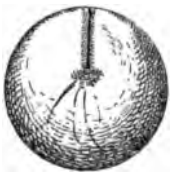


Fig. 11.

*) Vergl. F. Klein, Über Riemanns Theorie der algebr. Funktionen etc. Leipzig, 1882, pag. 80 unten.

**) Vergl. F. Klein, Bemerkungen über den Zusammenhang von Flächen, Math. Ann. VII. 1874, pag. 551, 554.

bekannter Weise umschalte (s. § 3, Fig. 7). Die Deformation ist vollkommen stetig. Der Prozeß ist angedeutet in Fig. 12 a—c. Das Vorhandensein der Doppelkurve a in Fig. 12c beeinflußt die Charakteristik der Fläche nicht. Lassen wir sie fort, so erhalten wir den Typus Fig. 12d

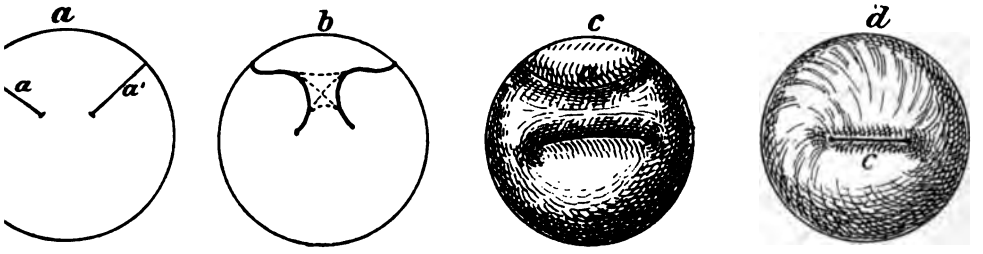


Fig. 12.

mit der Doppelkurve c mit gleicher Endenschaltung. Diese Doppelkurven c können wir beliebig vermehren, wodurch jedesmal die Charakteristik um zwei sinkt.

Durch geeignete Kombination der bisher gegebenen Typen lassen sich alle bekannten Flächen darstellen. Wie wir sehen, fehlen die singularitätenfreien Flächen mit ungerader Charakteristik, mit denen wir uns im nächsten Paragraphen beschäftigen wollen.

Wir brauchen uns zu dem Zwecke nur zu befassen mit der Fläche der Charakteristik 1. Denn wie wir aus der Kugel alle Flächen gerader Charakteristik ableiteten, so können wir aus einer Fläche $K = 1$ alle Flächen ungerader Charakteristik ableiten (durch Ansetzen von Henkeln etc.).

§ 6.

Konstruktion singularitätenfreier Flächen der Charakteristik 1.

Wie wir in § 4 erkannt haben, erfüllt die Charaktertstik aller singularitätenfreier Flächen die Relation:

$$K = E - S.$$

Diese Beziehung gibt uns nun ein Mittel, die Konstruktion von Flächen gegebener Charakteristik zurückzuführen auf die Konstruktion von ebenen Kurvensystemen mit bestimmten Eigeschaften. Denken wir uns nämlich eine Ebene $z = \text{const.}$ parallel mit sich im Sinne der wachsenden z bewegt, so schneidet sie aus einer Fläche in jedem Augenblick eine unter Umständen aus mehreren Teilen bestehende Kurve aus. Diese Kurve ändert sich bei der Bewegung der Ebene im allgemeinen vollkommen stetig. Nur bei Berührungen der Ebene mit der Fläche tritt eine Unstetigkeit in der Deformation des Kurvensystems ein, und zwar entsteht oder verschwindet bei Berührungen in einem Minimum resp. Maximum je eine ovalförmige Kurve, während über die Berührung

in einem Sattelpunkt hin eine Umschaltung in unserem System eintritt. Im allgemeinen werden sich dort zwei getrennte Kurven zu einer vereinigen, oder eine Kurve wird sich in zwei trennen (siehe Fig. 13). Findet das nun in jedem Sattelpunkte statt, so hat die Fläche notwendig eine gerade Charakteristik. Sind nämlich m_1 Minima, m_2 Maxima vorhanden, so müssen über $|m_1 - m_2|$ Sattelpunkt hin die m_1 Ovale in m_2 verwandelt werden. Jeder neue Sattelpunkt ändert die Zahl der Ovale, und da m_2 Ovale verschwinden und verschwinden müssen, so muß sein Einfluß wieder rückgängig gemacht werden, so daß die übrigen Sattelpunkte notwendig in gerader Zahl $2n$ vorhanden sind, also ist:

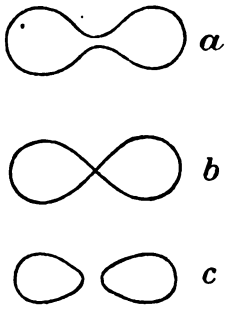


Fig. 13.

$$K = E - S = m_1 + m_2 - (|(m_1 - m_2)| + 2n),$$

was immer eine gerade Zahl ist.

Wenn wir also singularitätenfreie Flächen ungerader Charakteristik erhalten wollen, so müssen wir eine Umschaltung finden, die die Aufeinanderfolge der Teile *einer einzigen geschlossenen* Kurve ändert. Zu dem Zwecke betrachten wir eine Umschaltung genauer.

$A_{1,2}$, $B_{1,2}$, $C_{1,2}$, $D_{1,2}$, seien Stücke eines Kurvensystems in der Umgebung des Sattelpunktes (s. Fig. 14). Die Indizes 1, 2 bezeichnen die Enden der Stücke A, B, C, D. Wir nehmen an, während des Überganges über den Sattelpunkt fänden nicht gleichzeitig in anderen Teilen der Kurve Umschaltungen statt. Es ist keine Beschränkung, wenn wir annehmen, vor der Umschaltung sei A_2 mit B_2, nachher mit D_2 verbunden. Das Ende A_1 kann dann zusammenhängen mit B_1, C_1, D_1. Man sieht nun leicht, daß, wenn A_1 mit B_1 oder D_1 zusammenhängt, stets eine *Vereinigung resp. Trennung* von geschlossenen Kurven statt hat, daß dagegen, wenn A_1 mit C_1 verbunden ist, stets eine *Umschaltung innerhalb einer geschlossenen Kurve* stattfindet (s. Fig. 15). Im Augenblicke der Berührung haben wir in den ersten Fällen stets *eine* Kurve mit einem Doppelpunkt im Sattelpunkt (siehe Fig. 13), wogegen im letzten Falle dann A und C einerseits B und D anderseits *zwei* getrennten Kurven angehören, die sich im Sattelpunkte schneiden. Da diese Kurven notwendig noch einen anderen Punkt gemein haben müssen, der beim Übergang über den Sattelpunkt erhalten bleibt, so erkennt man hier unmittelbar, daß die geschlossenen Flächen ungerader Charakteristik Doppelkurven enthalten müssen (s. Fig. 16f). Um die verlangte Umschaltung

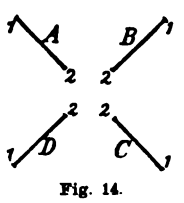


Fig. 14.

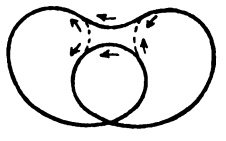


Fig. 15.

zu finden, brauchen wir also bloß bei zwei ebenen sich schneidenden Kurven einen Doppelpunkt aufzufassen als hervorgegangen aus der Berührung in einem Sattelpunkt und dementsprechend zwei Umschaltungen vorzunehmen. Die entstandene Kurve müssen wir dann durch vollkommen stetige Deformation unter Zuhilfenahme gewöhnlicher Umschaltungen aus Ovalen erzeugen und in solche wieder zurückverwandeln. Wir sehen, wie einem Kurvensystem in der Ebene eine Fläche entspricht, und welcher Art die Umschaltungen in dem Kurvensystem sein müssen, wenn die Fläche eine ungerade Charakteristik haben soll. Auf die Ableitung von weiteren Regeln, die sich auf dieses Erzeugen von bestimmten Flächen beziehen und deren Kenntnis uns des Probierens überheben würde, wollen wir hier verzichten.

Wir wollen jetzt sofort die Fläche mit der Charakteristik 1 betrachten.

Die Fläche $K = 1$, die vom Standpunkte der Analysis situs gleichwertig neben den anderen Flächen ungerader Charakteristik steht, besitzt, wie schon in der Einleitung hervorgehoben, vom Standpunkte der Geometrie aus noch ein besonderes Interesse. Wie nämlich bekannt, *ist die in projektivem Sinne aufgefaßte Ebene, „die projektive Ebene", eine Fläche mit der Charakteristik* 1*). Auf ihr existiert *ein* Rückkehrschnitt zweiter Art, der nicht zerstückt, und zwar kann jeder unpaare sich selbst nicht schneidende Kurvenzug als solcher fungieren. Nun ist bei geschlossenen einseitigen Flächen die Gleichheit der Charakteristik die notwendige und hinreichende Bedingung dafür, daß diese Flächen umkehrbar eindeutig aufeinander abbildbar sind. Die Fragestellung: „Existieren die singularitätenfreien Flächen ungerader Charakteristik?" ist also äquivalent mit der folgenden:

„Gibt es eine singularitätenfreie, ganz im Endlichen gelegene, geschlossene Fläche, auf die sich die projektive Ebene umkehrbar eindeutig abbilden läßt?"

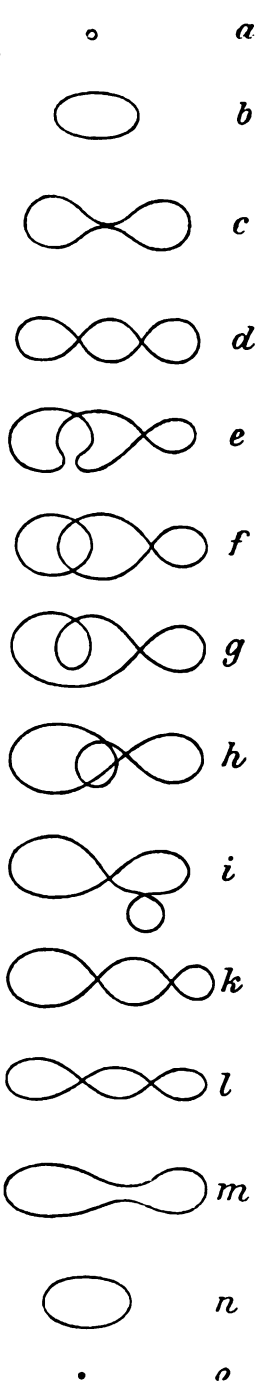


Fig. 16.

*) Vgl. schriftl. Mitteilg. von Schläfli an Klein in dem erwähnten Aufsatz. Math. Annalen VII, pag. 550.

Diese Fläche würde zur projektiven Ebene in demselben Verhältnis stehen, wie die Kugel zur komplexen Zahlenebene. Wie die Kugel uns den Zusammenhang der Funktionen auch im Unendlichen vor Augen führt, so würden wir auf der gesuchten Fläche die Gebilde der projektiven Geometrie in ihrer Gesamtausdehnung verfolgen können.

Die Existenz der verlangten Fläche $K = 1$ und damit die aller im Sinne der Analysis situs verschiedenen Flächen, wird bewiesen durch Aufstellung eines Kurvensystems, für das $E - S = 1$ ist. Wir setzen:

$$1) \quad E = 2, \quad S = 1,$$
$$2) \quad E = 4, \quad S = 3.$$

Wir wollen für diese beiden Wertepaare von E und S die zugehörigen Kurvensysteme und Flächen aufstellen, uns damit aber nicht begnügen, sondern für die in dem zweiten Wertsystem von E und S gehörige Fläche eine andere Erzeugungsart darlegen und ohne Zuhilfenahme der Relation $K = E - S$ einen einfachen Beweis dafür erbringen, daß die Fläche die

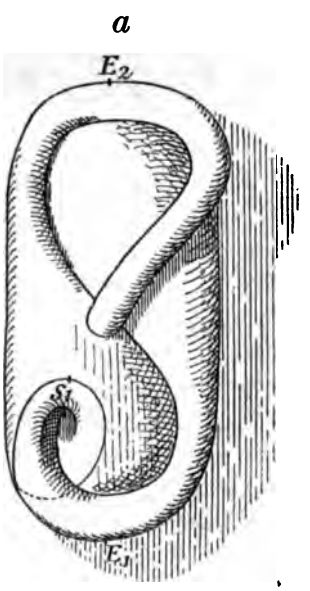


Fig. 17a.

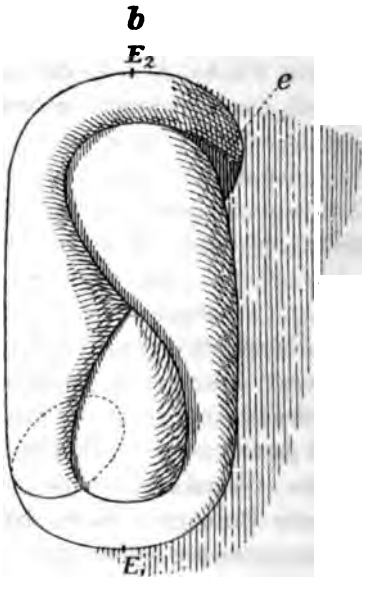


Fig. 17b.

Charakteristik 1, d. h. bloß einen Rückkehrschnitt zweiter Art hat. Denn wegen der selbständigen Bedeutung der Fläche scheint es wünschenswert, einen solchen Beweis zu haben, zumal da ein solcher zu einem tieferen Verständnis des Wesens der Fläche führt.

Das Kurvensystem, für das $E = 2$, $S = 1$ ist, das also aus *einem* Oval entsteht und über *ein* solches hin verschwindet, und bei dem *eine* Um-

altung stattfindet, wird dargestellt durch Fig. 16*a*—*o*. g. 16 *a*, *o* und *f* zeigen bezw. die Berührung im nimum, Maximum und im Sattelpunkt. Wir sehen, der letzteren zerfällt die Kurve in zwei geschlossene ile. Die übrigen Kurven zeigen, wie Fig. 16e aus em Oval entsteht, bezw. wie Fig. 16g sich in ein al verwandelt. Denken wir uns eine aus einem nkt entstehende Kurve das ganze System durchlaufen l die die Kurve tragende Ebene parallel mit sich bst verschoben, so beschreibt das Kurvensystem die wünschte Fläche von der Charakteristik 1. Fig. 17 a, b gen die Fläche und zwar zeigt Fig. 17 b die Rückte von Fig. 17 a, wie sie in einem hinter *a* aufstellten Spiegel erscheinen würde. Die Punkte E_1, , S_1 stellen bezw. das Minimum, das Maximum und 1 Sattelpunkt dar. Die eingetragene Kurve ist ein nitt, längs dessen sich die Normale umkehrt. Bei Einfachheit des Schnittsystems brauchen wir wohl die Gestalt der Fläche nicht näher einzugehen. r auf einen Umstand wollen wir noch aufmerksam chen. Mit der geometrischen Konstruktion unserer che ist die immerhin befremdliche Möglichkeit der istenz von singularitätenfreien Funktionen $f(x, y)$ eigt, deren reeller Wertevorrat ganz im Endlichen gt, und die zwei Extreme und ein Maximinimum en. Die Existenz einer solchen Funktion würde ch ihre Aufstellung zu beweisen sein. Die Gleichung serer Fläche, wie der folgenden, wird mindestens n sechsten Grade.

Wählen wir jetzt das Wertsystem $E = 4$, $S = 3$. ese Anordnung gibt uns die Möglichkeit, der Fläche ne dreizählige Symmetrieachse zu geben, indem wir len unseren Kurven einen Drehungsmittelpunkt von r Ordnung drei geben — (er ist in den Figuren gedeutet) —, also die drei Minima und die drei ttelpunkte auf die Ecken gleichseitiger Dreiecke, Maximum in die Drehungsachse selbst legen. f die Möglichkeit dieser Fläche machte mich Herr of. Hilbert aufmerksam, der aus der Gestalt der ppelkurve der schon beschriebenen Fläche ihre istenz erschloß. Das in Fig. 18*a*—*g* wiederge-

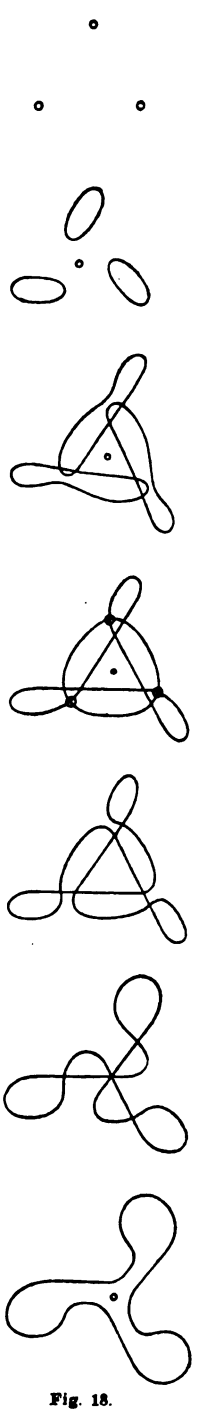


Fig. 18.

gebene Kurvensystem stellt die Schaltung in unserem Falle dar. Fig. 16d zeigt den Augenblick der Berührung in den drei Sattelunkten; in Fig. 18f sehen wir den dreifachen Punkt der Fläche. Die Kurve in Fig. 18g verwandelt sich in ein Oval und verschwindet dann.

Gerade wie die vorige Fläche baut sich auch diese aus dem Querschnittsystem auf. Da dieser Aufbau aber hier der Anschauung größere Schwierigkeiten macht, so wollen wir, wie schon gesagt, die Fläche auf eine der Anschauung zugänglichere Weise entstehen lassen und im Anschluß daran beweisen, daß sie bloß einen Rückkehrschnitt zweiter Art enthält, nach dessen Ausführung sie in ein ebenes Blatt verwandelt werden kann.

§ 7.

Eine spezielle Fläche der Charakteristik 1.

Bei der Erzeugung der dem Querschnittsystem Fig. 18 entsprechenden Fläche bitte ich den Leser, die Operationen an den Figuren 19 *a—d* zu verfolgen,. die sie viel einfacher darstellen, als es Worte zu tun vermögen.

a. Aufbau der Fläche $K = 1$.

Wir nehmen drei cylinderförmige Schläuche von der Länge l und dem in Fig. 19a sichtbaren Querschnitt, dessen Umfang gleichfalls l sei. Der Querschnitt ist eine geschlossene Kurve, die eine rechtwinklige Ecke hat. An der einen Seite verschließen wir die Schläuche durch ebene „Deckel", die die Erzeugenden der Cylinder rechtwinklig schneiden. Diese Cylinder legen wir mit ihren geradlinigen Kanten („Cylinderkanten" zum Unterschiede von „Deckelkanten") an die negativen Achsen eines rechtwinkligen xyz Koordinatensystems so, dass die an den offenen Schlauchseiten liegenden Enden der Cylinderkanten im Koordinatenanfang liegen, die beiden Tangentialebenen in den Kantenpunkten jede mit einer der Koordinatenebenen zusammenfällt und die Cylinder ganz in einem Oktanten $(-, -, -)$ liegen.

In der Umgebung des Anfangspunktes durchdringen sich die Cylinder. Den Teil jedes Cylinders, der in einem anderen liegt, schneiden wir fort und vereinigen die so entstehenden Ränder. Die dadurch *neu hinzugekommenen* Kanten und Ecken denken wir uns gleichmäßig abgerundet. Die Gerade, die mit den drei Achsen im Koordinatenanfang gleiche Winkel bildet, d. i. die Gerade, die im Koordinatenanfang auf der Ebene $x + y + z = 0$ senkrecht steht, ist dann eine dreizählige Symmetrieachse unserer so erzeugten, einem Dreibein ähnlichen Fläche, d. h. bei einer Drehung um 120^0 um diese Gerade kommt die Fläche mit sich selbst zur Deckung.

Die Randkurven der Deckel zeichnen wir nun dreimal, in jeder Koordinatenebene einmal, und zwar so, daß sie mit den Ecken im Koordinatenanfang liegen, und daß je eine von ihnen dort

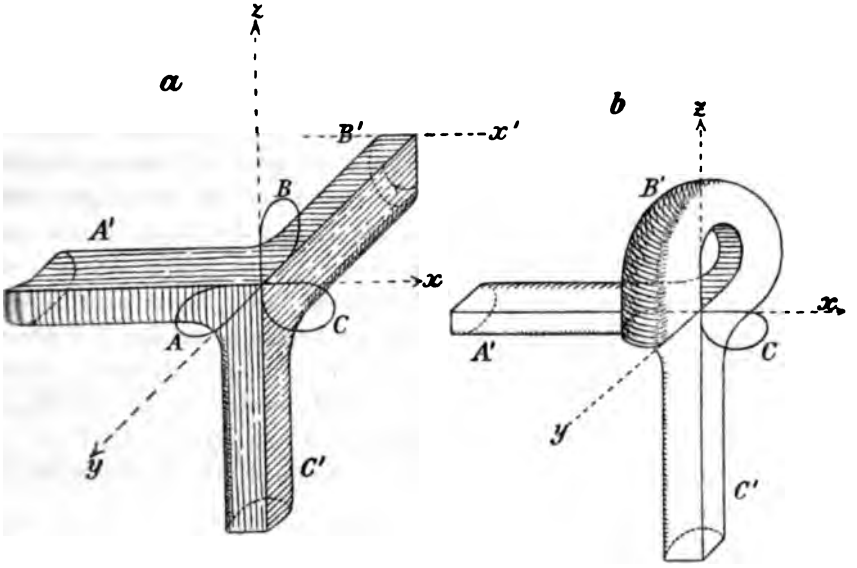


Fig. 19a, b.

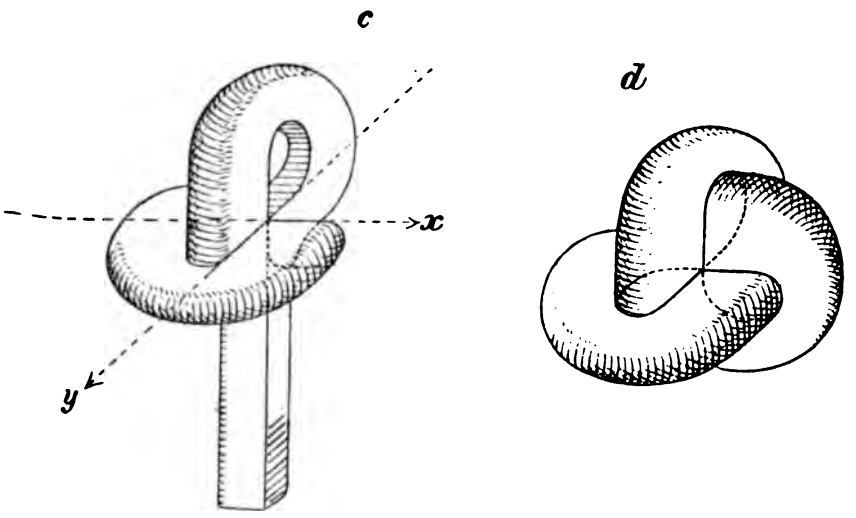


Fig. 19c, d.

die positive Y-Achse und die negative X-Achse, (A),
„ „ Z „ „ „ „ Y „ , (B),
„ „ X „ „ „ „ Z „ , (C),

zur Tangente hat und zudem die Symmetrie der Figur gewahrt bleibt. Wir nennen diese Kurven entsprechend A, B, C, die an der X, Y, Z-Achse liegenden Schläuche A', B', C'. Die Lage der Kurven A, B, C ist dann eindeutig bestimmt, wenn wir verlangen, daß der Deckel von B' durch eine Drehung um 90^0 auf uns zu um die Fig. 19a gezeichnete Parallele x' zur X-Achse in eine solche Lage kommt, daß sein Rand durch bloßes Verschieben längs der Y-Achse mit A zur Deckung kommt, und die Kurven B, C so liegen, daß die Symmetrie der Figur gewahrt bleibt.

Wir biegen nun den Schlauch B' um die Kurve B herum, so daß die Cylinderkante in B fällt (Fig. 19b). Der Endpunkt der Kante fällt dann in den Koordinatenanfang, da ja die Länge der Kante gleich dem Umfang von B ist. Die Längen der übrigen Erzeugenden dehnen wir so, daß der Deckel gerade in die XY-Ebene, sein Rand also in die Kurve A fällt. In dem Deckelrande soll der Schlauch auf der XY-Ebene senkrecht aufsitzen. Von den zwei Scharen von Tangentialebenen, welche die jetzt in B liegende Cylinderkante hat, soll die eine in die YZ-Ebene fallen, die andere auf dieser Ebene senkrecht stehen (vergl. Fig. 19b). In derselben Weise legen wir den Schlauch A' um die Kurve A, den Schlauch C' um die Kurve C (s. Fig. 19c, d).

In jeder der Kurven A, B, C liegt dann eine Deckelkante und eine Cylinderkante. Der Deckel des Schlauches B' bildet die Fortsetzung des auf der einen Seite der Cylinderkante von A' liegenden Mantelteiles, dessen Grenztangentialebenen ja auch alle in der XY-Ebene liegen. Der Schlauch B' selbst ist die Fortsetzung des anderen Mantelteiles von A'. Entsprechend liegen die Mäntel an den Kurven B und C. Wir zerschneiden nun längs der Kurven A, B, C die sechs Kanten und heften die Ränder kreuzweise aneinander. Damit ist die Fläche fertig, in den Kurven A, B, C durchdringt je ein Cylinder senkrecht ein ebenes Blatt. Der Anfangspunkt ist

Fig. 20a.

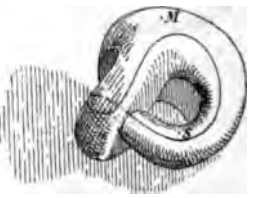


Fig. 20b.

ein dreifacher Punkt der Fläche. Die sich dort durchdringenden Mäntel haben die Koordinatenebenen zu Tangentialebenen. Wir sehen, unsere Fläche ist singularitätenfrei. Die Kurven A, B, C bilden in ihrer Ge-

mtheit die einzige Doppelkurve unserer Fläche. Gehen wir vom Koordi-tenanfang in der Richtung der negativen X-Achse aus, so durchlaufen r sie in der Reihenfolge A, B, C. Das Kurvensystem Fig. 18, das uns sprünglich die Fläche lieferte, erhalten wir, wenn wir die Ebene $+ y + z = \text{const.}$ über die Fläche hingleiten lassen.

Die Figuren 20a, b veranschaulichen die Fläche von verschiedenen iten gesehen. Denken wir uns die Fläche jetzt dem Kurvensystem g. 20 entsprechend liegen, d. h. so daß die Symmetrieachse senkrecht ht, so zeigt Fig. 20a die Fläche senkrecht von unten, Fig. 20b von r Seite, aber etwas schräg von oben gesehen. M ist das Maximum, , N_2, N_3 sind die Minima, S einer der Sattelpunkte.

b. Beweis, daß die Fläche die Charakteristik $K = 1$ hat.

Wir wollen nun den Nachweis erbringen, daß unsere singularitätenfreie iche wirklich durch einen nicht zerstückenden Rückkehrschnitt in ein nes Blatt verwandelt wird. In Fig. 20c ist ein Schnitt, längs dessen h die Normale umkehrt, eingezeichnet. ir hätten nun zu zeigen, daß diese rve von allen anderen Kurven mit selben Eigenschaft geschnitten wird. s würde jedoch bei so einfacher Wahl r Schnittkurve schwierig sein. Wir hlen deshalb die Schnittkurve weniger fach, aber so, daß wir aus allgemeinen tzen leicht folgern können, daß dieser hnitt der einzige ist. Wir m Zweck die Doppelkurve genauer trachten.

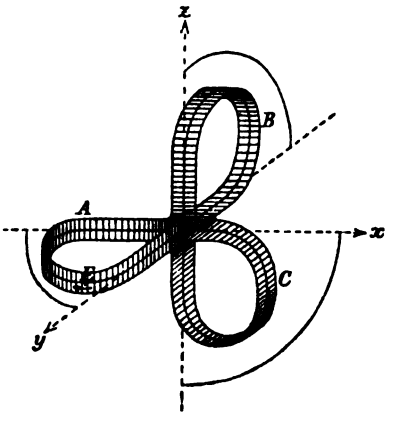


Fig. 21.

Fig. 21 stellt die Doppelkurve un-rer Fläche dar. Von den sich in der oppelkurve durchdringenden Mänteln sind nur die cylinderförmigen ge-ichnet, die anderen fallen zusammen mit den Koordinatenebenen. Wir ollen die gezeichneten Cylinderstreifen mit A', B', C', die ebenen Blätter it A'', B'', C'' bezeichnen. Dann sieht man an der Figur, daß über n Koordinatenanfang

Ebene A'' in die Streifen B' und C',
„ B'' „ „ „ C' „ A',
„ C'' „ „ „ A' „ B'

bergeht.

Errichten wir in einem Punkt der Doppelkurve auf einem Mantel

die Normale, sagen wir im Punkte E der Kurve A auf dem Streif und lassen wir die Normale die Doppelkurve durchlaufen, so daß w E aus zunächst in die X-Achse kommen, so durchläuft die Normal man an der Figur verfolgt:

die Kurve $A \perp A'$, $C \perp C''$, $B \perp B'$, $A \perp A''$ } erster Umlauf,

$C \perp C'$, $B \perp B''$, $A \perp A'$ } zweiter Umlauf.

Erst nach zweimaligem Umlauf kehrt die Normale wieder von $\perp A$ E zurück, aber in der der Ausgangsrichtung entgegengesetzten Ric Unsere Doppelkurve ist also eine Doppelkurve der Art e. Wenn v Punkte E anfangen, den Cylinder längs der Doppelkurve zu zerschr so werden wir, nachdem sich der Schnitt geschlossen hat, beide l längs der Doppelkurve zerschnitten haben.

Natürlich muß eine singularitätenfreie Fläche ungerader Charakt immer mindestens eine Doppelkurve vom Typus e enthalten, (wer die Typen b, c, d durch die in § 3, Figg. 7 geschilderte Deformati seitigt haben). Denn kommen bloß Kurven vom Typus a vor, s sich durch Umschaltung der Doppelkurven stets eine *zweiseitige* l gleicher Charakteristik finden (§ 3), diese muß also gerade sein.

Durchlaufen wir die Doppelkurve nun noch einmal von E ausg und denken wir uns dabei immer in einem bestimmten Mantel befi Wir kommen dann von A' nach C'', durchlaufen C in C'' und ko dann zum Koordinatenanfang zurück. Dort schneiden wir unsere f Bahn *in demselben Mantel.* Zerschneiden wir den Mantel längs des laufenen Weges, so wird durch den Schnitt längs C aus dem ebenen C'' ein einfach zusammenhängendes Stück herausgeschnitten, gera Stück, das früher den Deckel des Schlauches A' bildete. Zersch wir längs der ganzen Doppelkurve, so trennen wir gerade die drei l aus der Fläche aus. Um dies Zerfallen zu verhüten, schalten wi unserem Wege die drei in die ebenen Blätter fallenden Stücke aus, also, wenn wir von E zum erstenmal in den Koordinatenanfang ko sofort auf den Streifen B' über usw. Das ändert an der Drehun Normale nichts, da diese sich auf dem ebenen Blatt stets selbst p bleibt und dieser Weg nur dazu dient, die Fortschreitungsrichtung zu ändern. Lassen wir diese Teile des Weges fort, so erhält unser im Koordinatenanfang drei rechtwinklige Ecken. Wir durchlaufen

A in A',
B in B',
C in C'.

Längs dieses Weges kehrt sich die Normale um. Wir fassen ihn als Rückkehrschnitt auf und behaupten:

Nach Ausführung dieses Schnittes enthält die Fläche keinen Rückkehrschnitt zweiter Art mehr.

Ein Rückkehrschnitt zweiter Art muß Doppelkurven eine ungerade Zahl von Malen überschreiten. Nun ist die Doppelkurve auf dem Cylinderstreifen unpassierbar, und die in den ebenen Blättern liegenden Doppelkurventeile können nur eine gerade Anzahl mal überschritten werden, da sie die Fläche zerstücken. Rückkehrschnitte zweiter Art sind also unmöglich.

Daß unsere Fläche keine Rückkehrschnitte der ersten Art enthält, folgt nach der Zerschneidung direkt aus der Betrachtung der Fläche, wie auch aus dem Folgenden.

Nach Ausführung eines Rückkehrschnittes der zweiten Art soll unsere Fläche äquivalent sein einem einfach berandeten ebenen Blatte. Wir wollen die zerschnittene Fläche in ein solches deformieren. Eine Fläche wird im Sinne der Analysis situs nicht geändert, wenn wir durch einen Querschnitt, der Punkte desselben Randes verbindet, einfach zusammenhängende Stücke von der Fläche trennen (Fig. 22, Schnitt a). Wir ändern deshalb eine Fläche auch nicht, wenn wir durch einen Querschnitt, der in demselben Randpunkt anfängt und aufhört, einfach zusammenhängende Stücke aus einer Fläche ausschneiden (vergl. Fig. 22, Schnitt b). Wir dürfen deshalb die „Deckel", die durch solche Schnitte von der Fläche getrennt

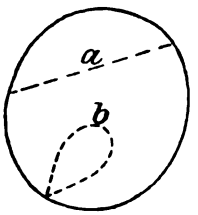


Fig. 22.

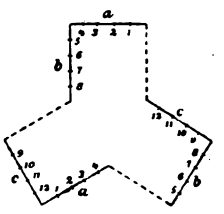


Fig. 23.

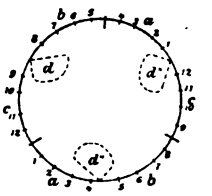


Fig. 24.

werden, aus der Fläche fortnehmen, ohne ihren Charakter zu ändern; wir vergrößern dadurch bloß die Randkurve. Wie wir nun unsere Fläche aus Fig. 19a erhielten, so können wir sie jetzt in die dort dargestellte Fläche zurückverwandeln; nur fehlen die Deckel, und die Fläche ist längs der in den Achsen liegenden Cylinderkanten aufgeschnitten. Infolgedessen können wir nun die Fläche in ein ebenes Blatt von der in Fig. 23 dar-

gestellten Form verbiegen. An der geschlossenen Fläche waren die Randstücke, die gleiche Buchstaben tragen, in der durch die Zahlen angedeuteten Weise aneinandergeheftet. Die punktierten Randstücke waren, jedes in sich selbst, durch die Deckel geschlossen. Deformieren wir noch dies ebene Blatt in ein Kreisblatt, in dem die punktierten Randstücke als Querschnitte wie in Fig. 22b erscheinen, so erhalten wir das in Fig. 24 dargestellte Bild, in dem wir die Räume d, d', d'' wieder durch die Deckel schließen können. Wir haben so nach Ausführung des einen Rückkehrschnittes unsere Fläche in ein ebenes Blatt deformiert, dessen Rand bei der Fläche in sich selbst geschlossen war, und damit ist unabhängig von der Relation $K = E - S = 1$ gezeigt, daß unsere Fläche in der Tat nur einen Rückkehrschnitt zweiter Art enthält.

Wir haben somit durch die Betrachtungen der letzten Paragraphen den Satz gewonnen:

Alle in Bezug auf die Charakteristik möglichen ein- und zweiseitigen Flächen haben singularitätenfreie Repräsentanten.

Oder in anderem Gewande:

Es gibt eine singularitätenfreie ganz im Endlichen gelegene geschlossene Fläche, auf die sich die projektive Ebene umkehrbar eindeutig abbilden läßt.

Wie bildet sich nun die projektive Ebene auf unsere Fläche ab? Da herrscht natürlich große Willkür. Am übersichtlichsten gestaltet sich die Abbildung, wenn wir den in den Cylindermänteln liegenden Teil der Doppelkurve der unendlich fernen Geraden zuordnen. Da ergibt sich sofort: Jeder unpaare Kurvenzug, der ja eine ungerade Anzahl mal durchs Unendliche geht, schneidet die Doppelkurve eine ungerade Zahl von Malen und ist deshalb ein Rückkehrschnitt zweiter Art. Das Entsprechende gilt von den paaren Kurvenzügen.

Damit wollen wir unsere Betrachtung über die Curvatura integra und die Topologie von Flächen schließen.

Anwendungen der Variationsrechnung auf partielle Differentialgleichungen mit zwei unabhängigen Variabeln.

Von

YOSHIYE aus Tokio.

In der Vorlesung über partielle Differentialgleichungen, während des inter-Semesters 1900—01, hat Herr Prof. Hilbert gezeigt, in welcher eise man die Methode der Variationsrechnung auf partielle Differentialeichungen anwenden kann. Nach seiner Idee habe ich die Rechnung rchgeführt, und dadurch die bekannten Gleichungen der Charakteristiken d die Bedingungen für Involutionssysteme bekommen.

Einfachheitshalber werde ich mich hier auf die partiellen Differentialeichungen erster und zweiter Ordnung beschränken.

Die partiellen Differentialgleichungen erster Ordnung mit zwei unabhängigen Variabeln.

Wir schreiben die gegebene partielle Differentialgleichung in der Form:

$$F(x, y, z, p, q) = 0.$$

ier sind p und q zur Abkürzung für $\frac{\partial z}{\partial x}$ und $\frac{\partial z}{\partial y}$ gesetzt.

Wir werden hier auch einige andere bekannte Bezeichnungen gebrauchen: B. $F_x, F_y, \cdots$ stehen für $\frac{\partial F}{\partial x}, \frac{\partial F}{\partial y}, \cdots$, während $x', y', \cdots$ die Differentialotienten von $x, y, \cdots$ nach einer unabhängigen Variabeln u bedeuten. Vir denken uns der Symmetrie wegen $x, y, \cdots$ als Funktionen von u). it ξ bezeichnen wir eine beliebige differentiierbare Funktion von u, und it u_0, u_1 zwei bestimmte Werte von u.

Dies gesetzt, bilden wir uns das Integral

$$\int_{u_0}^{u_1} \xi(px' + qy' - z')\, du.$$

Wenn z eine Funktion von x und y allein ist, so ist offenbar dieses Integral unabhängig vom Integrationswege von u_0 bis u_1, und zwar hat es den Wert Null, unabhängig von der Wahl der Funktion ξ. Umgekehrt: wenn dieses Integral unabhängig vom Integrationswege ist und immer den Wert Null hat, so wissen wir, wegen der willkürlichen Funktion ξ, daß $z' = px' + qy'$ sein muß, vorausgesetzt, daß $px' + qy' - z'$ stetig bleibt. Also ist z eine Funktion von x und y allein.

Dies zeigt uns, daß, wenn eine Lösung $z = z(x, y)$ der partiellen Differentialgleichung $F(x, y, z, p, q) = 0$ existiert, das obige Integral für dieses z identisch verschwindet, und dieses z genügt der Gleichung $F = 0$. Umgekehrt: wenn die fünf Funktionen x, y, p, q, z der Gleichung $F = 0$ genügen, und das obige Integral unabhängig vom Integrationswege ist, und den Wert Null hat, so existiert die Funktion $z = z(x, y)$, die der partiellen Differentialgleichung $F\left(x, y, z, \frac{\partial z}{\partial x}, \frac{\partial z}{\partial y}\right) = 0$ Genüge leistet.

Also ist das Problem der Integration der Differentialgleichung $F(x, y, z, p, q) = 0$ äquivalent mit dem Problem, daß man das Integral $\int_{u_0}^{u_1} \xi(px' + qy' - z')\,du$ vom Integrationswege unabhängig macht, unter der Bedingung $F(x, y, z, p, q) = 0$; d. h. nach der Regel der Variationsrechnung:

$$\delta \int_{u_0}^{u_1} [\xi(px' + qy' - z') + \lambda F]\,du = 0,$$

wo λ der Lagrangesche Faktor ist.

Diese Betrachtungsweise hat eine geometrische Bedeutung; nämlich: wir betrachten x, y, z, p, q als ein Flächenelement, d. h. einen Punkt x, y, z und eine Ebene $p(X-x) + q(Y-y) - (Z-z) = 0$, die den Punkt x, y, z enthält. Wenn diese Flächenelemente die obigen Bedingungen erfüllen, so bilden sie einen Flächenelementverein, dessen Elemente in der durch die Gleichung $F(x, y, z, p, q) = 0$ dargestellten Schar enthalten sind. Hier ist der Verein eindimensional, wie ein Streifen, der auf der Integralfläche liegt, weil wir x, y, z, p, q als Funktionen einer unabhängigen Variabeln u betrachten.

Das Verschwinden der Variation des Integrals kann man durch die Lagrangeschen Gleichungen ersetzen. Nach kleiner Modifikation lauten sie so:

$$\begin{aligned} 0 &= \lambda(F_x + pF_z) - \xi p', \\ 0 &= \lambda(F_y + qF_z) - \xi q', \\ 0 &= \lambda F_z + \xi', \\ 0 &= \lambda F_p + \xi x', \\ 0 &= \lambda F_q + \xi y'. \end{aligned}$$

Die Gleichungen mit der Bedingungsgleichung $F=0$ zusammen dienen zu die Funktionen x, y, z, p, q, λ zu bestimmen. Wenn diese Gleichungen füllt sind, so genügt z der partiellen Differentialgleichung

$$F\left(x, y, z, \frac{\partial z}{\partial x}, \frac{\partial z}{\partial y}\right) = 0;$$

der Tat bekommt man aus ihnen die Relation

$$0 = \lambda F' - \xi'(px' + qy' - z'),$$

obei $F=0$ oder $F'=0$, und ξ noch willkürlich ist; also folgt

$$px' + qy' - z' = 0,$$

h. die fünf Funktionen x, y, z, p, q genügen der Relation $F=0$ und n beiden andern $\frac{\partial z}{\partial x} = p$, $\frac{\partial z}{\partial y} = q$, was zu beweisen ist.

Um ξ' fortzuschaffen, wählen wir ξ so, daß die Gleichung $\lambda F_z + \xi' = 0$ entisch erfüllt wird. Dann haben wir hier vier homogene Gleichungen ı λ und ξ. Eliminieren wir λ und ξ zwischen diesen, so erhalten wir rei Gleichungen

$$\begin{vmatrix} F_x + pF_z & -p' \\ F_p & x' \end{vmatrix} = 0, \quad \begin{vmatrix} F_y + qF_z & -q' \\ F_q & y' \end{vmatrix} = 0, \quad \begin{vmatrix} F_p & x' \\ F_q & y' \end{vmatrix} = 0.$$

ddiert man die beiden ersten Gleichungen und vergleicht sie mit der leichung $F(x, y, z, p, q) = 0$, so findet man, daß $px' + qy' - z' = 0$ ist, orausgesetzt $F_z + 0$.

Diese drei Gleichungen kann man in die Form bringen:

$$\frac{dx}{F_p} = \frac{dy}{F_q} = \frac{-dp}{F_x + pF_z} = \frac{-dq}{F_y + qF_z}.$$

Diese drei Gleichungen mit $F=0$ zusammen bestimmen die vier unktionen y, z, p, q als Funktionen von x.

Von der Gleichung

$$0 = \lambda F' - \xi'(px' + qy' - z')$$

issen wir, daß man die Relation $F=0$ durch die Gleichung

$$px' + qy' - z' = 0$$

setzen kann, mit der Bedingung, daß die Anfangswerte von x, y, z, p, q ie Gleichung $F=0$ erfüllen, weil $F'=0$ uns nur die Relation $F=\text{const.}$ ibt. Also hat man zur Bestimmung von y, z, p, q als Funktionen von x ie Gleichungen:

$$\frac{dx}{F_p} = \frac{dy}{F_q} = \frac{dz}{pF_p + qF_q} = \frac{-dp}{F_x + pF_z} = \frac{-dq}{F_y + qF_z}$$

nter der Bedingung $F(x_0, y_0, z_0, p_0, q_0) = 0$, wo x_0, y_0, z_0, p_0, q_0 die Anngswerte bedeuten.

Wir werden jetzt den Fall betrachten, wo F_z identisch verschwindet. Hier bekommt man

$$0 = \lambda F_x - cp',$$
$$0 = \lambda F_y - cq',$$
$$0 = \lambda F_p + cx',$$
$$0 = \lambda F_q + cy'$$

wo c eine Konstante ist. Die Elimination von λ und c gibt uns

$$\begin{vmatrix} F_x & -p' \\ F_p & x' \end{vmatrix} = 0, \quad \begin{vmatrix} F_y & -q' \\ F_q & y' \end{vmatrix} = 0, \quad \begin{vmatrix} F_p & x' \\ F_q & y' \end{vmatrix} = 0.$$

Aus den beiden ersten erhalten wir die Relation

$$F' = 0.$$

Also haben wir zur Bestimmung von y, z, p, q die Gleichungen:

$$\frac{dx}{F_p} = \frac{dy}{F_q} = \frac{dz}{pF_p + qF_q} = \frac{-dp}{F_x} = \frac{-dq}{F_y}$$

mit der Bedingung $F(x_0, y_0, p_0, q_0) = 0$.

Diese gewöhnlichen Differentialgleichungen zur Bestimmung von y, z, p, q, definieren die eindimensionalen Flächenelementvereine, die zur Schar $F(x, y, z, p, q) = 0$ gehören. (Hier schließen wir die Lösungen aus, für welche F_p, F_q, $F_x + pF_z$, $F_y + qF_z$ gleichzeitig verschwinden, d. h. die singulären Lösungen.) Diese Elementvereine nennt man charakteristische Streifen. Alle Integralflächen, welche das Flächenelement x_0, y_0, z_0, p_0, q_0 enthalten, enthalten auch alle Flächenelemente des charakteristischen Streifens, der von diesem Elemente ausgeht. Wir haben gerade die Differentialgleichungen der charakteristischen Streifen bekommen, durch die Anwendung der Variationsrechnung.

Die partiellen Differentialgleichungen zweiter Ordnung.

Die partiellen Differentialgleichungen zweiter Ordnung kann man genau so behandeln wie die partiellen Differentialgleichungen erster Ordnung. Wir bezeichnen die gegebene Gleichung mit

$$F(x, y, z, p, q, r, s, t) = 0,$$

wo r, s, t bezw. für $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}$, $\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}$, $\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}$ stehen.

Anstatt $\int \xi (px' + qy' - z')\, du$ tritt hier das Integral

$$\int_{u_0}^{u_1} [\xi^{(1)}(px' + qy' - z') + \xi_1^{(2)}(rx' + sy' - p') + \xi_2^{(2)}(sx' + ty' - q')]\, du$$

auf, wo alle ξ willkürliche Funktionen von u bedeuten.

Nun suchen wir alle eindimensionalen Krümmungselementvereine, die der Schar $F(x, y, z, p, q, r, s, t) = 0$ angehören; oder was dasselbe heißt: das obige Integral soll vom Integrationswege unabhängig gemacht werden, (es muß sogar immer Null sein) unter der Bedingung $F = 0$. Daraus folgen die Lagrangeschen Gleichungen. Wenn man setzt:

$$\left(\frac{\partial F}{\partial x}\right) = F_x + pF_z + rF_p + sF_q,$$
$$\left(\frac{\partial F}{\partial y}\right) = F_y + qF_z + sF_p + tF_q,$$

so bekommt man durch eine kleine Rechnung ähnlich wie im Falle der Differentialgleichungen erster Ordnung die folgenden Gleichungen:

$$\begin{vmatrix} \left(\frac{\partial F}{\partial x}\right) & -r' & -s' \\ F_r & x' & 0 \\ F_t & 0 & y' \end{vmatrix} = 0, \quad \begin{vmatrix} \left(\frac{\partial F}{\partial y}\right) & -s' & -t' \\ F_r & x' & 0 \\ F_t & 0 & y' \end{vmatrix} = 0, \quad \begin{vmatrix} F_z & y' & x' \\ F_r & x' & 0 \\ F_t & 0 & y' \end{vmatrix} = 0,$$

$$F(x, y, z, p, q, r, s, t) = 0, \quad rx' + sy' - p' = 0, \quad sx' + ty' - q' = 0.$$

In der Tat bekommt man nur diese sechs Gleichungen zur Bestimmung von sieben Größen y, z, p, q, r, s, t als Funktionen von x, wenn man x wieder als die unabhängige Variabele betrachtet. Die Gleichung

$$px' + qy' - z' = 0$$

ist nicht darin mitzurechnen, denn man kann diese aus den obigen sechs Gleichungen herleiten. Multipliziert man die ersten Reihen der Determinanten mit x', y', s' und addiert sie, multipliziert dann die zweite und die dritte Reihe der resultierenden Determinante, und addiert man sie alle zur ersten Reihe, so bekommt man, wegen

$$rx' + sy' - p' = 0, \quad sx' + ty' - q' = 0,$$

die Gleichung:

$$\begin{vmatrix} F' + (px' + qy' - z')F_z & 0 & 0 \\ F_r & x' & 0 \\ F_t & 0 & y' \end{vmatrix} - 0$$

d. h.

$$F' + (px' + qy' - z')F_z = 0.$$

Dieser Gleichung sagt aus, daß man die Gleichung $F = 0$ durch die Relation $px' + qy' - z' = 0$ und $F(x_0, y_0, z_0, p_0, q_0, r_0, s_0, t_0) = 0$ ersetzen kann, wo $x_0, y_0, \cdots$ Anfangswerte von $x, y, \cdots$ bedeuten.

Diesen eindimensionalen Elementverein nennt man auch Charakteristik. Weiteres über die Charakteristiken werde ich nicht angeben.

Ganz genau so wie hier kann man die allgemeineren partiellen Dif-

ferentialgleichungen n^{ter} Ordnung behandeln. Das Resultat werde ich nu aufschreiben.

Schreibt man

$$p_1^{(n)} \quad p_2^{(n)} \cdots p_n^{(n)} \quad p_{n+1}^{(n)}$$

für die Größen

$$\frac{\partial^n z}{\partial x^n} \quad \frac{\partial^n z}{\partial x^{n-1}\partial y} \cdots \frac{\partial^n z}{\partial x \partial y^{n-1}} \quad \frac{\partial^n z}{\partial y^n}$$

und setzt man

$$\left(\frac{\partial F}{\partial x}\right) = F_x + pF_z + rF_p + sF_q + \cdots + p_1^{(n)} F_{p_1^{(n-1)}} + \cdots + p_n^{(n)} \quad F_{p_n^{(n-1)}}$$

$$\left(\frac{\partial F}{\partial y}\right) = F_y + qF_z + sF_p + tF_q + \cdots + p_2^{(n)} F_{p_1^{(n-1)}} + \cdots + p_{n+1}^{(n)} F_{p_n^{(n-1)}},$$

so bekommt man die Gleichungen

$$0 = \begin{vmatrix} \left(\frac{\partial F}{\partial x}\right) & -\left(p_1^{(n)}\right)' & -\left(p_2^{(n)}\right)' \cdots & -\left(p_n^{(n)}\right)' \\ F_{p_1^{(n)}} & x' & 0 \quad \cdots & 0 \\ F_{p_2^{(n)}} & y' & x' \quad \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ F_{p_n^{(n)}} & 0 & \cdots & x' \end{vmatrix},$$

$$0 = \begin{vmatrix} \left(\frac{\partial F}{\partial y}\right) & -\left(p_2^{(n)}\right)' & -\left(p_3^{(n)}\right)' \cdots & -\left(p_{n+1}^{(n)}\right)' \\ F_{p_1^{(n)}} & x' & 0 \quad \cdots & 0 \\ F_{p_2^{(n)}} & y' & x' \quad \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ F_{p_n^{(n)}} & 0 & \cdots & x' \end{vmatrix},$$

$$0 = \begin{vmatrix} F_{p_1^{(n)}} & x' & 0 \cdots & 0 \\ F_{p_2^{(n)}} & y' & x' \cdots & 0 \\ F_{p_3^{(n)}} & 0 & y' \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ F_{p_n^{(n)}} & 0 & 0 \cdots y' & x' \\ F_{p_{n+1}^{(n)}} & 0 & 0 \cdots 0 & y' \end{vmatrix}$$

und

$$
\begin{aligned}
&px' + qy' - z' = 0,\\
&rx' + sy' - p' = 0,\\
&sx' + ty' - q' = 0,\\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\\
&p_1^{(n)}x' + p_2^{(n)}y' - \left(p_1^{(n-1)}\right)' = 0,\\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\\
&p_n^{(n)}x' + p_{n+1}^{(n)}y' - \left(p_n^{(n-1)}\right)' = 0,
\end{aligned}
$$

r Bestimmung der Funktionen $y, z, p, q, \cdots, p_{n+1}^{(n)}$, unter der Bedingung $=0$ für die Anfangswerte dieser Funktionen. Also haben wir $\frac{n(n+1)}{2}+3$ eichungen zur Bestimmung von $\frac{(n+1)(n+2)}{2}+1$ Funktionen.

Dieses System der gewöhnlichen Differenlialgleichungen erster Ordnung stimmt die Charakteristiken der partiellen Differentialgleichung $F=0$.

e Bedingungen dafür, daß zwei partielle Differentialgleichungen eine gemeinsame Lösung haben.

Durch unsere Methode kann man auch die Bedingungen für das Intionssystem herleiten. Wir werden uns zuerst mit partiellen Differentialichungen erster Ordnung beschäftigen, welche so lauten:

$$
\begin{aligned}
F(x, y, z, p, q) &= 0,\\
G(x, y, z, p, q) &= 0.
\end{aligned}
$$

Damit diese beiden Gleichungen eine Lösung gemein haben, ist es demselben Grunde wie früher nothwendig, daß die erste Variation des egrals

$$J = \int_{u_0}^{u_1} [\xi(px' + qy' - z') + \lambda F + \mu G]\, du$$

schwindet. (Hier ist μ ebenso wie λ ein noch unbestimmter Lagrangescher ktor.)

Die Variationsrechnung gibt uns dafür ein System von gewöhnlichen ferentialgleichungen, das so lautet:

$$
\begin{aligned}
&\lambda\left(\frac{\partial F}{\partial x}\right) + \mu\left(\frac{\partial G}{\partial x}\right) - \xi p' = 0,\\
&\lambda\left(\frac{\partial F}{\partial y}\right) + \mu\left(\frac{\partial G}{\partial y}\right) - \xi q' = 0,\\
&\lambda F_p + \mu G_p + \xi x' = 0,\\
&\lambda F_q + \mu G_q + \xi y' = 0,
\end{aligned}
$$

wo $\left(\frac{\partial F}{\partial x}\right)$ für den Ausdruck $\frac{\partial F}{\partial x} + p\frac{\partial F}{\partial z}$ steht. (Wie früher ist ξ so zu bestimmen, daß $0 = \lambda F_s + \mu G_s + \xi'$ identisch erfüllt wird; also ist ξ bis auf eine Konstante bestimmt.)

Wir sind jetzt imstande die Relationen abzuleiten, die von ξ, λ, μ frei sind: diese Relationen sind die gesuchten Bedingungen.

Zu diesem Zwecke lösen wir die erste und dritte Gleichung nach λ und μ auf:

$$\lambda\begin{vmatrix}\left(\frac{\partial F}{\partial x}\right) & \left(\frac{\partial G}{\partial x}\right)\\ F_p & G_p\end{vmatrix} = \xi\begin{vmatrix} p' & \left(\frac{\partial G}{\partial x}\right)\\ -x' & G_p\end{vmatrix},\quad \mu\begin{vmatrix}\left(\frac{\partial F}{\partial x}\right) & \left(\frac{\partial G}{\partial x}\right)\\ F_p & G_p\end{vmatrix} = \xi\begin{vmatrix}\left(\frac{\partial F}{\partial x}\right) & p'\\ F_p & -x'\end{vmatrix}.$$

Die zweite und vierte Gleichung geben uns auch

$$\lambda\begin{vmatrix}\left(\frac{\partial F}{\partial y}\right) & \left(\frac{\partial G}{\partial y}\right)\\ F_q & G_q\end{vmatrix} = \xi\begin{vmatrix} q' & \left(\frac{\partial G}{\partial y}\right)\\ -y' & G_q\end{vmatrix},\quad \mu\begin{vmatrix}\left(\frac{\partial F}{\partial y}\right) & \left(\frac{\partial G}{\partial y}\right)\\ F_q & G_q\end{vmatrix} = \xi\begin{vmatrix}\left(\frac{\partial F}{\partial y}\right) & q'\\ F_q & -y'\end{vmatrix}.$$

Wegen der Relationen $G = 0$, und $px' + qy' - z' = 0$ verschwindet die Summe der beiden Determinanten

$$\begin{vmatrix} p' & \left(\frac{\partial G}{\partial x}\right)\\ -x' & G_p\end{vmatrix} \quad \text{und} \quad \begin{vmatrix} q' & \left(\frac{\partial G}{\partial y}\right)\\ -y' & G_q\end{vmatrix}.$$

Dies gibt uns die gesuchte Bedingung

$$\begin{vmatrix}\left(\frac{\partial F}{\partial x}\right) & \left(\frac{\partial G}{\partial x}\right)\\ F_p & G_p\end{vmatrix} + \begin{vmatrix}\left(\frac{\partial F}{\partial y}\right) & \left(\frac{\partial G}{\partial y}\right)\\ F_q & G_q\end{vmatrix} = 0.$$

Hier haben wir nur die beiden ersten Gleichungen gebraucht; die beiden anderen Gleichungen geben uns genau dieselbe Bedingung wie diese. Diese Bedingung für das Involutionssystem stimmt mit der bekannten Bedingung überein: wenn z in F und G nicht vorhanden ist, so geht die linke Seite in den bekannten Klammerausdruck über.

Bei den partiellen Differentialgleichungen zweiter Ordnung ist die Sache etwas anders. Hier haben wir das Integral

$$J = \int_{u_0}^{u_1} [\xi(px' + qy' - z') + \eta(rx' + sy' - p') + \zeta(sx' + ty' - q') + \lambda F + \mu G]du$$

zu behandeln. (Früher haben wir $\xi^{(1)}$, $\xi_1^{(2)}$, $\xi_2^{(2)}$ anstatt ξ, η, ζ gebraucht.)

Die Bedingung $\delta J = 0$ gibt uns die Relationen

$$\begin{aligned}
&\lambda\left(\frac{\partial F}{\partial x}\right) + \mu\left(\frac{\partial G}{\partial x}\right) - \eta r' - \zeta s' = 0,\\
&\lambda\left(\frac{\partial F}{\partial y}\right) + \mu\left(\frac{\partial G}{\partial y}\right) - \eta s' - \zeta t' = 0,\\
&\lambda F_r \quad + \mu G_r \quad + \eta x' \qquad = 0,\\
&\lambda F_s \quad + \mu G_s \quad + \eta y' + \zeta x' = 0,\\
&\lambda F_t \quad + \mu G_t \quad + \qquad \zeta y' = 0,
\end{aligned}$$

$\left(\frac{\partial F}{\partial x}\right)$ soll den Ausdruck $F_x + pF_z + rF_p + sF_q$ bedeuten, und ebenso $\left(\frac{\partial F}{\partial y}\right)$ den Ausdruck $F_y + qF_z + sF_p + tF_q$. Die Funktionen ξ, η, ζ sind bis auf Konstanten bestimmt durch die Differentialgleichungen

$$0 = \lambda F_z + \mu G_z + \xi', \quad 0 = \lambda F_p + \mu G_p + \xi x' + \eta',$$
$$0 = \lambda F_q + \mu G_q + \xi y' + \zeta'.$$

Aus der ersten und dritten Gleichung bekommen wir:

$$\lambda \begin{vmatrix} \left(\frac{\partial F}{\partial x}\right) & \left(\frac{\partial G}{\partial x}\right) \\ F_r & G_r \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \eta r' + \zeta s' & \left(\frac{\partial G}{\partial x}\right) \\ -\eta x' & G_r \end{vmatrix}, \quad \mu \begin{vmatrix} \left(\frac{\partial F}{\partial x}\right) & \left(\frac{\partial G}{\partial x}\right) \\ F_r & G_r \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \left(\frac{\partial F}{\partial x}\right) & \eta r' + \zeta s' \\ F_r & -\eta x' \end{vmatrix}.$$

Die zweite und fünfte Gleichung gibt uns

$$\lambda \begin{vmatrix} \left(\frac{\partial F}{\partial y}\right) & \left(\frac{\partial G}{\partial y}\right) \\ F_t & G_t \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \eta s' + \zeta t' & \left(\frac{\partial G}{\partial y}\right) \\ -\zeta y' & G_t \end{vmatrix}, \quad \mu \begin{vmatrix} \left(\frac{\partial F}{\partial y}\right) & \left(\frac{\partial G}{\partial y}\right) \\ F_t & G_t \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \left(\frac{\partial F}{\partial y}\right) & \eta s' + \zeta t' \\ F_t & -\zeta y' \end{vmatrix}.$$

Man kann leicht finden, daß die vierte Gleichung erfüllt ist, wenn diese vier letzten Gleichungen erfüllt sind, welches natürlich so sein muß, weil, wenn die Gleichungen

$$F = 0, \quad G = 0, \quad px' + qy' - z' = 0, \quad rx' + sy' - p' = 0, \quad sx' + ty' - q' = 0$$

erfüllt sind, eine der obigen fünf Gleichungen die Folge der anderen vier ist. Also ist es nicht nötig die vierte Gleichung der obigen fünf Gleichungen zu gebrauchen.

Aus den vier letzten Gleichungen bekommen wir zwei Gleichungen:

$$\lambda\zeta \begin{vmatrix} \left(\frac{\partial F}{\partial x}\right) & \left(\frac{\partial G}{\partial x}\right) \\ F_r & G_r \end{vmatrix} + \lambda\eta \begin{vmatrix} \left(\frac{\partial F}{\partial y}\right) & \left(\frac{\partial G}{\partial y}\right) \\ F_t & G_t \end{vmatrix} = s'(\zeta^2 G_r - \eta\zeta G_s + \eta^2 G_t),$$

$$\mu\zeta \begin{vmatrix} \left(\frac{\partial F}{\partial x}\right) & \left(\frac{\partial G}{\partial x}\right) \\ F_r & G_r \end{vmatrix} + \mu\eta \begin{vmatrix} \left(\frac{\partial F}{\partial y}\right) & \left(\frac{\partial G}{\partial y}\right) \\ F_t & G_t \end{vmatrix} = -s'(\zeta^2 F_r - \eta\zeta F_s + \eta^2 F_t),$$

Die beiden linken Seiten haben einen gemeinsamen Faktor

$$\zeta \begin{vmatrix} \left(\frac{\partial F}{\partial x}\right) & \left(\frac{\partial G}{\partial x}\right) \\ F_r & G_r \end{vmatrix} + \eta \begin{vmatrix} \left(\frac{\partial F}{\partial y}\right) & \left(\frac{\partial G}{\partial y}\right) \\ F_t & G_t \end{vmatrix}$$

linear in η und ζ.

Die beiden quadratischen Faktoren in ζ und η müssen auch einen gemeinsamen linearen Faktor haben. Also haben die beiden Gleichungen

$$\zeta^2 G_r - \eta\zeta G_s + \eta^2 G_t = 0,$$
$$\zeta^2 F_r - \eta\zeta F_s + \eta^2 F_t = 0,$$

eine gemeinsame Lösung für $\frac{\zeta}{\eta}$. Diese gemeinsame Lösung für $\frac{\zeta}{\eta}$ entspricht dem gemeinsamen Faktor in den linken Seiten. Für diesen Wert von $\frac{\zeta}{\eta}$ verschwindet also dieser lineare Faktor. Infolgedessen haben wir:

Wenn die beiden partiellen Differentialgleichungen

$$F(x, y, z, p, q, r, s, t) = 0, \quad G(x, y, z, p, q, r, s, t) = 0$$

eine Lösung gemein haben, so müssen:

erstens:

$$\left.\begin{aligned} m^2 G_r - m G_s + G_t = 0 \\ m^2 F_r - m F_s + F_t = 0 \end{aligned}\right\}$$ eine gemeinsame Lösung für m haben,

zweitens: Für dieses m, ist

$$m \begin{vmatrix} \left(\frac{\partial F}{\partial x}\right) & \left(\frac{\partial G}{\partial x}\right) \\ F_r & G_r \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \left(\frac{\partial F}{\partial y}\right) & \left(\frac{\partial G}{\partial y}\right) \\ F_t & G_t \end{vmatrix} = 0.$$

Aus der ersten Bedingung, daß die beiden Gleichungen

$$m^2 G_r - m G_s + G_t = 0,$$
$$m^2 F_r - m F_s + F_t = 0$$

eine Lösung m gemein haben, ergibt sich die Relation:

$$\begin{vmatrix} F_r & F_s & F_t & 0 \\ 0 & F_r & F_s & F_t \\ G_r & G_s & G_t & 0 \\ 0 & G_r & G_s & G_t \end{vmatrix} = 0.$$

Diese hier gewonnenen Bedingungen stimmen genau mit den in Goursats Lehrbuch Bd. II gegebenen Bedingungen überein.

Über die Anzahl der Primzahlen unter gegebener Grenze.

Von

ERHARD SCHMIDT in Göttingen.

Herr De La Vallée Poussin*) hat bewiesen, daß, wenn $F(x)$ die ahl der Primzahlen $\leqq x$ bedeutet, für $x > 2$

$$\left| F(x) - \int_2^x \frac{dy}{\log y} \right| < \text{Const.} \frac{x}{\log x} \cdot \sqrt{p \log x}\, e^{-\sqrt{p \log x}}$$

wobei $p = 0 \cdot 03282$ zu setzen ist. Unter der Voraussetzung, daß die nplexen Nullstellen von $\zeta(s)$ sämtlich den reellen Betrag $\frac{1}{2}$ haben, hat ner Herr Helge van Koch**) bewiesen, daß für $x > 2$

$$\left| F(x) - \int_2^x \frac{dy}{\log y} \right| < \text{Const.} \sqrt{x} \log x.$$

nit blieb die Frage nach dem Vorzeichen des Fehlers, also die Frage, twa $F(x)$ und die durch die Gleichung

$$f(x) = F(x) + \tfrac{1}{2} F\left(x^{\frac{1}{2}}\right) + \tfrac{1}{3} F\left(x^{\frac{1}{3}}\right) + \cdots$$

erte Funktion $f(x)$ schließlich beständig größer oder beständig kleiner er Integrallogarithmus bleiben, oder ob sie beständig um denselben nken, sowie auch die Frage nach einer unteren Grenze für die Größen- ıg dieser Schwankung unerledigt***). Der Inhalt vorliegender Unter- g orientiert sich an diesen Fragen, indem er in folgenden Sätzen :

*) Memoires couronnés et autres Memoires publiés par l'Academie royale de 1899 tome LIX.

**) Acta Mathematica Bd. 24; Mathematische Annalen Bd. 55.

***) Daß es zu jedem beliebig kleinen ε über jeder beliebig großen vorgeschriebenen Werte von x gibt, für welche

$$\left| F(x) - \int_2^x \frac{dy}{\log y} \right| > x^{\frac{1}{2}-\varepsilon}$$

ın von Herrn Jensen ohne Ausführung des Beweises ausgesprochen worden matica Bd. 22).

I. Über jeder beliebig großen vorgeschriebenen Zahl x_1 gibt es Werte von x, für welche

$$f(x) - \int_2^x \frac{dy}{\log y} > \frac{1}{29} \frac{\sqrt{x}}{\log x},$$

und ebenso auch Werte von x, für welche

$$f(x) - \int_2^x \frac{dy}{\log y} < -\frac{1}{29} \frac{\sqrt{x}}{\log x}.$$

II. Über jeder beliebig großen vorgeschriebenen Zahl x_1 gibt es Werte von x, für welche

$$F(x) - \int_2^x \frac{dy}{\log y} + \frac{1}{2} \int_2^{\sqrt{x}} \frac{dy}{\log y} > \frac{1}{29} \frac{\sqrt{x}}{\log x},$$

und ebenso auch Werte von x, für welche

$$F(x) - \int_2^x \frac{dy}{\log y} + \frac{1}{2} \int_2^{\sqrt{x}} \frac{dy}{\log y} < -\frac{1}{29} \frac{\sqrt{x}}{\log x}.$$

Bezeichnet ν die obere Grenze der reellen Beträge der Nullstellen von $\zeta(s)$, so daß also $\frac{1}{2} \leqq \nu \leqq 1$ sein muß, so gelten noch folgende Sätze:

III. Zu jeder beliebig kleinen vorgeschriebenen positiven Größe ε gibt es über jeder beliebig großen vorgeschriebenen Zahl x_1 Werte von x, für welche

$$f(x) - \int_2^x \frac{dy}{\log y} > x^{\nu-\varepsilon},$$

und ebenso auch Werte von x, für welche

$$f(x) - \int_2^x \frac{dy}{\log y} < -x^{\nu-\varepsilon}.$$

IV. Zu jeder beliebig kleinen vorgeschriebenen Größe ε gibt es über jeder beliebig großen vorgeschriebenen Zahl x_1 Werte von x, für welche

$$F(x) - \int_2^x \frac{dy}{\log y} + \frac{1}{2} \int_2^{\sqrt{x}} \frac{dy}{\log y} > x^{\nu-\varepsilon},$$

und ebenso auch Werte von x, für welche

$$F(x) - \int_2^x \frac{dy}{\log y} + \frac{1}{2} \int_2^{\sqrt{x}} \frac{dy}{\log y} < -x^{\nu-\varepsilon}.$$

Wir wollen mit dem Beweise des Satzes III beginnen. Es sei für $x \geqq 2$

$$L(x) = \sum_{m=2}^{m=E(x)} \frac{1}{\log m},$$

o $E(x)$ die größte ganze Zahl $\leqq x$ bedeutet, und für $x < 2$

$$L(x) = 0.$$

ann ist für $x > 2$

$$L(x) - \frac{1}{\log 2} < \int_2^x \frac{dy}{\log y} < L(x).$$

an setze

$$f(x) = L(x) + \varphi(x);$$

sei ferner $\Re(s) > 1$; dann ist

$$\log \zeta(s) = \sum_p p^{-s} + \frac{1}{2} \sum_p p^{-2s} + \frac{1}{3} \sum_p p^{-3s} + \cdots$$

für $\log \zeta(s)$ derjenige Wert zu wählen ist, welcher stetig in reelle erte übergeht, wenn s stetig so in reelle Werte übergeht, daß dabei ständig $\Re(s) > 1$ bleibt.

$$\sum_p p^{-s} + \frac{1}{2} \sum_p p^{-2s} + \frac{1}{3} \sum_p p^{-3s} + \cdots = \sum_{n=2}^{n=\infty} \frac{f(n) - f(n-1)}{n^s}$$

$$= -\sum_{n=2}^{n=\infty} \frac{L(n) - L(n-1)}{n^s} + \sum_{n=2}^{n=\infty} \frac{\varphi(n) - \varphi(n-1)}{n^s},$$

nun

$$\varphi(1) = 0 \quad \text{und} \quad \lim_{n=\infty} \left(\frac{\varphi(n)}{n^s}\right) = 0,$$

ist

$$\sum_{n=2}^{n=\infty} \frac{\varphi(n) - \varphi(n-1)}{n^s} = \sum_{n=2}^{n=\infty} \varphi(n) \left(\frac{1}{n^s} - \frac{1}{(n+1)^s}\right);$$

ücksichtigt man nun, daß $L(n) - L(n-1) = \frac{1}{\log n}$ ist, so ergibt sich

$$\log \zeta(s) = \sum_{n=2}^{n=\infty} \frac{n^{-s}}{\log n} + \sum_{n=2}^{n=\infty} \varphi(n) \left(\frac{1}{n^s} - \frac{1}{(n+1)^s}\right)$$

$$= \sum_{n=2}^{n=\infty} \frac{n^{-s}}{\log n} + s \sum_{n=2}^{n=\infty} \frac{\varphi(n)}{n^{s+1}} - \sum_{n=2}^{n=\infty} \varphi(n) R_n(s),$$

o

$$R_n(s) = \frac{1}{(n+1)^s} - \frac{1}{n^s} + \frac{s}{n^{s+1}} = s(s+1) \cdot \int_n^{n+1} dx \int_n^x \frac{dy}{y^{s+2}}$$

und mithin auch

$$|R_n(s)| < |s| \cdot |s+1| \cdot \int_n^{n+1} dx \int_n^{n+1} \frac{dy}{y^{\Re(s)+2}} < \frac{|s| \cdot |s+1|}{n^{2+\Re(s)}}$$

ist. Aus der letzten Ungleichung folgt, daß

$$\sum_{n=2}^{n=\infty} \varphi(n) R_n(s)$$

für $\Re(s) > 0$ absolut und gleichmäßig konvergiert und mithin für $\Re(s) > 0$ einen singularitätenfreien analytischen Funktionszweig darstellt. Dasselbe gilt dann auch von dem Funktionszweig $A(s)$, welcher durch die Gleichung

$$A(s) = \frac{1}{s}\left(\sum_{n=2}^{n=\infty} \varphi(n) R_n(s) + \log \zeta(a) - s + a - \sum_{n=2}^{n=\infty} \frac{n^{-a}}{\log n}\right)$$

definiert sei, wobei a eine reelle Zahl > 1 bedeuten soll. Da nun

$$\log \zeta(s) = \log \zeta(a) + \int_a^s \frac{\zeta'(s)}{\zeta(s)}\, ds$$

und

$$\sum_{n=2}^{n=\infty} \frac{n^{-s}}{\log n} = \sum_{n=2}^{n=\infty} \frac{n^{-a}}{\log n} - \int_a^s \zeta(s)\, ds + s - a,$$

so ergibt sich aus (3),

$$\sum_{n=2}^{n=\infty} \frac{\varphi(n)}{n^{s+1}} = A(s) + \frac{1}{s} \int_a^s \left(\frac{\zeta'(s)}{\zeta(s)} + \zeta(s)\right) ds, \tag{4}$$

wo der Integrationsweg so zu wählen ist, daß auf demselben beständig $\Re(s) > 1$ bleibt. Es durchlaufe nun n_1 die Gesamtheit der ganzen Zahlen $n \geqq 2$, für welche $\varphi(n) \geqq 0$ und n_2 die Gesamtheit der ganzen Zahlen $n \geqq 2$, für welche $\varphi(n) < 0$ ist. Dann ergibt sich

$$\sum_{n_1} \frac{\varphi(n_1)}{n_1^{s+1}} + \sum_{n_2} \frac{\varphi(n_2)}{n_2^{s+1}} = A(s) + \frac{1}{s} \int_a^s \left(\frac{\zeta'(s)}{\zeta(s)} + \zeta(s)\right) ds, \tag{5}$$

$$\sum_{n_1} \frac{\varphi(n_1)}{n_1^{s+1}} = -\sum_{n_2} \frac{\varphi(n_2)}{n_2^{s+1}} + A(s) + \frac{1}{s} \int_a^s \left(\frac{\zeta'(s)}{\zeta(s)} + \zeta(s)\right) ds. \tag{6}$$

Wäre nun für jedes $n_2 > x_1$ $\varphi(n_2) > -n_2^{\nu-\varepsilon}$, so würde $\sum_{n_2} \frac{\varphi(n_2)}{n_2^{s+1}}$ für $\Re(s) > \nu - \varepsilon$ absolut und gleichmäßig konvergieren und mithin einen in

esem Gebiet regulären analytischen Funktionszweig darstellen. Da ferner $\frac{(s)}{(s)} + \xi(s)$ an der Stelle $s = 1$ regulär ist, und mithin

$$\int_a^s \left(\frac{\zeta'(s)}{\zeta(s)} + \xi(s)\right) ds$$

ır an den Nullstellen von $\zeta(s)$ d. h. nur für negative und komplexe Werte von s, deren reeller Betrag $\leqq \nu$ vorausgesetzt wurde, singulär erden kann, so ergibt sich aus (6), daß, wenn ϱ_a den Konvergenzradius er Taylorentwickelung des durch $\sum_{n_1}' \frac{\varphi(n_1)}{n_1^{s+1}}$ dargestellten Funktionszweiges ı der Umgebung des Punktes $s = a$ bezeichnet, $\varrho_a > a - \nu$ wäre; es sei $= a - \nu + \eta$, da es nun gemäß Voraussetzung eine Nullstelle $\alpha + \beta i$ on $\xi(s)$ geben müßte, so daß $\alpha > \nu - \eta$ und $\alpha > \nu - \varepsilon$, so würde folgen, aß wenn $\varrho_{a+\beta i}$ den Konvergenzradius der Taylorentwickelung des durch $\sum_{n_1}' \frac{\varphi(n_1)}{n_1^{s+1}}$ dargestellten Funktionszweiges in der Umgebung des Punktes $= a + \beta i$ bezeichnet $\varrho_{a+\beta i} < \varrho_a$ wäre. Das ist aber unmöglich; denn, enn $C_a^{(m)}$ und $C_{a+\beta i}^{(m)}$ bezüglich die Koeffizienten der m^{ten} Potenzen in der aylorentwickelung von $\sum_{n_1}' \frac{\varphi(n_1)}{n_1^{s+1}}$ in der Umgebung der Stellen $s = a$ und $= a + \beta i$ bedeuten, so ist

$$C_a^{(m)} = \frac{(-1)^m}{m!} \sum_{n_1}' \frac{\varphi(n_1)(\log n_1)^m}{n_1^{a+1}}$$

nd

$$C_{a+\beta i}^{(m)} = \frac{(-1)^m}{m!} \sum_{n_1}' \frac{\varphi(n_1)(\log n_1)^m}{n_1^{a+\beta i+1}}.$$

a nun wegen des positiven Vorzeichens aller $\varphi(n_2)$

$$\left| \frac{\varphi(n_1)(\log n_1)^m}{n_1^{a+\beta i+1}} \right| = \frac{\varphi(n_1)(\log n_1)^m}{n_1^{a+1}},$$

ist

$$\left| C_{a+\beta i}^{(m)} \right| \leqq \left| C_a^{(m)} \right|$$

d mithin auch $\varrho_{a+\beta i} \geqq \varrho_a$. Ebenso beweist man auch die Unmöglich-it der Annahme, daß für jedes $n_1 > x_1$ $\varphi(n_1) < n_1^{\nu-\varepsilon}$ wäre. Damit ist i Berücksichtigung von (1) der Beweis für die Ungleichungen des atzes III geliefert.

Beweis des Satzes I.

Für den Fall, daß $\nu > \frac{1}{2}$ wäre, ergeben sich die zu beweisenden Ungleichungen aus den schon bewiesenen den Inhalt des Satzes III aus-

machenden Ungleichungen a fortiori. Wir haben sie also nur für den Fall, daß $\nu = \frac{1}{2}$ wäre, zu beweisen. Differentiiert man die Gleichung (6) nach s, so ergibt sich, wenn $\frac{d(A(s))}{ds} = A'(s)$ gesetzt wird,

$$(7) \qquad \sum_{n_1} \frac{\varphi(n_1)}{n_1^{s+1}} \log n_1 = \sum_{n_2} \frac{-\varphi(n_2)}{n_2^{s+1}} \log n_2 - A'(s) + \frac{1}{s^2}\int_a^s \left(\frac{\zeta'(s)}{\zeta(s)} + \zeta(s)\right) ds - \frac{1}{s}\left(\frac{\zeta'(s)}{\zeta(s)} + \zeta(s)\right).$$

Da gemäß dem zu Anfang dieser Abhandlung zitierten Satze von Herrn Helge van Koch aus der gemachten Voraussetzung, daß $\nu = \frac{1}{2}$ sei, bei Berücksichtigung von (1) folgt, daß

$$\varphi(n_1) < \text{Const. } n_1^{\frac{1}{2}} \log n_1$$

und

$$-\varphi(n_2) < \text{Const. } n_2^{\frac{1}{2}} \log n_2,$$

so konvergieren unter der genannten Voraussetzung die Summen, welche in der Gleichung (7) vorkommen, für $\Re(s) > \frac{1}{2}$ gleichmäßig und (7) hat dann also für $\Re(s) > \frac{1}{2}$ Gültigkeit. Es sei nun $\frac{1}{2} + \beta i$ eine Nullstelle von $\zeta(s)$, dann ist, wenn μ eine positive gegen 0 konvergierende Größe bezeichnet,

$$0 = \lim_{\mu=0} \left(\mu \cdot A'\left(\frac{1}{2} + \beta i + \mu\right)\right)$$

und weil

$$\int_a^s \left(\frac{\zeta'(s)}{\zeta(s)} + \zeta(s)\right) ds$$

nur logarithmische Unendlichkeitsstellen hat,

$$O = \lim_{\mu=0} \left(\frac{\mu}{\left(\frac{1}{2} + \beta i + \mu\right)^2} \int_a^{\frac{1}{2}+\beta i+\mu} \left(\frac{\zeta'(s)}{\zeta(s)} + \zeta(s)\right) ds \right),$$

wo der Integrationsweg so zu wählen ist, daß auf demselben beständig $\Re(s) > \frac{1}{2}$ bleibt, ferner ist

$$\lim_{\mu=0} \left[\frac{\mu}{\frac{1}{2} + \beta i + \mu} \cdot \left(\frac{\zeta'\left(\frac{1}{2} + \beta i + \mu\right)}{\zeta\left(\frac{1}{2} + \beta i + \mu\right)} + \zeta\left(\frac{1}{2} + \beta i + \mu\right) \right) \right] = \frac{\pi}{\frac{1}{2} + \beta i},$$

wo $\varkappa$ die Ordnung der Nullstelle $s = \frac{1}{2} + \beta i$ bedeutet. Aus (7) folgt mithin

$$(8) \qquad \lim_{\mu=0}\left(\mu \cdot \sum_{n_1} \frac{\varphi(n_1)\log n_1}{n_1^{\frac{3}{2}+\beta i+\mu}} + \mu \cdot \sum_{n_2} \frac{\varphi(n_2)\log n_2}{n_2^{\frac{3}{2}+\beta i+\mu}}\right) = \frac{-\varkappa}{\frac{1}{2}+\beta i}.$$

Da nun $s = \frac{1}{2}$ eine reguläre Stelle der drei letzten von den vier Ausdrücken auf der rechten Seite von (7) ist, so ergibt sich, wenn das Symbol O die obere Unbestimmtheitsgrenze bedeutet aus (7)

$$(9) \qquad \underset{\mu=0}{O}\left(\mu \cdot \sum_{n_1} \frac{\varphi(n_1)\log n_1}{n_1^{\frac{3}{2}+\mu}}\right) = \underset{\mu=0}{O}\left(\mu \cdot \sum_{n_2} \frac{-\varphi(n_2)\log n_2}{n_2^{\frac{3}{2}+\mu}}\right) = N.$$

Da nun

$$\sum_{n_1} \frac{\varphi(n_1)\log n_1}{n_1^{\frac{3}{2}+\mu}} \geqq \left|\sum_{n_1} \frac{\varphi(n_1)\log n_1}{n_1^{\frac{3}{2}+\beta i+\mu}}\right|$$

und

$$\sum_{n_2} \frac{-\varphi(n_2)\log n_2}{n_2^{\frac{3}{2}+\mu}} \geqq \left|\sum_{n_2} \frac{-\varphi(n_2)\log n_2}{n_2^{\frac{3}{2}+\beta i+\mu}}\right|,$$

so folgt aus (8) und (9)

$$(10) \qquad 2N \geqq \frac{\varkappa}{\left|\frac{1}{2}+\beta i\right|}.$$

Wäre nun für jedes $n_2 > x_1$

$$\varphi(n_2) > -c \cdot \frac{\sqrt{n_2}}{\log n_2},$$

wo

$$0 < c < \frac{1}{2}\,\frac{\varkappa}{\left|\frac{1}{2}+\beta i\right|},$$

so wäre, weil

$$\sum_{n_2} \frac{-\varphi(n_2)\log n_2}{n_2^{\frac{3}{2}+\mu}} \leqq \sum_{n_2 \leq x_1} \frac{-\varphi(n_2)\log n_2}{n_2^{\frac{3}{2}+\mu}} + c \cdot \sum_{n=1}^{n=\infty} \frac{1}{n^{1+\mu}},$$

und weil ferner

$$\lim_{\mu=0}\left(\mu \cdot \sum_{n_2 \leq x_1} \frac{\varphi(n_2)\log n_2}{n_2^{\frac{3}{2}+\mu}}\right) = 0$$

und

$$\lim_{\mu=0}\left(\mu \cdot \sum_{n=1}^{n=\infty} \frac{1}{n^{1+\mu}}\right) = 1,$$

$N \leqq c$, was mit (10) im Widerspruch steht. Ebenso beweist man auch die Unmöglichkeit der Annahme, daß für jedes $n_1 > x_1$ $\varphi(n_1) < c\frac{\sqrt{n_1}}{\log n_1}$, wo

c wie früher eine positive Zahl $< \frac{1}{2} \frac{\varkappa}{\left|\frac{1}{2}+\beta i\right|}$ bedeutet. Wählt man nun für $\frac{1}{2}+\beta i$ diejenige Nullstelle, deren absoluter Betrag am kleinsten ist d. h. nach der Berechnung des Herrn Gramm*) $\frac{1}{2}+i\cdot 14\cdot 17\cdots$, so ist $\varkappa = 1$ und es ergibt sich, daß $\frac{1}{29} < \frac{1}{2}\cdot\frac{\varkappa}{\left|\frac{1}{2}+\beta i\right|}$. Damit sind wiederum unter Berücksichtigung von (1) die Ungleichungen des Satzes I auch für den Fall, daß $\nu = \frac{1}{2}$ wäre, bewiesen.

Beweis der Sätze II und IV.

Es sei für $x \geqq 2$

$$L_1(x) = \sum_{m=2}^{m=E(x)} \frac{1}{\sqrt{m}\log m}$$

und für $x < 2$

$$L_1(x) = 0.$$

Dann ist für $x > 2$

$$L_1(x) - \frac{1}{\sqrt{2}\log 2} < \int_2^x \frac{dy}{\sqrt{y}\log y} < L_1(x),$$

und da

$$\int_2^x \frac{dy}{\sqrt{y}\log y} = \int_{\sqrt{2}}^{\sqrt{x}} \frac{dy}{\log y}$$

ist, so ergibt sich für $x > 2$

$$(11) \qquad L_1(x) - \frac{1}{\sqrt{2}\log 2} - \int_{\sqrt{2}}^{2} \frac{dy}{\log y} < \int_2^{\sqrt{x}} \frac{dy}{\log y} < L_1(x) - \int_{\sqrt{2}}^{2} \frac{dy}{\log y}.$$

Man setze

$$F(x) = L(x) - \tfrac{1}{2} L_1(x) + \Phi(x).$$

Ersetzt man in (2) s durch $2s$, multipliziert die so erhaltene Gleichung mit $\frac{1}{2}$ und subtrahiert sie von der ursprünglichen, so erhält man folgende für $\Re(s) > 1$ geltende Gleichung:

---

*) Bulletin de l'Academie royale des sciences et des lettres de Danemark Copenhague 1902, No. 1.

$$(s) - \frac{1}{2}\log\zeta(2s) - \frac{1}{3}\sum_p p^{-3s} - \frac{1}{5}\sum_p p^{-5s} - \frac{1}{7}\sum_p p^{-7s} - \cdots = \sum_p p^{-s}$$

$$\sum_2^\infty \frac{F(n) - F(n-1)}{n^s} = \sum_{n=2}^{n=\infty} \frac{L(n) - L(n-1)}{n^s} - \frac{1}{2}\sum_{n=2}^{n=\infty} \frac{L_1(n) - L_1(n-1)}{n^s}$$

$$+ \sum_{n=2}^{n=\infty} \frac{\Phi(n) - \Phi(n-1)}{n^s}$$

$$\sum_2^\infty \frac{n^{-s}}{\log n} - \frac{1}{2}\sum_{n=2}^{n=\infty} \frac{n^{-\left(s+\frac{1}{2}\right)}}{\log n} + \sum_{n=2}^{n=\infty} \Phi(n)\left(\frac{1}{n^s} - \frac{1}{(n+1)^s}\right)$$

$$s - a + \sum_{n=2}^{n=\infty} \frac{n^{-a}}{\log n} - \int_a^s \zeta(s)\,ds - \frac{s}{2} + \frac{a}{2} - \frac{1}{2}\sum_{n=2}^{n=\infty} \frac{n^{-\left(a+\frac{1}{2}\right)}}{\log n}$$

$$- \int_a^s \zeta\left(s+\frac{1}{2}\right) ds + s\sum_{n=2}^{n=\infty} \frac{\Phi(n)}{n^{s+1}} - \sum_{n=2}^{n=\infty} \Phi(n)\,R_n(s),$$

a und $R_n(s)$ dieselbe Bedeutung haben wie beim Beweise des Satzes III, die Integrationswege so zu wählen sind, daß auf denselben beständig $)>1$ bleibt. Setzt man nun

$$) = \frac{1}{s}\left(\sum_{n=2}^{n=\infty} \Phi(n)\,R_n(s) - \frac{s-a}{2} - \sum_{n=2}^{n=\infty} \frac{n^{-a}}{\log n} + \frac{1}{2}\sum_{n=2}^{n=\infty} \frac{n^{-\left(a+\frac{1}{2}\right)}}{\log n} + \log\zeta(a)\right.$$

$$\left. - \frac{1}{2}\log\zeta 2a - \frac{1}{3}\sum_p p^{-3s} - \frac{1}{5}\sum_p p^{-5s} - \frac{1}{7}\sum_p p^{-7s} - \cdots\right),$$

stellt $B(s)$ einen für $\Re(s) > \frac{1}{3}$ regulären analytischen Funktionszweig und man hat

$$\sum_{n=2}^{n=\infty} \frac{\Phi(n)}{n^{s+1}} = B(s) + \frac{1}{s}\int_a^s \left(\frac{\zeta'(s)}{\zeta(s)} + \zeta(s) - \frac{\zeta'(2s)}{\zeta(2s)} - \frac{1}{2}\zeta\left(s+\frac{1}{2}\right)\right) ds,$$

der Integrationsweg so zu wählen ist, daß auf demselben beständig $s)>1$ bleibt. Da nun die Funktion unter dem Integralzeichen an den nkten $s = \frac{1}{2}$ und $s = 1$ regulär bleibt, und mithin die durch das egral gegebene Funktion im Gebiete $\Re(s) \geqq \frac{1}{2}$ nur an den komplexen llstellen von $\zeta(s)$ singulär und zwar logarithmisch unendlich wird, so

führt von der Gleichung (12) genau dieselbe Schlußweise unter Berücksichtigung von (1) und (11) zum Beweise der Sätze IV und II, wie sie aus der Gleichung (4) unter Berücksichtigung von (1) den Beweis der Sätze III und I lieferte.

Zum Schlusse möchte ich mir noch folgende Bemerkung erlauben: Wenn $\nu > \frac{1}{2}$ wäre, so könnte man offenbar in den Ungleichungen des Satzes IV das Zusatzglied $\frac{1}{2}\int_2^{\sqrt{x}} \frac{dy}{\log y}$ fortlassen, ohne daß dieselben ihre Gültigkeit verlören. Es gäbe also zu jeder beliebig kleinen vorgeschriebenen positiven Größe ε über jeder vorgeschriebenen Zahl x_1 Werte von x, so daß

$$F(x) - \int_2^x \frac{dy}{\log y} > x^{\nu-\varepsilon} \tag{13}$$

wäre. Nun hat aber die bis 3 000 000 durchgeführte Zählung der Primzahlen durch Gauß und Goldschmidt es wahrscheinlich gemacht, daß

$$F(x) < \int_2^x \frac{dy}{\log y}$$

bleibt. Ließe sich dieser Satz beweisen, so würde aus (13) sich ergeben, daß $\nu = \frac{1}{2}$ sein muß, d. h. daß die komplexen Nullstellen von $\zeta(s)$ den reellen Betrag $\frac{1}{2}$ haben.

Zur Proportionslehre.

Von

Friedrich Schur in Karlsruhe.

Erst vor Kurzem bin ich durch einen Vortrag, den Herr Kneser*) in der Berliner mathematischen Gesellschaft gehalten hat, darauf aufmerksam geworden, daß eine vom Archimedischen Postulate unabhängige Begründung der Proportionslehre bereits im Jahre 1893 von Herrn Kupffer**) gegeben wurde. Da einmal aus dem Kneserschen Berichte, der sich teils an Kupffer teils an Hilbert anlehnt, nicht deutlich hervorgeht, welchen Fortschritt man in dieser Frage Kupffer verdankt, dann aber die Dorpater Berichte schwer zugänglich sind, so will ich zur Vervollständigung der literarischen Notizen, die ich im 55. Bande dieser Annalen S. 265ff. gegeben habe, den wesentlichen Inhalt der Kupfferschen Abhandlung, so weit er die Proportionslehre betrifft, hier kurz wiedergeben.

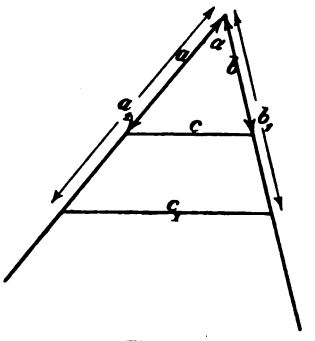


Fig. 1.

Indem Kupffer von der Definition ausgeht: „*Ein Streckenpaar ab ist einem andern Streckenpaare $a_1 b_1$ proportional, wenn sie auf den Schenkeln eines Winkels α aufgetragen bewirken, daß die Dreiecke abc und $a_1 b_1 c_1$ ähnlich, d. h. winkelgleich sind*“ (Fig. 1), zeigt er zunächst auf Grund eines Verfahrens, das im Wesentlichen in der Anwendung des Desargues'schen Satzes besteht, daß diese Definition von der Wahl des Winkels α unabhängig ist. Den Desargues'schen Satz

*) Abgedruckt auf S. 4 des 1. Stückes d. 1. Jahrg. d. Sitzungsberichte der Gesellschaft unter dem Titel: Neue Begründung der Proportions- und Ähnlichkeitslehre unabhängig vom Archimedischen Postulate und dem Begriffe des Inkommensurablen, 1902.

**) Kupffer, Die Darstellung einiger Kapitel der Elementarmathematik, Sitzungsberichte der Dorpater Naturforscherges. 1893, S. 373ff.

oder vielmehr den speziellen für ähnliche und ähnlich gelegene Dreiecke denkt er sich hierbei, wie das ja schon Desargues selbst getan hat, in bekannter Weise durch *räumliche* Betrachtungen bewiesen. Nun handelt es sich um Überwindung der eigentlichen Schwierigkeit, die in dem Beweise der *Vertauschbarkeit der inneren oder der äußeren Glieder der Proportion* besteht. Obiger Definition gemäß wird es sich also darum handeln zu beweisen, daß auch die Streckenpaare aa_1 und bb_1 auf den Schenkeln eines Winkels abgetragen ähnliche Dreiecke hervorrufen. Hilbert führt ja diesen Beweis auf den sogenannten Pascalschen Satz*) für zwei Geraden zurück und gibt von diesem Satze zwei Beweise, von denen der zweite sich auf die Sätze von Kreisvierecke und von der Gleichheit der Peripheriewinkel über derselben Sehne stützt. In der Tat sind diese Sätze unabhängig von der Proportionslehre, wie man in jedem Lehrbuche der Elementargeometrie nachlesen kann. Denselben Ausgangspunkt hat nun schon Kupffer genommen, er führt aber die Vertauschbarkeit der inneren Glieder einer Proportion in überraschend einfacher Weise direkt auf jene Kreissätze zurück. Ist (Fig. 2)

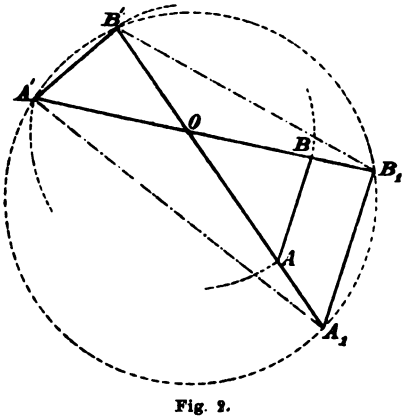


Fig. 2.

$$OA : OB = OA_1 : OB_1,$$

sodaß $AB \parallel A_1B_1$ ist, und trägt man OA und OB auf dem jedesmaligen andern Schenkel als OA' und OB' auf, so liegen die vier Punkte wegen der Gleichheit der Winkel OA_1B_1 und $OA'B'$ auf einem Kreise. Daraus folgt, daß auch die Dreiecke OA_1A' und OB_1B' winkelgleich sind, daß also $OA' : OA_1 = OB' : OB_1$ oder $OA : OA_1 = OB : OB_1$ ist, q. e. d.

Wenn Hilbert seinem auf den Kreissätzen beruhenden Beweise des Pascalschen Satzes einen davon unabhängigen aber etwas umständlicheren vorausgeschickt hat, so ist er offenbar von dem Gedanken ausgegangen, daß die Beweise jener Kreissätze zwar auf bloßen Kongruenzsätzen beruhen, daß sie aber, um vollständig zu sein, umständliche Betrachtungen und weitgehende Fallunterscheidungen erfordern. Beschränkt man sich aber auf den Pascalschen Satz für zwei auf einander senkrechte Schenkel, wie dies nach Hilbert tatsächlich genügt, so kann der zweite Beweis von Hilbert auf Grund des Satzes vom Höhenschnittpunkte des Dreiecks vollständig und sehr einfach geführt werden. Sind nämlich auf zwei zu einander

*) Hilbert, Grundlagen der Geometrie, Leipzig, 1899, Kap. III.

senkrechten Geraden je drei Punkte A, B, C und A', B', C' (Fig. 3) so angenommen, daß $AB' \parallel BA'$ und $BC' \parallel CB'$ ist, und schneidet das Lot von B auf CA' den andern Schenkel in D', so ist C der Höhenschnittpunkt des Dreiecks $BA'D'$, also $CD' \perp BA'$ und daher $\perp AB'$. Deshalb ist C auch der Höhenschnittpunkt des Dreiecks $AB'D'$, also $AD' \perp CB'$ und daher auch $\perp BC'$. Deshalb ist endlich B der Höhenschnittpunkt des Dreiecks $AC'D'$, d. h. auch $AC' \perp BD'$ und daher $AC' \parallel CA'$, was zu beweisen ist. Nimmt man an, daß, wie das für unsere Figur zutrifft, $OC = OB'$, also auch $OB = OC'$ ist, so haben wir den Beweis für die Vertauschbarkeit der inneren Glieder einer Proportion. Was aber den Satz vom Höhenschnittpunkt des Dreiecks betrifft, so ergibt er sich aus den ersten drei Kongruenzsätzen, wenn man das dem gegebenen Dreiecke umschriebene Dreieck betrachtet, dessen Seiten denen des ersten parallel sind.

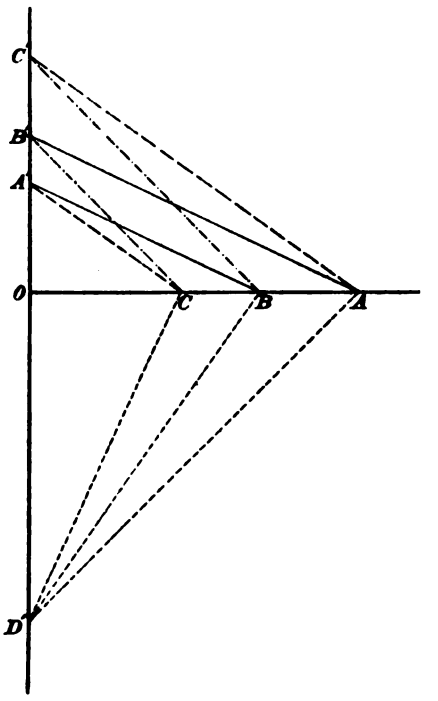


Fig. 3.

(Die Zurückführung des Pascalschen Satzes auf den Satz vom Höhenschnittpunkt erscheint insofern nicht ohne prinzipielles Interesse, als die beiden Sätze, der Desargues'sche und der Pascalsche, in dem folgenden enthalten sind: *Haben zwei Vierecke die entsprechenden Seiten parallel, und es ist eine Diagonale des einen einer Diagonale des andern parallel, so sind auch die beiden andern Diagonalen parallel.* Dieser Satz ist gleichbedeutend mit dem Desargues'schen oder dem Pascalschen, je nachdem die entsprechenden oder die *nicht* entsprechenden Diagonalen parallel sind. Zwei Dreiecke nun, dessen Seiten den Höhen des andern parallel sind, liefern unmittelbar eine besondere Figur der zweiten Art, die durch Affinität, d. h. auf Grund des Desargues'schen Satzes in die allgemeinste Figur dieser Art verwandelt werden kann).

Wie hieraus die Proportionslehre und das Rechnen mit Strecken ohne Benützung räumlicher Betrachtungen abzuleiten ist, kann bei Hilbert nachgelesen werden, dem sich auch Kneser in diesem zweiten Teile vollkommen anschließt. Was Kupffer zur Streckenrechnung anführt, trifft nicht ganz zu. Denn „daß die Planimetrie unabhängig von der Ähnlichkeitslehre

nachweist, daß der Flächeninhalt eines Rechtecks gleich dem Produkte seiner beiden ungleichen Seiten ist", ist nur auf Grund eines gewöhnlich stillschweigend vorausgesetzten neuen Axioms möglich, wonach eine Fläche keinem ihrer Teile inhaltsgleich sein kann. Dies Versehen ist um so wunderbarer, als ich in einer Dorpater Vorlesung, die Kupffer, wie er in einer Anmerkung selbst angibt, gehört hat, gerade die Theorie des Flächeninhalts*) nach dieser Richtung vollkommen klar gestellt habe. Insofern bedürfen auch die weiteren Literaturangaben Knesers einer Erläuterung. Denn wenn er zum Gegenstande seines Artikels (cfr. Titel) Grassmann, Ausdehnungslehre von 1844 §§ 75—79 und Hoppe, Rein geometrische Proportionslehre, Arch. f. Math. 62, S. 153—164 anführt, so darf die Bemerkung nicht unterdrückt werden, daß an beiden Stellen die *Vertauschbarkeit der inneren Glieder einer Proportion auf die Flächensätze zurückgeführt wird.* Das Archimedische Axiom wird dabei nur scheinbar vermieden, da es durch ein anderes ersetzt wird, das, wie a. o. a. O. bewiesen wurde, überhaupt kein Axiom, sondern ein beweisbarer Satz ist, während das Archimedische Axiom zwar für die Proportionslehre, nicht aber für den Gesamtaufbau der Geometrie entbehrlich ist. Überdies ließen sich bei Zulassung solcher Beweismittel die Literaturangaben noch vermehren, gibt es doch sogar einen Leitfaden der Geometrie für höhere Schulen von Dobriner, in dem die Proportionslehre auf dieser Grundlage entwickelt ist. Der springende Punkt ist der Beweis der Vertauschbarkeit der inneren Glieder einer Proportion oder des Pascalschen Satzes für zwei Geraden aus bloßen Kongruenzsätzen ohne das Archimedische Postulat, und es schien mir wichtig, an dieser Stelle zu konstatieren, daß, so weit ich bisher feststellen konnte, Karl Kupffer der Erste gewesen ist, der dies geleistet hat; denn die Kupffer'sche Abhandlung ist ebenso wie mir den meisten Mathematikern bisher unbekannt geblieben.

Karlsruhe, im Juni 1902.

*) Schur, Üb. d. Flächeninhalt geradlinig begrenzter ebener Figuren, Dorp. Ber. 1892, 1ff. auch abgedr. im Periodico matematico VIII, p. 153, s. auch ib. IX, p. 85. Die weitere Literatur hierüber findet man zusammengestellt in Enriques, Questioni riguardanti la geometria element., Bologna 1900, p. 103ff.

Über die Incidenz zweier linearer Räume beliebiger Dimensionen*).

Von

H. Schubert in Hamburg.

Die Resultate der abzählenden Geometrie fließen im wesentlichen aus zwei Quellen, der Chaslesschen *Korrespondenzformel* und den *Incidenzformeln*. Die auf den dreidimensionalen linearen Raum bezüglichen Incidenzformeln habe ich schon 1874 in den Gött. Nachr. aufgestellt. Um sie zu beweisen, stellte ich damals das *Prinzip der speziellen Lage* auf, das später *Prinzip von der Erhaltung der Anzahl* genannt wurde. Obwohl die Anwendbarkeit dieses Prinzips eine begrenzte sein wird — nur daß die Grenzen der Anwendbarkeit bisher noch nicht untersucht sind —, so hat es doch nie einem Zweifel unterlegen, daß das Prinzip von der Erhaltung der Anzahl bei der Ableitung der Incidenzformeln Anwendung finden darf, weil die letzteren sich auf den Fall beziehen, daß ein *linearer* Raum niederer Dimension in einem *linearen* Raume höherer Dimension liegt, und weil auch die Bedingungen, die in diese Formeln eintreten, derartig sind, daß dieselben nur *lineare* Räume als gegeben voraussetzen.

Von n-dimensionalen Incidenzformeln sind bis jetzt nur zwei veröffentlicht, die sich beide auf einen Strahl beziehen, dem ein Punkt incident ist. Die erste stellte ich 1884 im 26sten Bande der Math. Ann., S. 54, auf, um sie auf die Untersuchung der vielfachen Tangenten im R_n anwenden zu können. Die zweite, eine Verallgemeinerung der ersten, stellte Herr Pieri 1891 in den Rendiconti del Circolo Matematico di Palermo (Tomo V, S. 10) auf, um sie auf Systeme von Punktepaaren anwenden zu können. Im folgenden werden nun ganz allgemein m Incidenzformeln abgeleitet, welche sich darauf beziehen, daß ein m-dimensionaler linearer Raum ganz innerhalb eines $(m + q)$-dimensionalen linearen Raums liegt.

*) Den größten Teil der Resultate dieser Abhandlung habe ich schon ohne Beweis in einem Vortrag mitgeteilt, den ich am 22. Sept. in Karlsbad vor der Deutschen Math.-Vereinigung gehalten habe. Dieser Vortrag wird in den Jahresberichten dieser Vereinigung abgedruckt werden.

§ 1.

Bezeichnungsweise der Grundbedingungen.

In die gesuchten Incidenzformeln treten keine anderen Bedingungen ein, als die, welche ich bei meiner „Lösung des Charakteristikenproblems für lineare Räume beliebiger Dimension“ (Mitteil. der Hamb. Math. Gesellsch., Februar 1886) *„Grundbedingungen“* genannt habe. Für diese Grundbedingungen habe ich schon 1884 in meiner Abhandlung „Die n-dimensionalen Verallgemeinerungen der fundamentalen Anzahlen unseres Raums“ (Math. Ann., Bd. 26, S. 26) eine Bezeichnungsweise eingeführt, welche auch von Segre, Pieri und den übrigen italienischen Mathematikern, die inzwischen die abzählende n-dimensionale Geometrie gefördert haben, adoptiert ist. Um diese Bezeichnungsweise auseinanderzusetzen und, im Anschluß daran, sie zu verbessern, wollen wir unter dem Symbol

$$[a]$$

immer einen a-dimensionalen linearen Raum verstehen, der in dem zugrunde gelegten n-dimensionalen linearen Raume liegt. Demgemäß bezeichnet $[0]$ einen Punkt, $[1]$ einen Strahl, $[2]$ eine Ebene, u. s. w., endlich $[n]$ den n-dimensionalen linearen Raum, in welchem alle vorkommenden Gebilde liegend gedacht werden. Hiernach wird auch z. B. die Ausdrucksweise „der $[a+b-n]$, in dem sich der gegebene $[a]$ und der gegebene $[b]$ schneiden“ nicht mißverstanden werden können. Alle *Grundbedingungen*, die man einem $[m]$ auferlegen kann, stecken nun in dem Symbole:

$$(a_0, a_1, a_2, \cdots, a_m),$$

wo $0 \leqq a_0 < a_1 < a_2 < \cdots < a_m \leqq n$ ist, wenn dieses Symbol voraussetzt, daß ein $[a_0]$, ein $[a_1]$, ein $[a_2]$ u. s. w. bis $[a_m]$ derartig gegeben sind, daß immer jeder $[a_i]$ in dem $[a_{i+1}]$ liegt, und wenn dann der $[m]$ mit jedem $[a_i]$ einen $[i]$ gemeinsam haben soll. Diese Bezeichnungsweise der einem $[m]$ auferlegbaren Grundbedingungen verbessere ich jetzt dadurch, daß ich jedes

$$a_i \quad \text{ersetze durch} \quad n - m - a_i + i,$$

sodaß die bisher mit $(a_0, a_1, a_2, \cdots, a_m)$ bezeichnete Grundbedingung von nun an mit

$$(n - m - a_0,\ n - m - a_1 + 1,\ n - m - a_2 + 2, \cdots, n - a_m)$$

zu bezeichnen ist. Auch werde ich von jetzt an immer die neue Bezeichnungsweise anwenden, wenn ich nicht ausdrücklich sage, daß eine runde Klammer, in welcher $m+1$ durch Kommata getrennte Zahlen stehen, nach der *alten* Bezeichnungsweise als eine einem $[m]$ auferlegte Grundbedingung zu deuten ist. Die neue Bezeichnungsweise bietet den Vorteil

daß die *Summe* der in Klammer gesetzten Zahlen immer die *Dimension* der durch eine solche Klammer bezeichneten Grundbedingung ergibt. Wie bei der alten Bezeichnungsweise jede folgende Zahl immer größer sein muß, als jede vorhergehende; damit die so bezeichnete Bedingung Sinn hat, so ist bei der neuen Bezeichnungsweise das Symbol für eine Grundbedingung immer dann sinnlos, wenn eine folgende Zahl größer ist, als eine vorhergehende. Hier noch einige Beispiele für die neue Bezeichnung der Grundbedingungen:

1) (2) bedeutet die einem Punkte auferlegte Bedingung, daß er auf einem gegebenen $[n-2]$ liegen soll;

2) (1, 0) bedeutet die einem Strahle auferlegte Bedingung, daß er mit einem gegebenen $[n-2]$ einen Punkt gemeinsam haben soll;

3) (4, 1) bedeutet für einen Strahl, daß ein $[n-1]$, und, in diesem liegend, ein $[n-5]$ gegeben sind, und daß dann der Strahl in dem $[n-1]$ liegen soll und dabei mit dem $[n-5]$ einen Punkt gemeinsam haben soll; die Dimension dieser Bedingung ist gleich $4+1$;

4) $(n-2, 0, 0)$ bedeutet für eine Ebene, daß sie durch einen gegebenen Punkt gehen soll; die Dimension dieser Bedingung ist gleich $n-2$;

5) (6, 4, 4, 0, 0, 0) bedeutet für einen [5] die Bedingung, daß der [5] mit einem gegebenen $[n-7]$ eine Ebene gemeinsam haben soll und zugleich mit einem $[n-11]$, der in dem $[n-7]$ liegt, einen Punkt gemeinsam haben soll.

Bei diesen Beispielen beachte man, daß die ausgelassenen Bedingungs-Angaben ausgelassen werden *durften*, weil sie selbsverständlich sind. So wird in dem fünften Beispiel vorausgesetzt, daß ein $[n-11]$, ihn enthaltend ein $[n-8]$, diesen enthaltend ein $[n-7]$, diesen enthaltend ein $[n-2]$, diesen enthaltend ein $[n-1]$ gegeben sind, und es ist z. B. *nicht* angegeben, daß der [5] mit dem $[n-8]$ einen Strahl gemeinsam habe, weil es selbstverständlich ist, daß innerhalb eines $[n-7]$ ein $[n-8]$ und eine Ebene sich in einem Strahle schneiden.

Wenn bei dieser neuen Bezeichnungsweise eine und dieselbe Zahl nacheinander sich wiederholt, so braucht dieselbe nur einmal geschrieben zu werden, wenn der an diese Zahl angesetzte Index angiebt, wie oft diese Zahl wiederholt gedacht werden soll. So konnte die in dem obigen fünften Beispiele angegebene Grundbedingung

$$(6, 4, 4, 0, 0, 0)$$

auch so bezeichnet werden:

$$(6, 4_2, 0_3)).$$

Hierfür ein zweites Beispiel:

$(b, 1_2, 0_{m-2})$ setzt für einen $[m]$ voraus, daß ein $[n-m+3]$, in ihm liegend ein $[n-m+1]$, und in diesem liegend ein $[n-m-b]$ gegeben

sind, und bezeichnet dann die Bedingung, daß der $[m]$ mit dem $[n-m-b]$ einen Punkt, mit dem $[n-m+1]$ eine Ebene und mit dem $[n-m+3]$ einen $[3]$ gemeinsam habe.

Eine *Incidenzformel* ist nun eine Gleichung zwischen den einem $[m]$ und einem $[m+q]$ auferlegbaren Grundbedingungen, die immer richtig ist, wenn der $[m]$ ganz innerhalb des $[m+q]$ liegt, oder, wie man sagt, *ihm incident* ist. Eine Incidenzformel für einen $[m+q]$ und einen ihm incidenten $[m]$ heißt *grundlegend*, wenn in derselben außer Bedingungen, die sich auf den $[m]$ *und* den $[m+q]$ beziehen, auch eine Bedingung vorkommt, die lediglich dem $[m]$ auferlegt ist und eine zweite Bedingung, die lediglich dem $[m+q]$ auferlegt ist. Aus den grundlegenden Incidenzformeln folgen weitere Incidenzformeln durch symbolische Multiplikation sei es mit Bedingungen, die sich auf den $[m]$ beziehen, sei es mit Bedingungen, die sich auf den $[m+q]$ beziehen. Von grundlegenden n-dimensionalen Incidenzformeln ist bis jetzt nur eine einzige bekannt. Es ist die, welche ich im 26ten Bande der Math. Ann., S. 54 abgeleitet habe. Diese Incidenzformel, welche sich auf einen Strahl und einen ihm incidenten Punkt bezieht, läßt sich, bei Benutzung der oben neu eingeführten Bezeichnungsweise der Grundbedingungen, folgendermaßen schreiben:

$$(b+1)-(1)\,(b,0)+(b,1)=0,$$

wo b positiv ist. Es dürfte nicht überflüssig erscheinen, wenn der Inhalt dieser Incidenzformel hier auch in Worten folgt:

„Die Anzahl derjenigen, aus einem Strahle s und einem darauf befindlichen Punkte P bestehenden Gebilde, welche eine beliebige algebraische $(2n-2-b)$-fache Bedingung Z erfüllen, ihren Strahl s einen gegebenen $(n-1-b)$-dimensionalen linearen Raum $[n-1-b]$ schneiden lassen, und dabei auch ihren Punkt P auf einem gegebenen $(n-1)$-dimensionalen linearen Raum $[n-1]$ besitzen, ist gleich der Summe der beiden Zahlen, von denen die eine angibt, wieviel solcher Gebilde die Bedingung Z erfüllen und ihren Punkt P auf einem gegebenen $[n-1-b]$ besitzen, die andere angibt, wieviel solcher Gebilde die Bedingung Z erfüllen und die Eigenschaft haben, daß ihr Strahl s in einem gegebenen $[n-1]$ liegt und dabei einen in diesem $[n-1]$ befindlichen, gegebenen $[n-1-b]$ schneidet".

§ 2.

Die Dimensionen der beiden in Incidenz befindlichen Räume unterscheiden sich um eins.

Für einen $[m+1]$ und einen ihm incidenten $[m]$ lassen sich $m+1$ grundlegende Incidenzformeln aufstellen. Um diese *zugleich* ableiten zu

können, führen wir den Buchstaben v ein, der eine der $m+1$ Zahlen $0, 1, 2, \cdots, m$ bedeuten soll. Ferner soll b, wie auch am Schluß von § 1, eine beliebige positive ganze Zahl bedeuten, die nur nicht größer sein darf, als die Dimension n des Raums, den wir uns zugrunde gelegt denken, oder, wie Herr Schoute*) sagt, des *Operationsraums*. Wir legen nun dem aus einem $[m+1]$ und einem ihm incidenten $[m]$ bestehenden Raumpaare die Bedingung

$$(1_{v+1}, 0_{m-v})\,(b, 0_{m+1})$$

auf. Durch diese Bedingung wird ein $[n-m+v-1]$ und ein $[n-m-b-1]$ als *gegeben* betrachtet, und wird verlangt, daß der $[m]$ mit dem $[n-m+v-1]$ einen $[v]$ gemein habe, und daß der $[m+1]$ mit dem $[n-m-b-1]$ einen Punkt gemein habe. Wir legen nun den $[n-m-b-1]$ in den $[n-m+v-1]$. Dann ist die dem Raumpaare auferlegte Bedingung auf zweifache Weise erfüllbar, erstens dadurch, daß der $[m]$ mit dem $[n-m-b-1]$ einen Punkt gemein habe, und dabei mit dem $[n-m+v-1]$ einen $[v]$ gemein habe. Denn, wenn der $[m]$ mit dem $[n-m-b-1]$ einen Punkt gemein hat, so hat diesen Punkt auch der $[m+1]$ gemein, weil ja der $[m]$ in dem $[m+1]$ liegt. Die so dem $[m]$ auferlegte Bedingung lautet aber in unsrer Bezeichnungsweise:

$$(b+1, 1_v, 0_{m-v}).$$

Die dem Raumpaare auferlegte Bedingung ist zweitens auch dadurch erfüllbar, daß der $[m+1]$ mit dem $[n-m-b-1]$ einen Punkt gemein hat und dabei mit dem $[n-m+v-1]$ einen $[v+1]$ gemein hat. Denn, wenn der $[m+1]$ mit dem $[n-m+v-1]$ einen $[v+1]$ gemein hat, so muß der im $[m+1]$ liegende $[m]$ mit demselben $[n-m+v-1]$ einen $[v]$ gemein haben. Die so dem $[m+1]$ auferlegte Bedingung lautet in unsrer Bezeichnungsweise:

$$(b, 1_{v+1}, 0_{m-v}).$$

Nach dem Prinzip von der Erhaltung der Anzahl ist also die dem Raumpaare aufgestellte Bedingung gleich der Summe der beiden eben beschriebenen Bedingungen, von denen die erste dem $[m]$, die zweite dem $[m+1]$ auferlegt ist. Die so erhaltene Incidenzformel können wir folgendermaßen schreiben:

$$1) \qquad 0 = (b+1, 1_v, 0_{m-v}) - (1_{v+1}, 0_{m-v})\,(b, 0_{m+1}) + (b, 1_{v+1}, 0_{m-v}),$$

Die Dimension jeder der drei durch diese Gleichung verbundenen Bedingungen ist gleich $b+v+1$, der Summe der in den Klammern befindlichen Zahlen. Speziell erhalten wir für $v=0$:

$$0 = (b+1, 0_m) - (1, 0_m)\,(b, 0_{m+1}) + (b, 1, 0_m)$$

*) Schoute, Mehrdimensionale Geometrie, I, Sammlung Schubert, Band XXXV.

Wenn wir noch spezieller $m = 0$ setzen, erhalten wir

$$0 = (b + 1) - (1)(b, 0) + (b, 1)$$

und dies ist die schon früher 1884 von mir abgeleitete Incidenzformel. Soeben hatten wir $v = 0$ gesetzt. Wenn wir v noch den größten Wert, also den Wert m, erteilen, erhalten wir:

$$0 = (b + 1, 1_m) - (1_{m+1})(b, 0_{m+1}) + (b, 1_{m+1}).$$

Für die Incidenz von Strahl und Ebene erhalten wir aus 1) zwei Incidenzformeln, indem wir $m = 1$ und $v = 0$ sowie $v = 1$ setzen. Dieselben lauten also:

$$0 = (b + 1, 0) - (1, 0)(b, 0, 0) + (b, 1, 0)$$

und

$$0 = (b + 1, 1) - (1, 1)(b, 0, 0) + (b, 1, 1).$$

Hiervon sind die Formeln IV und V des § 10 meines „Kalküls der abzählenden Geometrie" (Leipzig, 1879) spezielle Fälle, wie man erkennt, wenn man $b = 1$, $n = 3$ setzt.

§ 3.

Die Dimensionen der beiden in Incidenz befindlichen Räume unterscheiden sich um zwei.

Wenn ein $[m]$ in einem $[m+1]$ und dieser $[m+1]$ in einem $[m+2]$ liegt, so liegt auch der $[m]$ in dem $[m+2]$. Man kann daher die Incidenzformeln für einen $[m+2]$ und einen ihm incidenten $[m]$ erhalten, wenn man die in § 2 abgeleiteten Formeln für die Incidenz eines $[m]$ und eines $[m+1]$ und die Incidenz eines $[m+1]$ und eines $[m+2]$ anwendet, falls es gelingt, die auf den vermittelnden $[m+1]$ bezüglichen Bedingungen zu eliminieren. Dies gelingt auf folgende Weise.

Erstens, man setze in Formel 1) $b + 1$ statt b. Dadurch erhält man:

$$2) \quad (b+2, 1_v, 0_{m-v}) - (1_{v+1}, 0_{m-v})(b+1, 0_{m+1}) + (b+1, 1_{v+1}, 0_{m-v}) = 0.$$

Zweitens, man setze in Formel 1) $b = 1$ und multipliziere dann mit $(b, 0_{m+2})$. Dadurch erhält man:

$$3) \quad (2, 1_v, 0_{m-v})(b, 0_{m+2}) - (1_{v+1}, 0_{m-v})(1, 0_{m+1})(b, 0_{m+2}) + (1, 1_{v+1}, 0_{m-v})(b, 0_{m+2}) = 0.$$

Drittens, man wende Formel 1) auf die Incidenz eines $[m+1]$ und eines $[m+2]$ für $v = 0$ an, und multipliziere dann mit $(1_{v+1}, 0_{m-v})$. Dadurch ergibt sich:

$$4) \quad (b+1, 0_{m+1})(1_{v+1}, 0_{m-v}) - (1, 0_{m+1})(b, 0_{m+2})(1_{v+1}, 0_{m-v}) + (b, 1, 0_{m+1})(1_{v+1}, 0_{m-v}) = 0.$$

Viertens, man wende Formel 1) auf die Incidenz eines $[m+1]$ und nes $[m+2]$ an, d. h. man schreibe $m+1$ statt m, ferner ersetze man durch $v+1$. Dann kommt:

$$(b+1, 1_{v+1}, 0_{m-v}) - (1_{v+2}, 0_{m-v})\,(b, 0_{m+2}) + (b, 1_{v+2}, 0_{m-v}) = 0.$$

Wenn man nun von den so gewonnenen Formeln 2) bis 5) 2) und addiert, und von der erhaltenen Summe die Summe von 3) und 5) btrahiert, erhält man eine Formel, die gar keine auf den $[m+1]$ beglichen Bedingungen mehr enthält, sondern lediglich solche, die sich f den $[m]$ und solche, die sich auf den $[m+2]$ beziehen, und diese rmel ist zugleich die allgemeine grundlegende Incidenzformel für einen + 2] und einen ihm incidenten $[m]$. Sie lautet:

$$(b+2, 1_v, 0_{m-v}) - (2, 1_v, 0_{m-v})\,(b, 0_{m+2})$$
$$+ (1, 1_v, 0_{m-v})\,(b, 1, 0_{m+1}) - (b, 1_{v+2}, 0_{m-v}) = 0.$$

Speziell erhalten wir aus 6) für $m=0$, also auch $v=0$, die grundgende Incidenzformel für eine Ebene und einen ihr incidenten Punkt, mlich:

$$(b+2) - (2)\,(b, 0, 0) + (1)\,(b, 1, 0) - (b, 1, 1) = 0.$$

ese Formel ergibt für $b=1$, $n=3$ die Formel VII in § 10 meines alküls der abzählenden Geometrie". Weiter spezialisieren wir Formel 6), dem wir $m=1$ und $v=0$ sowie $v=1$ setzen. So erhalten wir:

$$(b+2, 0) - (2, 0)\,(b, 0, 0, 0) + (1, 0)\,(b, 1, 0, 0) - (b, 1, 1, 0) = 0$$

d

$$(b+2, 1) - (2, 1)\,(b, 0, 0, 0) + (1, 1)\,(b, 1, 0, 0) - (b, 1, 1, 1) = 0.$$

ese beiden Formeln sind die beiden grundlegenden Incidenzformeln für en dreidimensionalen linearen Raum und einen ihm incidenten Strahl.

§ 4.

Die Dimensionen der beiden in Incidenz befindlichen Räume unterscheiden sich um drei.

In ähnlicher Weise wie in § 3 die Incidenzformel für einen $[m]$ und en $[m+2]$ abgeleitet ist, läßt sich aus dieser und der in § 2 bewiesenen cidenzformel die grundlegende Incidenzformel für einen $[m+3]$ und en ihm incidenten $[m]$ ableiten. Zu diesem Zwecke gehen wir von n beiden Incidenzformeln aus, die sich auf den $[m+2]$ und einen ihm cidenten $[m]$ sowie auf den $[m+3]$ und einen ihm incidenten $[m+2]$ ziehen, und eliminieren dann die auf den $[m+2]$ bezüglichen Bedingungen. ies gelingt auf folgende Weise:

Erstens, man setze in Formel 6) $b+1$ statt b. Dadurch erhält man:

$$7) \quad (b+3, 1_v, 0_{m-v}) - (2, 1_v, 0_{m-v})(b+1, 0_{m+2}) + (1, 1_v, 0_{m-v})(b+1, 1, 0_{m+1}) - (b+1, 1_{v+2}, 0_{m-v}) = 0.$$

Zweitens, man setze in Formel 6) 1 statt b und multipliziere dann mit $(b, 0_{m+3})$. Dadurch kommt:

$$8) \quad (3, 1_v, 0_{m-v})(b, 0_{m+3}) - (2, 1_v, 0_{m-v})(1, 0_{m+2})(b, 0_{m+3}) + (1, 1_v, 0_{m-v})(1, 1_1, 0_{m+1})(b, 0_{m+3}) - (1, 1_{v+2}, 0_{m-v})(b, 0_{m+3}) = 0.$$

Drittens, man wende Formel 1) für $v=0$ auf die Incidenz des $[m+2]$ und $[m+3]$ an, indem man also $m+2$ statt m setzt, und multipliziere dann mit $(2, 1_v, 0_{m-v})$. Dann kommt:

$$9) \quad (b+1, 0_{m+2})(2, 1_v, 0_{m-v}) - (1, 0_{m+2})(b, 0_{m+3})(2, 1_v, 0_{m-v}) + (b, 1, 0_{m+2})(2, 1_v, 0_{m-v}) = 0.$$

Viertens, man wende Formel 1) für $v=1$ auf die Incidenz des $[m+2]$ und $[m+3]$ an, indem man $m+2$ statt m setzt, und multipliziere dann mit $(1, 1_v, 0_{m-v})$. So erhält man:

$$10) \quad (b+1, 1, 0_{m+1})(1, 1_v, 0_{m-v}) - (1, 1, 0_{m+1})(b, 0_{m+3})(1, 1_v, 0_{m-v}) + (1, 1_v, 0_{m-v})(b, 1, 1, 0_{m+1}) = 0.$$

Fünftens, man wende Formel 1) auf die Incidenz des $[m+2]$ und $[m+3]$ an, setze aber dabei $v+2$ statt v. So kommt:

$$11) \quad (b+1, 1_{v+2}, 0_{m-v}) - (1_{v+3}, 0_{m-v})(b, 0_{m+3}) + (b, 1_{v+3}, 0_{m-v}) = 0.$$

Wenn man jetzt von den soeben erhaltenen fünf Gleichungen die erste, dritte, fünfte addiert, die zweite und vierte aber subtrahiert, so fallen alle auf den $[m+2]$ bezüglichen Bedingungen fort, und es resultiert demgemäß die allgemeine Form der grundlegenden Incidenzformeln für einen $[m+3]$ und einen ihm incidenten $[m]$. Man erhält nämlich:

$$12) \quad (b+3, 1_v, 0_{m-v}) - (3, 1_v, 0_{m-v})(b, 0_{m+3}) + (2, 1_v, 0_{m-v})(b, 1, 0_{m+2}) - (1, 1_v, 0_{m-v})(b, 1, 1, 0_{m+1}) + (b, 1_{v+3}, 0_{m-v}) = 0.$$

Hier kann wieder b jede positive Zahl und v jede der $m+1$ Zahlen von 0 bis m sein. Wir spezialisieren, indem wir $m=2$ und v gleich null, eins und zwei setzen. So erhalten wir die grundlegenden Incidenzformeln für einen fünfdimensionalen linearen Raum und eine ihm incidente Ebene, nämlich

$$(b+3, 0, 0) - (3, 0, 0)(b, 0, 0, 0, 0, 0) + (2, 0, 0)(b, 1, 0, 0, 0, 0) - (1, 0, 0)(b, 1, 1, 0, 0, 0) + (b, 1, 1, 1, 0, 0) = 0;$$

$$(b+3,1,0)-(3,1,0)(b,0,0,0,0,0)+(2,1,0)(b,1,0,0,0,0)$$
$$-(1,1,0)(b,1,1,0,0,0)+(b,1,1,1,1,0)=0;$$
$$(b+3,1,1)-(3,1,1)(b,0,0,0,0,0)+(2,1,1)(b,1,0,0,0,0)$$
$$-(1,1,1)(b,1,1,0,0,0)+(b,1,1,1,1,1)=0.$$

§ 5.

Die Dimensionen der beiden in Incidenz befindlichen Räume sind beliebig.

Durch die Ableitungen in § 3 und § 4 ist der Weg vorgezeichnet, auf dem man zu den grundlegenden Incidenzformeln bei noch größerem Unterschiede der Dimensionen gelangen kann. So wie in § 3 aus vier Gleichungen, in § 4 aus fünf Gleichungen die gesuchte Incidenzformel resultierte, so hat man sechs Gleichungen durch Addition mit alternierendem Vorzeichen zu verbinden, um die allgemeine Form aller grundlegenden Incidenzformeln für einen $[m+4]$ und einen ihm incidenten $[m]$ zu erkennen, u. s. w. durch den Schluß von q auf $q+1$ erkennt man auf solche Weise die Richtigkeit der folgenden, alle grundlegenden Incidenzformeln als spezielle Fälle umfassenden Formel, die sich auf die Incidenz eines $[m]$ und eines $[m+q)$ bezieht:

13) $$(b+q,1_v,0_{m-v})-(q,1_v,0_{m-v})(b,0_{m+q})$$
$$+(q-1,1_v,0_{m-v})(b,1_1,0_{m+q-1})-(q-2,1_v,0_{m-v})(b,1_2,0_{m+q-2})$$
$$+\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$+(-1)^q(1,1_v,0_{m-v})(b,1_{q-1},0_{m+1})-(-1)^q(b,1_{v+q},0_{m-v})=0.$$

Wir spezialisieren die allgemeinste Incidenzformel 13), indem wir $b=1$, $v=0$ setzen. Dadurch erhalten wir:

14) $$(q+1,0_m)-(q,0_m)(1,0_{m+q})+(q-1,0_m)(1_2,0_{m+q-1})$$
$$-(q-2,0_m)(1_3,0_{m+q-2})+\cdots$$
$$+(-1)^q(1,0_m)(1_q,0_{m+1})-(-1)^q(1_{q+1},0_m)=0,$$

Den Inhalt dieser Incidenzformel fand auch Herr Giambelli in Torino, indem er allgemeiner eine Formel aufstellte, die für den Fall richtig ist, daß ein $[r]$ und ein $[s]$ einen $[t]$ gemeinsam haben. Herr Giambelli schrieb mir seine Formel am 6. September 1902. Schon am 15. September 1902 schrieb mir Herr Giambelli eine Verallgemeinerung seines Resultats, aus der er durch eine besondere Untersuchung erkennen konnte, daß auch die oben abgeleiteten allgemeineren Incidenzformeln richtig sind, die ich ihm kurz vorher mitgeteilt hatte. Die beiden Resultate des Herrn Giambelli sind bis jetzt noch nicht veröffentlicht.

§ 6.

Die jeder Incidenzformel zugehörigen beiden verschwindenden Determinanten.

Wenn nicht ein $[m]$, sondern $q+2$ solcher Räume $[m]$ einem und demselben $[m+q]$ incident sind, so gilt die Formel 13) für jeden der $q+2$ Räume $[m]$. Man erhält daher $q+2$ Gleichungen, aus denen die auf den $[m+q]$ bezüglichen Bedingungen eliminiert werden können. Dadurch erhält man eine gleich Null gesetzte Determinante zwischen den $q+1$ Bedingungen, die sich auf jeden der $q+2$ Räume $[m]$ beziehen. Die so erhaltene Gleichung ist also immer richtig, wenn die $q+2$ Räume $[m]$ in einem und demselben $[m+q]$ liegen. Sie lautet in allgemeinster Gestalt:

$$15)\quad 0=\begin{vmatrix} (b+q,1_v,0_{m-v})_1 & , & (q,1_v,0_{m-v})_1 & , \cdots, & (1,1_v,0_{m-v})_1 & , & 1 \\ (b+q,1_v,0_{m-v})_2 & , & (q,1_v,0_{m-v})_2 & , \cdots, & (1,1_v,0_{m-v})_2 & , & 1 \\ \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ (b+q,1_v,0_{m-v})_{q+2} & , & (q,1_v,0_{m-v})_{q+2} & , \cdots, & (1,1_v,(0_{m-v})_{q+2} & , & 1 \end{vmatrix}.$$

Die den $q+1$ Bedingungs-Symbolen angesetzten Indices $1, 2, \cdots,$ bis $q+2$ beziehen sich auf die $q+2$ Räume, die in einem und demselben $[m+q]$ liegen.

Speziell setzen wir $m=0$, also auch $v=0$, $b=1$ und erhalten:

$$16)\qquad 0=\begin{vmatrix} (q+1)_1 & , & (q)_1 & , & (q-1)_1 & , \cdots, & (1)_1 & , & 1 \\ (q+1)_2 & , & (q)_2 & , & (q-1)_2 & , \cdots, & (1)_2 & , & 1 \\ \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ (q+1)_{q+2} & , & (q)_{q+2} & , & (q-1)_{q+2} & , \cdots, & (1)_{q+2} & , & 1 \end{vmatrix},$$

welche Gleichung immer zwischen den Bedingungen von $q+2$ Punkten besteht, die in einem und demselben q-dimensionalen, linearen Raume liegen. Da bei Punkten jede Grundbedingung eine Potenz der einfachen Grundbedingung (1) ist, indem $(p)_i-((1)_i)^p$ ist, so stellt die Determinante der Gleichung 16) auch das Produkt aller möglichen Differenzen der auf die $q+2$ Punkte bezüglichen einfachen Grundbedingung (1) dar. Wenn zwei von den $q+2$ Punkten zusammenfallen, so wird die Gleichung 15) identisch erfüllt, weil dann zwei Horizontalreihen der Determinante übereinstimmen, oder, wie man auch sagen kann, weil ein Faktor des soeben erwähnten Differenzen-Produktes Null wird. Dies hängt damit zusammen, daß durch $q+1$ Punkte immer ein $[q]$ gelegt werden kann.

Aus der Gleichung 13) des § 5 kann man auch noch in anderer Weise eine gleich Null zu setzende Determinante ableiten. Wenn nämlich in und derselbe $[m]$ $q+2$ Räumen $[m+q]$ incident ist, so gilt 13) für ede der $q+2$ Räume $[m+q]$. Man erhält daher $q+2$ Gleichungen, us denen die auf den $[m]$ bezüglichen Grundbedingungen eliminiert erden können. Dadurch erhält man eine gleich Null gesetzte Deterinante zwischen den $q+1$ Bedingungen, die sich auf jeden der $q+2$ äume $[m+q]$ beziehen. Die so erhaltene Gleichung ist also immer chtig, wenn die $[q+2]$ Räume $[m+q]$, die wieder durch die Indices , 2, $\cdots$ bis $q+2$ unterschieden sind, durch einen und denselben $[m]$ ndurchgehen. Sie lautet in allgemeinster Gestalt:

$$\begin{vmatrix} (b, 0_{m+q})_1 & , (b, 1_1, 0_{m+q-1})_1 & , \cdots, (b, 1_{q-1}, 0_{m+1})_1 & , (b, 1_{v+q}, 0_{m-v})_1 & , 1 \\ (b, 0_{m+q})_2 & , (b, 1_1, 0_{m+q-1})_2 & , \cdots, (b, 1_{q-1}, 0_{m+1})_2 & , (b, 1_{v+q}, 0_{m-v})_2 & , 1 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ (b, 0_{m+q})_{q+2}, & (b, 1_1, 0_{m+q-1})_{q+2}, & \cdots, (b, 1_{q-1}, 0_{m+1})_{q+2}, & (b, 1_{v+q}, 0_{m-v})_{q+2}, & 1 \end{vmatrix}.$$

Die Determinanten 15), 16), 17) erinnern an die Determinante rischen den $(q+2)(q+1)$ Koordinaten von $q+2$ Punkten in einem $+1)$-dimensionalen linearen Raume, welche, gleich Null gesetzt, die edingung ausdrückt, daß jene $q+2$ Punkte in einem und demselben dimensionalen linearen Raume liegen. Unsere gleich Null gesetzten eterminanten enthalten aber nicht Koordinaten von Punkten, also Abände, sondern *Grundbedingungen verschiedener Dimension*, die dann, beiglich eines zugrunde gelegten Systems von genügend hoher Stufe, in nzahlen zu verwandeln sind.

§ 7.

Gleichungen der speziellen Lage.

Wenn zwei oder mehr lineare Räume keine allgemeine Lage zu einanr haben, so müssen nicht allein zwischen ihren Koordinaten Gleichungen stehen, sondern auch zwischen den ihnen auferlegbaren Grundbedingungen. iese sollen *Gleichungen der speziellen Lage* heißen. Im allgemeinen lassen ch die Gleichungen der speziellen Lage aus den oben entwickelten cidenzformeln ableiten, wie aus folgendem Beispiel hervorgeht. Wenn ı $[m+q]$ und ein $[m+r]$ einen und denselben $[m]$ gemeinsam haben, müssen zwischen den Grundbedingungen des $[m+q]$ und des $[m+r]$ eichungen der speziellen Lage bestehen, die man erhält, wenn man die gemeine Incidenzformel 13) auf die Incidenz des $[m]$ und des $[m+q]$ wie auf die Incidenz des $[m]$ und des $[m+r]$ anwendet, und dann die

auf den [n] bezüglichen Grundbedingungen *diminiert*. Freilich ist das Verfahren, das man einzuschlagen hat, um diese Elimination zu bewerkstelligen, nicht immer so nahe liegend, wie bei den in § 6 abgeleiteten Gleichungen der speziellen Lage. Hierfür ein Beispiel:

Schon in unserm vorstellbaren Raume haben zwei Strahlen s und s' eine spezielle Lage zu einander, wenn sie sich schneiden. Um so mehr ist dies der Fall, wenn die Dimension $n > 3$ ist. Wir können nun die Gleichung niedrigster Dimension zwischen den Grundbedingungen der beiden sich schneidenden Strahlen s und s' finden, wenn wir von den beiden Formeln ausgehen, die sich auf die Incidenz des Strahls s und des Schnittpunkts P sowie auf die Incidenz des Strahls s' und des Schnittpunkts P beziehen, und dann die auf P bezüglichen Bedingungen eliminieren. Dies gelingt auf folgende Weise. Die Incidenzformel für s und P lautet:

$$(b+1) - (1)\,(b,0) + (b,1) = 0.$$

Wir setzen $b = 1$ und multiplizieren mit der Bedingung $(2,0)'$*). So kommt:

18) $$(2)\,(2,0)' - (1)\,(1,0)\,(2,0)' + (1,1)\,(2,0)' = 0.$$

Wir setzen ferner $b = 2$ in der auf die Incidenz von P und von s' bezüglichen Formel und multiplizieren mit $(1,0)$. So erhalten wir:

19) $$(3)\,(1,0) - (1)\,(1,0)\,(2,0)' + (1,0)\,(2,1)' = 0.$$

Durch Subtraktion von 18) und 19) ergibt sich:

20) $$(2)\,(2,0)' + (1,1)\,(2,0)' - (3)\,(1,0) - (1,0)\,(2,1)' = 0.$$

Nun setzen wir $b = 2$ in der auf die Incidenz von P und s' bezüglichen Formel, und multiplizieren mit der Bedingung (1). Dadurch erhalten wir:

21) $$(4) - (2)\,(2,0)' + (1)\,(2,1)' = 0.$$

Ferner setzen wir $b = 1$ in der auf die Incidenz von P und s bezüglichen Formel, und multiplizieren mit der Bedingung (2):

22) $$(4) - (3)\,(1,0) + (2)\,(1,1) = 0.$$

Addiert man nun 20) und 21) und subtrahiert dann 22), so erhält man:

23) $$(1,1)\,(2,0)' - (1,0)\,(2,1)' + (1)\,(2,1)' - (2)\,(1,1) = 0.$$

Multiplizieren wir nun noch die auf die Incidenz von P und s' bezügliche Formel für $b = 1$ mit der Bedingung $(1,1)'$, so erhalten wir:

24) $$(2)\,(1,1)' - (1)\,(2,1)' + (2,2)' = 0$$

*) Die gestrichelten Bedingungs-Symbole beziehen sich auf den Strahl s'.

Addiert man jetzt 23) und 24), so erhält man:

25) $(1,1)(2,0)' - (1,0)(2,1)' - (2)(1,1) + (2)(1,1)' + (2,2)' = 0.$

In derselben Weise erhält man durch Vertauschung von s und s':

26) $(1,1)'(2,0) - (1,0)'(2,1) - (2)(1,1)' + (2)(1,1) + (2,2) = 0.$

Endlich ergibt sich durch Addition von 25) und 26) die gesuchte von den auf P bezüglichen Bedingungen freie Incidenzformel für zwei sich schneidende Strahlen s und s':

27) $$(2,2) - (2,1)(1,0)' + (2,0)(1,1)' + (1,1)(2,0)' - (1,0)(2,1)' + (2,2)' = 0.$$

Diese Formel ist mit dem ersten der beiden Resultate des Herrn Giambelli (vgl. oben) in Einklang. Sie ist übrigens die n-dimensionale Verallgemeinerung der bei liniengeometrischen Untersuchungen von Sturm und andern öfters angewandten Formel IX in § 10 meines „Kalküls der abzähl. Geom."

Wegen der Schwierigkeit der Elimination macht die Ableitung allgemeiner Formeln der speziellen Lage aus den Incidenzformeln eine besondere Untersuchung (Mitt. d. Hamb. Math. Ges., 1903) nötig. Ebenso ist eine besondere Abhandlung notwendig, welche zeigt, wie vermöge der Incidenzformeln aus dem Chasles'schen Korrespondenzprinzip alle denkbaren Koincidenzformeln abgeleitet werden können, die sich auf die *Korrespondenz* zweier linearer Räume *beliebiger* Dimension beziehen.

Hamburg, am 14. Oktober 1902.

Über einen Satz aus der Theorie der ebenen Kollineationen.

Von

FRANZ LONDON in Breslau.

1) Ist eine projektive Beziehung $\mathfrak{P}$ zwischen den Punkten eines und desselben Trägers gegeben, so besitzt $\mathfrak{P}$ zwei Doppelpunkte A, B, welche reell oder konjugiert komplex sein können; die Involution J jedoch, welche dieselben Doppelpunkte besitzt, wie $\mathfrak{P}$, ist stets *reell* vorhanden, sie dient geradezu dazu die Doppelpunkte in jedem Falle zu definieren. Ist $\mathfrak{P}$ gegeben, so ist J konstruierbar mittels des folgenden — wohl zuerst von H. Schröter angegebenen — Satzes*): *Sind P_1, P_{-1} die einem Punkte P in Bezug auf eine Projektivität $\mathfrak{P}$ vorwärts und rückwärts entsprechenden Punkte, und ist Q der zu P in Bezug auf P_1, P_{-1} harmonische Punkt, so ist P, Q ein Paar der Involution J, welche dieselben Doppelpunkte hat, wie $\mathfrak{P}$.* Dieser Satz spielt in der Theorie der projektiven Verwandtschaft eine grundlegende Rolle und ist bei wichtigen Untersuchungen von weittragender Bedeutung gewesen**). Auf den folgenden Seiten soll die analoge Frage für die ebene Kollineation untersucht werden, wobei man zu einer vollständigen, jedoch nicht ganz nahe liegenden Verallgemeinerung des in Rede stehenden Satzes gelangt, welche ebenfalls für die Theorie der Kollineation nicht ohne Bedeutung zu sein scheint. Denn, wie der

*) Cf. Schröter: Crelles Journal Bd 77, p. 120, 121; vgl. auch Pasch: Beweis eines Satzes über projektive Punktreihen, Cr. Journ. Bd. 91, p. 349—351; sowie den sehr einfachen Beweis bei Steiner-Schröter: Theorie der Kegelschnitte. III. Auflage durchgesehen von R. Sturm. Leipzig 1898 p. 63.

**) Vgl. z. B. H. Wiener: Rein geometrische Theorie der Darstellung binärer Formen durch Punktgruppen auf der Geraden. Habilitationsschrift. Darmstadt 1885, Nr. 17.

H. Wiener: Über die aus 2 Spiegelungen zusammengesetzten Verwandtschaften. Berichte der k. sächsischen Gesellschaft der Wissenschaften. Math. phys. Classe 1891, Nr. 89*, 106.

C. Segre: Note sur les homographies binaires et leurs faisceaux. Crelles Journal Bd. 100, p. 320 ff.

Schrötersche Satz die Lösung der konstruktiven Probleme gestattet, welche sich auf ein Punktepaar beziehen, das nicht direkt, sondern durch eine quadratische Konstruktion, als Doppelpunktepaar einer Projektivität, implicite gegeben ist, so gelingen mit Hilfe der hier gefundenen Verallgemeinerung die analogen Konstruktionen in Bezug auf ein Punkttripel, welches nicht unmittelbar, sondern durch eine kubische Konstruktion — etwa als Doppelpunkt-Tripel einer ebenen Kollineation — gegeben ist, wobei auch die Realitätsverhältnisse der drei Punkte des Tripels bezüglich der Ausführbarkeit der Konstruktionen keine Rolle spielen. Zum Schlusse werden einige Anwendungen des erlangten Theorems gegeben.

2) Um den in art. 1) genannten Schröterschen Satz für die Kollineation zu verallgemeinern, geben wir demselben folgende Fassung: *Besteht zwischen den Punkten einer Geraden eine projektive Beziehung* $\mathfrak{P}$ *und ist* P_1, P_{-1} *der zu* P *in Bezug auf* $\mathfrak{P}$ *vorwärts und rückwärts entsprechende Punkt, so ist der harmonische Punkt von* P *in Bezug auf* P_1, P_{-1} *identisch mit dem harmonischen Punkt von* P *in Bezug auf die Doppelpunkte von* $\mathfrak{P}$. Handelt es sich um die Verallgemeinerung dieses Satzes für eine Kollineation $\mathfrak{C}$, welche die Punkte einer und derselben Ebene in ein-eindeutige Beziehung setzt, so gilt es die harmonische Polare p eines Punktes P in Bezug auf das von den drei Doppelpunkten A, B, C von $\mathfrak{C}$ gebildete Dreieck zu bestimmen, ohne daß dieses Dreieck anders als allein durch die Kollineation $\mathfrak{C}$ gegeben ist, die man etwa durch vier Paare homologer Punkte bestimmt denken möge. Dabei verstehen wir unter der harmonischen Polaren p von P in Bezug auf das Dreieck A, B, C die gerade Polare von P in Bezug auf die von den drei Dreiecksseiten a, b, c gebildete, zerfallende Kurve III. Ordnung. Sind $p_1 | p_2 | p_3$ die homogenen Koordinaten von P, $a(x) = 0$, $b(x) = 0$, $c(x) = 0$ die Gleichungen von a, b, c, so ist die Gleichung der harmonischen Polare p von P:

$$a(x)\,b(p)\,c(p) + b(x)\,c(p)\,a(p) + c(x)\,a(p)\,b(p) = 0,$$

oder

$$\frac{a(x)}{a(p)} + \frac{b(x)}{b(p)} + \frac{c(x)}{c(p)} = 0.$$

Im Falle a, b, c reell sind, wird p bekanntlich erhalten, indem man P aus den Ecken A, B, C auf die Dreiecksseiten nach A_1, B_1, C_1 projiziert und zu A_1, B_1, C_1 in Bezug auf die auf derselben Seite liegenden Ecken die harmonischen Punkte A_2, B_2, C_2 konstruiert; diese drei Punkte liegen bekanntlich in einer Geraden p, der gesuchten harmonischen Polaren. Während jedoch diese Konstruktion zunächst nur für ein reelles Dreieck gilt, behält die analytische Definition, von der wir oben ausgingen, auch für Dreiecke Geltung, die zwei konjugiert komplexe Ecken besitzen, oder deren Ecken teilweise oder sämtlich zusammenfallen, wie solche als Doppeldreiecke einer Kollineation auftreten können.

Die Verallgemeinerung des Schröterschen Satzes für die ebene Kollineation fordert demnach die Konstruktion der harmonischen Polare eines Punktes in Bezug auf das Doppeldreieck einer gegebenen Kollineation.

3) Sei eine ebene Kollineation $\mathfrak{C}$ gegeben, in dieser entspreche dem — nicht auf einer Doppelgeraden gelegenen — Punkte P der Punkt P_1, diesem der Punkt P_2; ferner entspreche in der zu $\mathfrak{C}$ inversen Kollineation $\mathfrak{C}^{-1}$ dem Punkte P der Punkt P_{-1}, diesem der Punkt P_{-2}, so daß also P_{-1} der dem Punkte P in Bezug auf $\mathfrak{C}$ *„rückwärts"* entsprechende Punkt ist. Durch ein solches Punkt-Quintupel $(P_{-2}, P_{-1}, P, P_1, P_2)$, bei welchem jeder Punkt der in Bezug auf $\mathfrak{C}$ homologe Punkt des vorangehenden ist, wird eine Kollineation eindeutig und *in einfachster Weise* bestimmt.

Wir denken uns nun das Koordinatensystem so gewählt, daß die Punkte:

$$P_{-2},\ P_{-1},\ P,\ P_1,\ P_2$$

resp. die homogenen Koordinaten:

$$1|1|1,\quad 1|0|0,\quad 0|1|0,\quad 0|0|1,\quad \alpha_1|\alpha_2|\alpha_3$$

besitzen. Alsdann wird die Kollineation $\mathfrak{C}$ analytisch dargestellt durch die Gleichungen:

$$(1)\qquad \begin{cases} \varrho x_1' = \alpha_1 x_3, \\ \varrho x_2' = \alpha_2 (x_3 - x_1), \\ \varrho x_3' = \alpha_3 (x_3 - x_2). \end{cases}$$

Hierin bedeutet ϱ einen Proportionalitätsfaktor, $x_1'|x_2'|x_3'$ sind die Koordinaten des dem Punkte $x_1|x_2|x_3$ in Bezug auf $\mathfrak{C}$ homologen Punktes, und $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ sind von Null verschieden vorauszusetzen, da sonst die Determinante $\alpha_1\alpha_2\alpha_3$ der linearen Substitution (1) verschwindet und die Kollineation eine *„ausgeartete"* wird, was wir ausdrücklich ausschließen.

Ein Punkt $x_1|x_2|x_3$ wird alsdann ein Doppelpunkt von $\mathfrak{C}$ sein, wenn:

$$x_1 : x_2 : x_3 = \alpha_1 x_3 : \alpha_2 (x_3 - x_1) : \alpha_3 (x_3 - x_2)$$

d. h. wenn $x_1|x_2|x_3$ die drei Gleichungen befriedigt:

$$\begin{aligned} x_2\alpha_3(x_3 - x_2) - x_3\alpha_2(x_3 - x_1) &= 0, \\ x_3\alpha_1 x_3 - x_1\alpha_3(x_3 - x_2) &= 0, \\ x_1\alpha_2(x_3 - x_1) - x_2\alpha_1 x_3 &= 0. \end{aligned}$$

Diese drei Gleichungen stellen drei Kegelschnitte durch die drei Doppelpunkte A, B, C von $\mathfrak{C}$ dar; die Jacobische Kurve $J(xxx) = 0$ des von diesen drei Kegelschnitten gebildeten Netzes zerfällt in die drei Geraden a, b, c, welche die drei Doppelpunkte A, B, C verbinden.

Nun ergibt sich durch einfache Ausrechnung:

$$) \quad J(xxx) = \left\{ \begin{array}{l} 2\alpha_2^2\alpha_3 x_1^3 - 2\alpha_1\alpha_3^2 x_2^3 + 2\alpha_2\alpha_1^2 x_3^3 + 2\alpha_1\alpha_3^2 x_2^2 x_3 - 2\alpha_1\alpha_2\alpha_3 x_3^2 x_2 \\ +(2\alpha_2^2\alpha_3 - 4\alpha_1\alpha_2\alpha_3) x_3^2 x_1 + (2\alpha_2\alpha_3^2 - 4\alpha_2^2\alpha_3) x_1^2 x_3 \\ -2\alpha_2\alpha_3^2 x_1^2 x_2 + 2\alpha_2\alpha_3^2 x_2^2 x_1 + (6\alpha_1\alpha_2\alpha_3 - 2\alpha_2\alpha_3^2) x_1 x_2 x_3 \end{array} \right\}.$$

. Bezug auf diese, die drei Seiten des Doppeldreiecks darstellende Kurve I. O. bilden wir die Gleichung der geraden Polaren von $P(0|1|0)$, d. i.

$$\frac{\partial^2 J(x, x, x)}{\partial x_2^2} = 0,$$

ler:

$$-12\alpha_1\alpha_3^2 x_2 + 4\alpha_1\alpha_3^2 x_3 + 4\alpha_2\alpha_3^2 x_1 = 0$$

ler, da $\alpha_3 \neq 0$ vorausgesetzt wurde:

$$) \qquad \alpha_2 x_1 - 3\alpha_1 x_2 + \alpha_1 x_3 = 0.$$

ie durch diese Gleichung dargestellte Gerade hat aber zu den fünf nsekutiven Punkten P_{-2}, P_{-1}, P, P_1, P_2 eine höchst einfache Lagenziehung. Betrachten wir nämlich das Dreieck, dessen Seiten $P_{-2}P_{-1}$, $_{-1}P_1$, P_1P_2 sind, so haben diese Seiten resp. die Gleichungen:

$$x_3 - x_2 = 0, \quad x_2 = 0, \quad \alpha_2 x_1 - \alpha_1 x_2 = 0$$

id die harmonische Polare von $P(0|1|0)$ in Bezug auf dieses Dreieck ist:

$$\alpha_2 x_1 - 3\alpha_1 x_2 + \alpha_1 x_3 = 0;$$

eselbe ist also mit der oben gefundenen harmonischen Polaren (3) in ezug auf das Doppeldreieck identisch. Die harmonische Polare eines liebigen Punktes in Bezug auf das Doppeldreieck einer Kollineation $\mathfrak{C}$ ßt sich demnach linear konstruieren, ohne daß man das Doppeldreieck mittelbar zu kennen braucht, sondern indem von $\mathfrak{C}$ nur vier Paare ntsprechender Punkte gegeben sind. Diese Konstruktion ist — mutatis mutandis — analog der für die Projektivität gültigen entsprechenden Konstruktion, und es ergibt sich somit als die gewünschte Verallgemeinerung des Schröterschen Satzes:

Entspricht in einer ebenen Kollineation $\mathfrak{C}$ einem — nicht auf einer Doppelgeraden gelegenen — Punkte P der Punkt P_1 und diesem der Punkt $_2$ und in der inversen Kollineation $\mathfrak{C}^{-1}$ dem Punkte P der Punkt P_{-1} nd diesem der Punkt P_{-2}, so ist die harmonische Polare von P in Bezug f das Doppeldreieck von $\mathfrak{C}$ identisch mit der harmonischen Polaren von in Bezug auf das Dreieck, welches $P_{-2}P_{-1}$, $P_{-1}P_1$, P_1P_2 zu Seiten hat.

Da man für jedes durch *eine kubische Konstruktion* gegebene — d. h. uf eine kubische Gleichung mit reellen Koeffizienten führende — Dreieck ine Kollineation linear konstruieren kann, welche dasselbe zum Doppelreieck hat, so ist auch in allen diesen Fällen die Konstruktion der in Bezug auf ein solches Dreieck harmonischen Polaren geleistet. Insbesondere

gilt dies auch für die am häufigsten auftretenden Fälle kubischer Konstruktionen, wo die Dreiecksecken als das System der drei letzten Schnittpunkte zweier Kegelschnitte gegeben sind, von denen ein Schnittpunkt bekannt ist*); auch die der direkten Konstruktion unzugänglichen Fälle, wo ein Eckenpaar konjugiert komplex ist, werden durch unsere Konstruktion mit erledigt.

4) Mittels des dualen Verfahrens kann man in Bezug auf das Doppeldreieck einer Kollineation auch umgekehrt zu einer beliebigen Geraden p den harmonischen Pol P konstruieren.

Auch die konische Polare eines Punktes P in Bezug auf das Doppeldreieck A, B, C einer Kollineation $\mathfrak{C}$ können wir nunmehr konstruieren. Dieselbe hat, wenn $p_1 | p_2 | p_3$ die Koordinaten von P und

$$a(x) = 0, \quad b(x) = 0, \quad c(x) = 0$$

die Seiten des Dreiecks sind, die Gleichung:

$$a(p)\,b(x)\,c(x) + b(p)\,c(x)\,a(x) + c(p)\,a(x)\,b(x) = 0,$$

und ist derjenige Kegelschnitt durch A, B, C, welcher P und dessen harmonische Polare p zu Pol und Polare hat. Wie sich aus der obigen Gleichung der konischen Polaren ergibt, gehen die harmonischen Polaren ihrer Punkte sämtlich durch P. *Man erhält somit alle Punkte der konischen Polaren von P, indem man die harmonischen Pole aller durch P gehenden Strahlen konstruiert. Umgekehrt ergibt sich zu einem Kegelschnitt durch A, B, C der Pol als derjenige Punkt, in welchem die harmonischen Polaren zweier Punkte des Kegelschnittes sich schneiden.*

5) Man kann nun auch die Aufgabe lösen: *Einen Kegelschnitt K zu konstruieren, welcher durch zwei gegebene Punkte P_1, P_2 und die drei nicht bekannten Doppelpunkte einer gegebenen Kollineation $\mathfrak{C}$ hindurchgeht.*

Man hat zunächst den Punkt P zu konstruieren, von welchem K die konische Polare in Bezug auf das Doppeldreieck von $\mathfrak{C}$ ist, indem man zu P_1, P_2 nach art. 3) die harmonischen Polaren konstruiert, welche sich in P schneiden. Alsdann erhält man den gesuchten Kegelschnitt, indem man zu P die konische Polare nach art. 4) konstruiert. *Auf diesem Wege gelingt die lineare Konstruktion eines Kegelschnittes durch fünf Punkte, von denen drei nicht direkt, sondern durch irgend eine kubische Konstruktion gegeben sind.*

---

*) Sind K, K_1 diese beiden Kegelschnitte, P der bekannte gemeinsame Punkt, so ist diejenige Kollineation $\mathfrak{C}$, welche die drei letzten Schnittpunkte von K, K_1 zu Doppelpunkten hat, und in welcher dem K der K_1 entspricht, unmittelbar konstruierbar. Denn die durch $\mathfrak{C}$ den Kegelschnitten K, K_1 induzierten projektiven Punktreihen sind perspektiv und besitzen P als Perspektivitätszentrum; dadurch ist die Kollineation $\mathfrak{C}$ unmittelbar festgelegt.

6) Wir betrachten noch den Fall, wo die drei Doppelpunkte teilweise oder sämtlich zusammenfallen. In diesem Falle muß die Diskriminante der kubischen Gleichung, von der die Doppelpunkte der durch (1) gegebenen Kollineation abhängen, verschwinden. Diese kubische Gleichung lautet:

$$(4) \qquad \begin{vmatrix} \varrho & 0 & -\alpha_1 \\ \alpha_2 & \varrho & -\alpha_2 \\ 0 & \alpha_3 & \varrho - \alpha_3 \end{vmatrix} = \varrho^3 - \alpha_3 \varrho^2 + \alpha_2 \alpha_3 \varrho - \alpha_1 \alpha_2 \alpha_3 = 0,$$

mit der Diskriminante*)

$$(5) \qquad \Delta = \tfrac{1}{27} \alpha_2 \alpha_3^2 \{27 \alpha_1^2 \alpha_2 - \alpha_2 \alpha_3^2 - 18 \alpha_1 \alpha_2 \alpha_3 + 4 \alpha_2^2 \alpha_3 + 4 \alpha_1 \alpha_3^2\}.$$

Je nachdem $\Delta \lesseqgtr 0$ ist oder nicht, sind alle Doppelpunkte der Kollineation reell oder nicht. Da wir, um ausgeartete Kollineationen auszuschließen, α_1, α_2, α_3 von Null verschieden voraussetzen, so wird Δ nur Null, wenn die Klammergröße verschwindet. In diesem Falle fallen zwei der drei Doppelpunkte A, B, C zusammen (etwa $B = C$) und auch von den drei Doppelgeraden werden zwei ($AB = AC$) identisch. Die konischen Polaren aller nicht auf AB gelegenen Punkte in Bezug auf ein solches degeneriertes Doppeldreieck zerfallen in die doppeltzählende Doppelgerade AB und eine andere durch den doppelt zählenden Doppelpunkt B gehende Gerade; die harmonischen Polaren gehen sämtlich durch B. Der Beweis unseres Satzes (art. 3) über die Konstruktion der harmonischen Polaren wird aber auch in diesem Falle in keiner Weise alteriert, diese Konstruktion bleibt daher unverändert und es gilt somit: *Konstruiert man bei einer ebenen Kollineation, bei welcher zwei der drei Doppelpunkte sich in einem Punkt B vereinigen, zu irgend einem — nicht auf einer Doppelgeraden gelegenen — Punkte P die harmonische Polare in Bezug auf das Dreieck, welches $P_{-2}P_{-1}$, $P_{-1}P_1$, P_1P_2 zu Seiten hat, so geht diese harmonische Polare durch B.*

Fallen schließlich alle drei Doppelpunkte zusammen ($A = B = C$), so fallen auch die drei Doppelgeraden zusammen. In diesem Falle ist die linke Seite der kubischen Gleichung (4) der Kubus einer linearen Funktion und es ist: $\alpha_1 : \alpha_2 : \alpha_3 = 1 : 3 : 9$. Für alle nicht auf der Doppelgeraden gelegenen Punkte fallen die harmonischen, wie die konischen Polaren mit der einen dreifach zählenden Doppelgeraden zusammen. Die frühere Konstruktion der harmonischen Polaren bleibt jedoch auch hier, wie man sich unmittelbar überzeugen kann, unverändert erhalten. Somit gilt: *Konstruiert man bei einer Kollineation, deren Doppelpunkte sich in einem Punkte*

*) Vgl. z. B. Clebsch-Lindemann: Vorlesungen über Geometrie I, p. 183.

vereinigen, für alle — nicht auf der Doppelgeraden gelegenen — Punkte P der Ebene in Bezug auf das Dreieck, welches $P_{-2}P_{-1}$, $P_{-1}P_1$, P_1P_2, zu Seiten hat, die harmonische Polare, so sind alle diese Polaren identisch und fallen mit der einzigen in diesem Falle vorhandenen Doppelgeraden zusammen.

Auch die dualen Sätze sind bemerkenswert.

7) Mittels der vorangehenden Konstruktionen kann man auch über die Realitätsverhältnisse der Doppelpunkte entscheiden bei einer gegebenen Kollineation, deren Doppelpunkte nicht bekannt sind. Es gilt nämlich der Satz: *Die Doppelpunkte einer Kollineation $\mathfrak{C}$ sind dann und nur dann sämtlich reell und verschieden, wenn die Schnittpunkte Q, R der harmonischen und konischen Polaren irgend eines Punktes P in Bezug auf das Doppeldreieck der Kollineation imaginär sind.* In der Tat, sei P ein beliebiger Punkt der Ebene und wählen wir dasselbe Koordinatensystem, wie in art. 3), dann stellt uns Gleichung (2) das Doppeldreieck der Kollineation $\mathfrak{C}$ dar und es ist die Gleichung der konischen Polaren von $P(0\,|\,1\,|\,0)$ in Bezug auf dieses Dreieck:

$$\frac{\partial J}{\partial x_2} = 0,$$

oder nach Fortlassung eines von Null verschiedenen Faktors:

$$(6)\quad J_2(xx) = \alpha_2\alpha_3 x_1^2 + 3\alpha_1\alpha_3 x_2^2 + \alpha_1\alpha_2 x_3^2 - 2\alpha_1\alpha_3 x_2x_3 - 2\alpha_2\frac{3\alpha_1-\alpha_2}{2}x_3x_1 - 2\alpha_2\alpha_3 x_1x_2 = 0.$$

Die harmonische Polare von P war nach Gleichung (3)

$$(3)\qquad \alpha_2 x_1 - 3\alpha_1 x_2 + \alpha_1 x_3 = 0.$$

Diese harmonische Polare enthält die beiden Punkte:

$$\beta = (0\,|\,1\,|\,3) \quad \text{und} \quad \gamma = (\alpha_1\,|\,0\,|\,-\alpha_2).$$

Die Realität der Schnittpunkte Q, R der harmonischen und konischen Polaren hängt bekanntlich ab von dem Vorzeichen des Ausdrucks:

$$(7)\qquad D = J_2(\beta\gamma)^2 - J_2(\beta\beta)\,J_2(\gamma\gamma),$$

wobei $J(\beta, \gamma)$ den Ausdruck bedeutet, welchen man erhält, wenn man die Koordinaten von β, γ in die Polarform $J_2(x, y)$ von $J_2(x, x)$ einsetzt. Dann und nur dann sind die beiden Schnittpunkte der harmonischen und konischen Polaren reell, wenn $D \geqq 0$. Nun ist:

$$J_2(\beta\beta) = 3\alpha_1(3\alpha_2 - \alpha_3), \quad J_2(\gamma\gamma) = \alpha_1\alpha_2(\alpha_1\alpha_3 + \alpha_2^2 + 3\alpha_1\alpha_2 - \alpha_2\alpha_3),$$

$$J_2(\beta\gamma) = -\frac{3}{2}\alpha_1\alpha_2(3\alpha_1 + 2\alpha_2 - \alpha_3).$$

Also ist:

$$D = \frac{9}{4}\alpha_1^2\alpha_2^2(3\alpha_1 + 2\alpha_2 - \alpha_3)^2 - 3\alpha_1^2\alpha_2(3\alpha_2 - \alpha_3)(\alpha_1\alpha_3 + \alpha_2^2 + 3\alpha_1\alpha_2 - \alpha_2\alpha_3).$$

Durch direkte Ausrechnung ergibt sich:

$$D = \frac{3}{4}\alpha_1^2\alpha_2\{27\alpha_1^2\alpha_2 - \alpha_2\alpha_3^2 - 18\alpha_1\alpha_2\alpha_3 + 4\alpha_1\alpha_3^2 + 4\alpha_2^2\alpha_3\},$$

oder wegen (5):

$$D = \frac{3^4}{2^2}\frac{\alpha_1^2}{\alpha_3^2}\Delta. \tag{8}$$

Da alle drei Doppelpunkte dann und nur dann reell und verschieden sind, wenn $\Delta < 0$, also wenn $D < 0$ d. h. wenn die Schnittpunkte Q, R der konischen und harmonischen Polaren imaginär sind, so ist der oben aufgestellte Satz bewiesen.

Um bei einer gegebenen Kollineation, deren Doppelpunkte nicht bekannt sind, zu entscheiden, ob dieselbe drei *reelle* Doppelpunkte besitzt oder nicht, hat man demnach mittels der in art. 2), 3) angegebenen Methoden zu einem beliebigen Punkte die harmonische und die konische Polare zu konstruieren; die Schnittpunkte Q, R dieser beiden Linien sind die Doppelpunkte derjenigen Involution J, welche die konjugierten Punktepaare der konischen Polaren auf der harmonischen Polaren induzieren; diese Involution J ist nach bekannten, einfachen Methoden linear konstruierbar. Je nachdem die Doppelpunkte Q, R dieser Involution imaginär sind oder nicht — d. h. je nachdem die Paare derselben getrennt sind, oder nicht — sind die drei Doppelpunkte der Kollineation reell verschieden oder nicht. Vereinigen sich die beiden Schnittpunkte Q, R in einen einzigen Punkt Q, ist also $D = 0$ — so fallen auch — da alsdann wegen (8) auch $\Delta = 0$ zwei der drei Doppelpunkte zusammen und zwar ebenfalls im Punkte Q, da alsdann, wie wir art. 6) sahen, die konische Polare in ein Geradenpaar, welches Q als Doppelpunkt hat, ausartet. Fallen alle drei Doppelpunkte zusammen, so werden die konische und harmonische Polare, wie wir sahen, identisch, ihre Schnittpunkte hören also auf, bestimmt zu sein.

8) Sind die Schnittpunkte Q, R der harmonischen und konischen Polaren eines Punktes P reell, also zwei der drei Doppelpunkte der Kollineation $\mathfrak{C}$ konjugiert komplex, so bilden, wie man leicht erkennt, P, Q, R einen Cyklus in derjenigen cyklischen Kollineation mit drei-elementigem Cyklus, welche dieselben Doppelpunkte besitzt, wie die ursprüngliche Kollineation. Man kann demnach auf diesem Wege zu einer gegebenen Kollineation $\mathfrak{C}$ mit nur einem reellen Doppelpunkt die cyklische Kollineation mit drei-elementigem Cyklus konstruieren, welche dieselben Doppelpunkte, wie $\mathfrak{C}$, besitzt. Ebenso kann man mittels der von uns angegebenen Konstruktionen auch diejenigen Kollineationen linear herstellen, welche dasselbe Doppeldreieck, wie $\mathfrak{C}$, besitzen und sich in eingeschriebener resp.

umschriebener Dreieckslage*) befinden. Denn diese führen die ursprüngliche Kollineation $\mathfrak{C}$ in sich über, und es befindet sich bei ihnen der zu einem Punkte P entsprechende Punkt P_1 auf der harmonischen resp. konischen Polaren von P in Bezug auf das Doppeldreieck von $\mathfrak{C}$; hierdurch aber lassen sich die genannten Kollineationen in einfacher Weise herstellen.

Breslau, Oktober 1902.

*) Cf. Pasch: Zur Theorie der Kollineation und Reciprocität, Math. Ann. Bd. 23, p. 419—436; cf. p. 426 ff.

er die Geometrieen, in denen die Geraden die Kürzesten sind*).

Von

Georg Hamel in Karlsruhe.

Inhaltsverzeichnis.

Seite

leitung: Das Problem und die benutzten Axiome 232
Die historische Stellung des Problems 233

Kapitel I: Die Geometrieen der Ebene.

1. Die „idealen Elemente und die Namengebung" 235
2. Die „Länge" 237
3. Die Monodromieaxiome 244
4. Die Normalgerade; die elliptischen Geometrieen 246
5. Die Minkowskische und die Hilbertsche Geometrie 251
6. Über den Einfluß von Unstetigkeiten der Funktion w 253
7. Verallgemeinerung des Begriffes „Aichkurve" 253

Kapitel II: Die Geometrieen im Raume.

8. Der Aufbau der postulierten Geometrieen 255
9. Die Monodromieaxiome 259
10. Die Minkowskische und die Hilbertsche Geometrie 260
11. Über die Differentialgleichung: $\frac{\partial^2 h}{\partial u \partial q} = \frac{\partial^2 h}{\partial v \partial p}$ 261
12. Über die geometrische Deutung der Resultate. Verallgemeinerung des Begriffes „Aichfläche". 262

*) Die vorliegende Arbeit ist nicht nur ein Auszug der unter demselben Titel chienenen Dissertation (Göttingen, 1901). Der Gedankengang und die hauptsächsten Resultate sind zwar dieselben geblieben, doch sind wesentliche Stellen ganz earbeitet worden, so namentlich die Einleitung und die Paragraphen 1, 2, 8. s neu ist der § 4, der von den elliptischen Geometrieen handelt. Ich hoffe, gleichig manche Einzelheiten knapper und schärfer gefaßt zu haben, als es in meiner ertation geschehen ist.

Einleitung.

Das Ziel der nachfolgenden Untersuchungen ist dieses:

Es sollen alle Geometrieen aufgestellt werden, die folgenden Forderungen genügen:

A) Den Axiomen der „Verknüpfung“ und der „Anordnung“ in der Hilbertschen*) oder den „projektiven“ Axiomen in der Schurschen**) Bezeichnungsweise.

Bei Beschränkung auf die Ebene allein nehmen wir noch den Desarguesschen Satz als Axiom hinzu***).

B) Folgendem Axiom der Stetigkeit, das in dieser Fassung das Archimedische†) und das Vollständigkeitsaxiom†) in sich schließt:

„Wird durch geometrische Konstruktionen (nach den Axiomen (A)) innerhalb einer Strecke eine unendliche Reihe von Punkten P erzeugt der Art, daß jeder Pnnkt P zwischen dem vorhergehenden und dem nachfolgenden liegt, so soll die genannte Reihe innerhalb oder an den Enden der Strecke einen ganz bestimmten Grenzpunkt besitzen, d. h. einen Punkt, der alle von der Punktreihe P einmal überholten Punkte trennt von allen den Punkten, die von der Punktreihe P niemals erreicht werden“††.)

C) Den „linearen Kongruenzaxiomen“, die von dem Abtragen der Strecken handeln (IV, 1, 2, 3 nach der Hilbertschen Zählung; im folgenden stets so bezeichnet). Doch soll das erste Kongruenzaxiom in folgender Weise modifiziert werden:

Es darf Punkte geben, von denen aus auf allen oder auf einzelnen hindurchgehenden Geraden ein Abtragen von Strecken nicht möglich ist. Solche Punkte wollen wir je nachdem kurzweg „singulär“ oder „relativ singulär“ (d. h. in Bezug auf die betreffende Gerade) nennen. Alle anderen Punkte heißen „regulär“; Punkte aber, die nicht schlechtweg singulär sind, „erreichbar“.

Das Auftreten singulärer Punkte möge jedoch in folgender Weise beschränkt sein:

---

*) Hilbert: „Grundlagen der Geometrie“ Festschrift zur Feier der Enthüllung des Gauss-Weber-Denkmals in Göttingen. Teil I (Teubner 1899).

**) Schur: „Ueber die Grundlagen der Geometrie“. Math. Ann. 55. Daselbst findet man auch weitere Litteraturangaben.

***) Siehe u. a. Hilbert: „Grundlagen“. Kap. V.

†) Hilbert: „Grundlagen“. Axiom V, § 8; außerdem: „Ueber den Zahlbegriff“. (Berichte der deutschen Mathematiker-Vereinigung 1900); endlich die Uebersetzung der „Grundlagen“ durch Herrn Laugel in den Annales de l'école normale 3. Serie, tome XVII, p. 122, 123.

††) Vergl. u. a. Klein: „Ueber die sogenannte Nicht-Euklidische Geometrie“. Math. Ann. 6, p. 136.

α) Kann auf einer Geraden von einem Punkte aus eine Strecke a nach der einen Seite hin abgetragen werden, so soll dies auch nach derandern Seite hin gestattet sein.

β) Kann auf einer Geraden von einem Punkte aus eine Strecke a abgetragen werden, so sollen an derselben Stelle auch alle Strecken abgetragen werden dürfen, die „kleiner" wie a sind, d. h. solche Strecken, deren sämtliche Punkte innerhalb von a liegen.

γ) Sind zwei Geraden a und b gegeben (die auch ineinanderliegen können) mit je einem auf ihnen erreichbaren Punkte A resp. B, so sind die Umgebungen von A und B „vergleichbar", d. h. es gibt auf a mindestens eine Strecke AA', die einer Strecke BB' auf b kongruent ist.

δ) Es gibt ein Gebiet endlicher Ausdehnung, innerhalb dessen nur reguläre Punkte liegen*).

D) Dem Axiom: Die gerade Strecke soll die kürzeste Verndung zwischen zwei Punkten sein.

E) Einem Axiom der Differentiierbarkeit (Siehe § 2, p. 241).

Nicht gefordert werden:

a) das Parallelenaxiom,

b) der erste Kongruenzsatz oder das Kongruenzaxiom IV, 6 nach der lbertschen Zählung: „Wenn für zwei Dreiecke ABC und $A'B'C'$ die ngruenzen $AB \equiv A'B'$, $AC \equiv A'C'$, $\sphericalangle BAC \equiv \sphericalangle B'A'C'$ gelten, so id auch stets die Kongruenzen

$$\sphericalangle ABC \equiv \sphericalangle A'B'C' \quad \text{und} \quad \sphericalangle ACB \equiv \sphericalangle A'C'B'$$

üllt."

(Von der Kongruenz der Winkel werden wir im folgenden überhaupt ht weiter reden.)

Der Schwerpunkt der ganzen Fragestellung liegt in der Forderung D). diese wohl zuerst von Archimedes**) erhoben worden ist, wollen wir im folgenden kurz die **„Archimedische Forderung"** nennen. (Zum terschied von dem schon genannten Archimedischen Axiom der Stetigkeit.)

Soviel sei über das Problem selbst in der Einleitung gesagt. Was ne historische Stellung und seine Beziehung zur Variationsrechnung geht, so seien folgende Bemerkungen erlaubt:

*) Die Darstellung weicht hier von der in meiner Dissertation gegebenen nicht rheblich ab. Dort wird der Begriff „Länge" direkt definitionsmäßig als eine Zahl geführt (§ 2); hier soll später in § 2 gezeigt werden, wie aus unseren Axiomen C alle Forderungen arithmetischen Charakters abgeleitet werden können, die ich in meiner sertation (§ 2) axiomatisch hingestellt habe. Andererseits habe ich mich hier in- rn auf einfachere Fälle beschränkt, als ich gleich von vornherein an dem festhalte, ich das „starke Monodromieaxiom" nenne, d. h. ich verlange, daß stets $AB \equiv BA$ soll. Man vergleiche hierzu die §§ 3 meiner Dissertation und dieser Abhandlung.

**) „*Περι σφαιρας και κυλινδρου*". *Λαμβανομενον α'*.

Unter die hier in Rede stehenden Geometrieen gehören außer der elementaren Euklidischen Geometrie auch die beiden sogenannten nicht-euklidischen Geometrieen, die, wie Herr Klein*) zuerst zeigte, auf der Grundlage einer projektiven Geometrie (welche unseren Forderungen A) und B genügt) durch Einführung einer geeigneten Maßbestimmung aufgebaut werden können. Dann stellte Herr Hilbert**) in einem an Herrn Klein gerichteten Briefe eine allgemeinere Geometrie auf, deren Maßbestimmung so beschaffen ist, daß die Gerade Kürzeste bleibt. Endlich machte Herr Minkowski***) mit einem andern Typus von Geometrieen bekannt, welche unseren Forderungen Genüge leisten.

Es scheint deshalb die Frage nach der allgemeinsten Geometrie dieser Art wohl an sich schon berechtigt zu sein†).

Sie dürfte aber noch ein weiteres Interesse beanspruchen, indem sie einen Spezialfall der Frage bildet, welche ich das „Umkehrungsproblem der Variationsrechnung" nennen möchte:

„Gegeben ist ein System von Differentialgleichungen; gesucht ist das allgemeinste Variationsproblem, zu dem diese Differentialgleichungen als Lagrangesche Gleichungen gehören".

Seine Entstehung verdankt diese Aufgabe wohl der Mechanik, und zwar besonders den Untersuchungen Jacobis über das Hamiltonsche Prinzip. In dem Falle, daß eine gewöhnliche Differentialgleichung vorliegt, gab meines Wissens die erste Lösung Imchenetzky††); weitere Arbeiten darüber veröffentlichten die Herren Königsberger†††), Böhm*†) und in besonders eleganter Form Herr Hirsch**†), der auch partielle

---

*) Klein: „Ueber die sogenannte Nicht-Euclidische Geometrie". Math. Ann. 4.

**) Hilbert: „Ueber die gerade Linie als kürzeste Verbindung zweier Punkte". Math. Ann. 34.

***) Minkowski: „Geometrie der Zahlen" (Teubner, Leipzig 1896) Kap. I.

†) Vergleiche dazu: Hilbert: „Mathematische Probleme; Vortrag, gehalten auf dem internationalen Mathematiker-Congress Paris 1900", p. 15. Darboux: „Leçons sur la théorie générale des surfaces". Bd. III. Paris 1894, p. 54.

††) Imchenetzky: „Sur la transformation d'une équation differentielle de l'ordre pair à la forme d'une équation isopérimétrique". Bulletin de St. Pétersbourg, tome XXXI, 1886.

(Dieses Citat verdanke ich einer freundlichen Mitteilung des Herrn Kneser.)

†††) Königsberger: „Ueber die Principien der Mechanik". Berliner Berichte 1896, II. „Ueber die allgemeinen kinetischen Potentiale". Crelles Journal 121.

*†) Böhm: „Die Existenzbedingungen eines von den ersten und zweiten Differentialquotienten der Koordinaten abhängigen kinetischen Potentials". Crelles Journal 121.

**†) Hirsch: „Die Existenzbedingungen des verallgemeinerten kinetischen Potentials". Math. Ann. 50 und: „Ueber eine charakteristische Eigenschaft der Differentialgleichungen der Variations-Rechnung". Math. Ann. 49.

Differentialgleichungen in den Bereich seiner Betrachtungen hineinzog. Was Systeme von Differentialgleichungen angeht, so finden sich wohl die ersten Resultate bei Helmholtz*); Herr A. Mayer**) gab die noch fehlenden Beweise. Allerdings gehen diese Untersuchungen nur so weit, daß die Bedingungen dafür angegeben werden, wann jede der Differentialgleichungen von der Form einer Lagrangeschen Gleichung ist; ob sich ein System durch geeignete Kombination der einzelnen Gleichungen auf diese Form bringen läßt, wird nicht erörtert. Auch ist die Frage in keinem Falle über das rein Formale hinaus verfolgt worden; andere Bedingungen der Variationsrechnung als die Lagrangeschen sind nie erörtert worden.

Es soll nun gerade hier in dem angekündigten Probleme, soweit es ein solches der Variationsrechnung ist, das Schwergewicht auf die Erörterung der hinreichenden Bedingungen der Variationsrechnung gelegt werden.

Kapitel I.

Die Geometrieen der Ebene.

§ 1.

Die „idealen" Elemente und die „Namengebung".

Denken wir uns ein bestimmtes System von Punkten, Geraden und Ebenen, das unseren Forderungen A) und B) genügt. Wie Herr Schur***) gezeigt hat, kann man dann zu diesen Punkten, Geraden und Ebenen solche „idealen" Punkte, Geraden und Ebenen zufügen, daß das modifizierte Parallelen-Axiom erfüllt ist:

Je zwei Geraden einer Ebene haben einen (und nur einen) Punkt gemeinsam.

Die Axiome der ersten Gruppe bleiben für das erweiterte Gebiet erhalten, ebenso die Stetigkeitsaxiome, wie daraus hervorgeht, daß eine Strecke idealer Punkte von einem eigentlichen Punkte aus auf eine Strecke eigentlicher Punkte projiziert werden kann. Die allerdings notwendig gewordene präzisere Fassung des Begriffes „zwischen" sei mit Hilfe einer

---

*) Helmholtz: „Ueber die physikalische Bedeutung des Prinzips der kleinsten Wirkung". Crelles Journal 100.

**) A. Mayer: „Die Existenzbedingungen eines kinetischen Potentials". Sächsische Berichte 1896, p. 519.

***) Schur: „Ueber die Einführung der sogenannten idealen Elemente in die projective Geometrie". Math. Ann. 39 (1891).

„Normalebene“ (resp. Normalgeraden) vollzogen und zwar in derselben Weise, wie von Herrn Dehn*) nach dem Vorgange des Herrn Pasch**) geschehen ist.

Mit dieser vervollständigten Geometrie operieren wir jetzt weiter. Dabei unterscheiden wir die ursprünglichen Punkte, Geraden und Ebenen von den „idealen“ durch die Bezeichnung „eigentlich“***). (Die „eigentlichen“ Punkte zerfallen nach unserer früheren Terminologie wieder in „erreichbare“ und „singuläre“.)

Es ist nun eine bekannte Folgerung der Axiome A) und B), daß jedem Punkte der (erweiterten) Ebene (auf die wir uns jetzt zunächst beschränken) ein reelles Zahlentripel x, y, t derart zugeordnet werden kann, daß der Punkt durch die Verhältnisse dieser drei Zahlen, die Gerade aber durch eine homogene lineare Gleichung zwischen den drei Zahlen dargestellt wird.

Die Folge des Axioms B) und des modifizierten Parallelenaxioms ist es, daß auch umgekehrt zu jedem Zahlentripel (außer dem Tripel $x = 0$, $y = 0$, $t = 0$) ein Punkt und zu jeder linearen Gleichung, deren Koeffizienten nicht sämtlich Null sind, eine Gerade gehört. Wir können insbesondere erreichen, daß $t = 0$ die „Normalgerade“ darstellt†)

Diese Einführung eines Zahlensystems soll nur zur Charakterisierung der Punkte und Geraden dienen, also eine Art Namengebung darstellen; keineswegs aber soll damit irgend eine Länge definiert werden.

Statt des Tripels x, y, t werden wir meistens $\frac{x}{t}, \frac{y}{t}$ als Koordinaten betrachten und diese mit x, y bezeichnen; $x = \infty$ sowie $y = \infty$ bedeuten jetzt Punkte der Normalgeraden††).

Schließen wir zunächst einmal diese Normalgerade von der ferneren Betrachtung aus (wir werden sie später wieder aufnehmen (§ 4)), so

*) M. Dehn: „Die Legendreschen Sätze über die Winkelsumme im Dreieck“. Math. Ann. 53 (1900).

**) M. Pasch: „Vorlesungen über neuere Geometrie“. Leipzig (Teubner) 1882.

***) Es kann sehr wohl sein, daß es gar keine idealen Elemente gibt. Dann hat die Geometrie elliptischen Typus; die Normalgerade muß zur Präzision des Begriffes „zwischen“ von Anfang an eingeführt werden.

†) Aus der zahlreichen Litteratur zu diesem Gegenstande sei außer der schon zitierten noch genannt: Klein: „Ueber die sogenannte Nicht-Euclidische Geometrie“, Math. Ann. Bd. 4, 6, 7. Fiedler: „Darstellende Geometrie“, Bd. III, außerdem Vierteljahrsschrift der nat. Ges. Zürich, XV, 2 (1871). Anne Lucy Bosworth: „Begründung einer vom Parallelenaxiom unabhängigen Streckenrechnung“, Diss. Göttingen 1900.

††) Daß unsere unter B) gegebene Fassung der Stetigkeit mit dem üblichen Begriff der Stetigkeit in der Zahlenmannigfaltigkeit x, y (abgesehen von der Normalgeraden) übereinstimmt, folgt aus dem Fundamentalsatz der projektiven Geometrie.

ınn man alle andern Geraden mit Hilfe eines Parameters s darstellen ırch die Differentialgleichungen:

$$\frac{d^2x}{ds^2} = 0 \quad \text{und} \quad \frac{d^2y}{ds^2} = 0,$$

›bei noch $ds \equiv +\sqrt{dx^2 + dy^2}$ gesetzt werden darf.

Als Form der linearen Gleichung einer Geraden wird sich im folgenn diese empfehlen:

$$y \cos \vartheta - x \sin \vartheta = a.$$

ıbei nennen wir ϑ die „Richtung“ der Geraden; falls dieselbe von $\frac{\pi}{2}$ abweicht, dürfen wir auch schreiben

$$y = \operatorname{tg} \vartheta \cdot x + b \quad \text{und} \quad \frac{d^2y}{dx^2} = 0.$$

eiterhin kann der Begriff der „stetigen Kurve“ etwa so eingeführt ırden, daß wir darunter eine Mannigfaltigkeit verstehen, deren x und y h als stetige Funktionen eines stetig veränderlichen Parameters darllen lassen.

§ 2.

Die „Länge“.

Nunmehr suchen wir die Konsequenzen der Axiome C) und D) (siehe nleitung) zu ziehen.

a) Kann man von einem eigentlichen Punkte O aus auf einer Geraden ıe Strecke $OA_1 \equiv a$ abtragen, so kann man a auf der Geraden beliebig t nacheinander abtragen:

$$OA_1 \equiv A_1A_2 \equiv A_2A_3 \equiv \cdots.$$

'olgerung aus C, α und IV, 1).

Dabei kann es vorkommen, daß der Ausgangspunkt O einmal wieder ›erschritten wird, (die Gerade ist in unserer erweiterten Ebene eine gehlossene Kurve!) oder aber, es gibt infolge der Stetigkeit einen bestimmten 'enzpunkt G, der alle von der Reihe $A_1, A_2, \cdots$ einmal überholten nkte von den andern trennt.

Nehmen wir zunächst einmal an, daß ein Grenzpunkt G vorhanden Dann gelten die folgenden Sätze:

b) Auf GO selbst kann der Begriff der Kongruenz nicht angewendet rden; es ist insbesondere nicht GO sich selbst kongruent. Denn sonst ıBte nach C, β auch a von G aus abtragbar sein, was dem widerspricht, ß G der Grenzpunkt der Reihe $A_1, A_2, \cdots$ sein soll. Dasselbe gilt für ıe Strecke, die den Punkt G enthält (nach C, β).

c) Die Grenze G ist dieselbe für alle Strecken, die kleiner als a sind.

Denn sei $b < a$, so ist der Satz einleuchtend, wenn man b eine endliche Anzahl mal (n mal) so abtragen kann, daß $nb > a$ wird (Folgerung des Kongruenzaxioms IV, 3 und des Stetigkeitsaxioms). Eine solche Zahl n aber muß es geben, da sonst der Grenzpunkt, der zu b gehört, schon innerhalb a läge, der Begriff der Kongruenz dann aber bereits auf a nicht mehr anwendbar wäre (Satz b).

d) Die Grenze G ist dieselbe für alle Punkte, die zwischen O und G liegen (Folgerung aus Satz c und aus IV, 3).

e) Von einem Grenzpunkt G aus ist auf der betrachteten Geraden ein Streckenabtragen überhaupt nicht möglich.

Denn wäre dies der Fall, so könnte man insbesondere auch die betreffende Strecke g von G aus nach O zu abtragen (gemäß C, α), etwa $GB \equiv g$. Innerhalb GB aber gibt es Stellen, von denen aus a nach G hin abtragbar ist, also ist $a < g$; somit müßte nach (C, β) auch a von G aus abtragbar sein, was nicht der Fall ist.

Also ist ein solcher Grenzpunkt G ein „relativ singulärer Punkt" hinsichtlich der Geraden OG, falls er überhaupt ein eigentlicher Punkt ist. (Siehe Einleitung.) Alle Punkte zwischen O und G sind jedenfalls eigentliche Punkte. Liegen über OG hinaus noch eigentliche Punkte, die nicht alle singulär inbezug auf die Gerade OG sind, so wiederholt sich das Spiel.

f) Existiert eine Grenze G nicht, wird also O von der Punktreihe $A_1, A_2, \cdots$ wieder einmal überschritten (und dann immer wieder), so geschieht dies von allen Punktreihen $B_1, B_2, \cdots$ die durch fortwährendes Abtragen einer andern Strecke b auf derselben Geraden entstehen. Alle Punkte der Geraden sind dann eigentliche, auf der Geraden erreichbare Punkte; wir wollen die Geometrie inbezug auf diese Gerade „vom elliptischen Typus" nennen.

Alle diese Sätze beweisen nun zusammen mit dem Axiom C, γ den folgenden Satz:

g) *Seien s_1 und s_2 zwei Strecken, die von relativ-singulären Punkten bezüglich ihrer Geraden eingeschlossen sind, selbst aber im Innern keine relativ-singulären Punkte enthalten, so kann man s_1 und s_2 kongruent auf einander abbilden; und diese Abbildung ist, wenn man einen erreichbaren Punkt A der Strecke s_1 einem ebensolchen B der Strecke s_2 zugeordnet und auf beiden Strecken einen Richtungssinn festgelegt hat, ein-eindeutig und bestimmt.*

Dasselbe gilt in etwas abgeänderter Weise für zwei Geraden, von denen eine resp. beide von elliptischem Typus sind; nur wird die Abbildung erst dann eindeutig, wenn man bei jedem Punkte noch angibt, wie oft man sich den Ausgangspunkt A resp. B überschritten zu denken hat.

Damit sind alle Sätze gewonnen, die gestatten, den Begriff der „Länge“ einzuführen.

I) Zunächst definieren wir für eine Gerade mit dem erreichbaren Punkte O (ein solcher existiert gemäß C, δ) die Länge folgendermaßen:

Irgend eine Strecke OA ohne relativ-singulären Punkt bezeichnen wir mit der Zahl 1. Den durch fortgesetztes Abtragen der Strecke OA hintereinander entstehenden Strecken $OA_2, OA_3, \cdots$ geben wir die Längen $2, 3, \cdots$. Unter der Strecke der Länge $\frac{1}{m}$ (m eine ganze Zahl) verstehen wir die Strecke OB, die m mal nacheinander abgetragen die Strecke 1 ergibt. (Eine solche Strecke OB existiert infolge der Stetigkeit.)

Es gilt dann der folgende Satz:

Die Strecke der Länge $\frac{1}{m}$ kann durch Vergrößerung von m beliebig klein gemacht werden; d. h. es gibt keine Strecke OC, die kleiner wäre als jede Strecke $\frac{1}{m}$ ($m = 1, 2, 3, \cdots$ in inf.).

Was unter der Strecke c zu verstehen ist, wenn c eine rationale Zahl ist, ist jetzt völlig klar. Die Stetigkeit gestattet aber, auch jeder Irrationalzahl eine Strecke zuzuordnen. Umgekehrt wird dann auch jeder Strecke von O aus eine positive Zahl eindeutig als „Länge“ zugeordnet sein.

II) für alle anderen Strecken definieren wir dann die Länge so, daß wir festsetzen, die Länge sei bei kongruenter Abbildung (Satz g) invariant. Diese Definition ist unabhängig von der Wahl des in Satz g genannten Punktes A (nach IV, 2).

Nun können wir die folgenden Sätze ableiten (Vergleiche § 2 meiner Dissertation):

1) Seien die Punkte $1 : x_1, y_1$ und $2 : x_2, y_2$ durch eine Strecke ohne relativ-singuläre Punkte verbunden, so kommt dieser Strecke eine Länge zu, die eine positive Funktion der vier Variabeln $x_1, y_1; x_2, y_2$ ist. Wir bezeichnen diese Funktion mit $F(x_1, y_1; x_2, y_2)$. Da stets $AB \equiv BA$ sein sollte, so ist auch

$$F(x_1, y_1; x_2, y_2) = F(x_2, y_2; x_1, y_1)^*).$$

2) Liegen die Punkte 1, 2, 3 in dieser Reihenfolge auf ein und derselben Geraden, so ist stets

$$F(x_1, y_1; x_3, y_3) = F(x_1, y_1; x_2, y_2) + F(x_2, y_2; x_3, y_3).$$

Es ist dies eine Folge der Definitionen I) und II) sowie des Kongruenzaxioms IV, 3.

Die hingeschriebene Relation gelte auch noch, wenn zwei Punkte zusammenfallen, d. h. es sei

$$F(x, y; x, y) = 0.$$

*) Dies ist hier anders als in meiner Dissertation, siehe die Bemerkung auf Seite 233 in der Einleitung.

Außerdem läßt sich noch aus der allgemeinen Gleichung 2) die Folgerung ziehen:

Setzen wir $x_2 = x_1 + s\cos\vartheta$, $y_2 = y_1 + s\sin\vartheta$ ($s > 0$, siehe § 1) so ist $F(x_1, y_1; x_2, y_2)$ eine mit s stets wachsende Funktion.

3) *F ist eine stetige Funktion seiner vier Argumente* in einem solchen endlich ausgedehnten Bereiche, innerhalb dessen nur reguläre Punkte liegen.

α) Ändern wir die Punkte 1, 2 zunächst nur so ab, daß sie auf der Geraden 1, 2 bleiben, so ist der Satz eine leicht zu erweisende Folgerung der Sätze 2) sowie der Definitionen I) und II)

β) Wollen wir den Satz allgemein beweisen, so müssen wir das Axiom D) (die Archimedische Forderung) hinzunehmen.

Zuvor aber beweisen wir folgenden Hülfssatz:

Tragen wir von einem Punkte A im Innern des genannten Gebietes auf allen Geraden eine Strecke ε ab, so kommen die Endpunkte dieser Strecken im Sinne der Namengebung nicht beliebig nahe an A heran.

Wäre dies nämlich der Fall, so müßte es einen Strahl S geben, in dessen beliebiger Nähe solche Endpunkte beliebig nahe (im Sinne der Namengebung) an A heranrückten. Nun bestimme man aber auf S einen Punkt B so, daß $AB \equiv \frac{1}{2}\varepsilon$ ist. In B errichte man auf S eine Senkrechte (im Sinne der Namengebung) und trage nach beiden Seiten eine Strecke BD resp. BD' ebenfalls von der Länge $\frac{\varepsilon}{2}$ ab. (Alle diese Operationen sind möglich, nach der Voraussetzung über den in Rede stehenden Bereich.) Jetzt haben zufolge des Axioms D) alle Punkte im Dreiecke ADD' von A eine Entfernung, die kleiner ist als ε; mithin können sich von den oben genannten Endpunkten keine innerhalb ADD' befinden; also dürfen von ihnen auch keine beliebig nahe an S und zugleich beliebig nahe an A liegen.

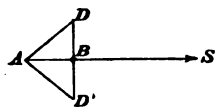


Fig. 1.

Man kann daher um A ein im Sinne der Namengebung endliches Gebiet abgrenzen, innerhalb dessen jeder Punkt von A eine Entfernung kleiner als ε besitzt.

Sei nun AB eine Strecke der Länge l und lasse sich um AB ein Gebiet abgrenzen, innerhalb dessen kein singulärer Punkt liegt. Dann kann man um A einen Bereich angeben, sodaß für jeden Punkt A' desselben $AA' < \frac{\varepsilon}{4}$ ist, und um B einen solchen Bereich, daß für Punkte B' desselben $BB' < \frac{\varepsilon}{4}$ ist; wobei ε eine beliebig kleine vorgegebene Größe ist. (Folgerung des Hülfssatzes.)

Läßt man nun die Punkte A' und B' innerhalb dieser Bereiche irgendwie in die Punkte A, B einrücken, so ist nach der Archimedischen Forderung stets

$$AB < A'B' + BB' + AA' < A'B' + \frac{\varepsilon}{2},$$

$$A'B' < AB + BB' + AA' < AB + \frac{\varepsilon}{2}$$

also

$$|A'B' - AB| < \varepsilon.$$

Und damit ist die Stetigkeit bewiesen.

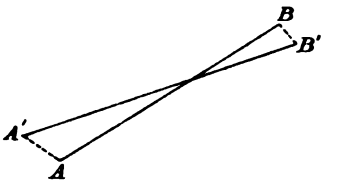


Fig. 2.

Wir wollen nun aber, um bequemer weiter operieren zu können, noch das folgende Axiom einführen:

E) Es besitze die Funktion F im allgemeinen die vier ersten Ableitungen nach allen Variabeln.

Ob ein Teil dieses Axioms vielleicht beweisbar ist, oder ob es möglich ist, ohne dasselbe auszukommen, soll hier nicht weiter erörtert werden.

Ich habe dann in meiner Dissertation gezeigt, wie *infolge der Sätze* 1), 2), 3) *und des Axioms* E) *die Länge dl eines Linienelementes ds, das von der Stelle x, y in der Richtung ϑ ausgeht, sich unabhängig davon, welcher endlichen Strecke ds angehört, folgendermaßen darstellen läßt:*

$$dl \equiv ds \cdot f(x, y, \operatorname{tg} \vartheta),$$

wo f eine positive, eindeutige und im allgemeinen stetige und dreimal differentiierbare Funktion seiner Argumente ist.

(In meiner Dissertation ist die Eindeutigkeit hinsichtlich des letzten Arguments $\operatorname{tg} \vartheta$ nicht gefordert.)

Falls die betrachtete Strecke nicht gerade der y-Achse parallel läuft, ist es bequem, die weniger symmetrische Form

$$dl = g(x, y, \operatorname{tg} \vartheta) dx$$

anzuwenden. Natürlich ist einfach $g \cdot \cos \vartheta = f$.

Allgemein werden wir jetzt unter der Länge eines beliebigen Kurvenstückes, das aber zunächst in jedem Punkte eine im allgemeinen stetige Tangente besitzen soll, den Ausdruck verstehen:

$$\int f(x, y, \operatorname{tg} \vartheta) ds \quad \text{resp.} \quad \int g(x, y, y') dx,$$

diese Integrale längs des betreffenden Kurvenstückes erstreckt, sodaß

$$y = y(x); \quad y' = \operatorname{tg} \vartheta = \frac{dy}{dx}$$

zu setzen ist. Diese Definition ist mit der für Strecken gegebenen infolge unserer Sätze 1), 2) und 3) im Einklang.

Nunmehr schränken wir die Willkür der Funktion f, resp. g, ganz erheblich durch die Forderung ein:

4) Die Funktion g, resp. f soll so gewählt werden, daß die Länge einer geraden Strecke kürzer sei als die eines jeden andern, die Endpunkte der Strecke verbindenden Bogens der oben genannten Art, für dessen Elemente: x, y, y' überhaupt g allenthalben definiert ist.

Dies ist der Inhalt der eingangs erwähnten Archimedischen Forderung. Nach den Lehren der Variationsrechnung zerfällt sie in die folgenden Teilforderungen:

4a) Die Lagrangesche Gleichung des aus $\int g\,dx$ entspringenden Variationsproblems muß die Form annehmen

$$\frac{d^2y}{dx^2} = 0.$$

Also muß g der partiellen Differentialgleichung genügen:

$$\frac{\partial^2 g}{\partial p \partial x} + p\,\frac{\partial^2 g}{\partial p \partial y} - \frac{\partial g}{\partial y} = 0,$$

worin $y' = p$ gesetzt ist.

Man erhält diese partielle Differentialgleichung, indem man die Lagrangesche Gleichung aufstellt und dann berücksichtigt, daß $y'' = 0$ sein soll*).

Differentiiert man die Differentialgleichung für g nochmals nach p, so bekommt man für $M = \frac{\partial^2 g}{\partial p^2}$ eine lineare partielle Differentialgleichung, deren allgemeines Integral lautet:

$$M = W(p, y - px)^{**}).$$

W ist eine willkürliche Funktion der Argumente p und $y - px$.

Also ist zunächst g in der Form anzusetzen:

$$g = \int_c^p \int_c^p W(p, y - px)\,dp\,dp + p \cdot v(x, y) + w(x, y),$$

c ist eine beliebige Konstante.

Setzt man dies Resultat in die Differentialgleichung für g ein, so erhält man durch leichte Rechnung

$$g = \int_c^p \int_c^p W(p, y - px)\,dp\,dp + \frac{\partial u(x, y)}{\partial x} + p\,\frac{\partial u}{\partial y}^{**}).$$

c und u bleiben beliebig.

*) Hirsch, Math. Ann. 49, § 7; Darboux, l. c. p. 53ff.

**) Darboux, l. c. p. 58 u. 59.

Nachdem wir uns bis hierher der formal einfachen Funktion g be-
ent haben, wollen wir weiterhin die allgemeiner $\left(\text{auch für } \vartheta = \pm\frac{\pi}{2}\right)$
ltige Form

$$\int f(x, y, \operatorname{tg}\vartheta)\, ds$$

nutzen.

Setzen wir noch

$$\frac{1}{\cos^3\vartheta} W = w(\operatorname{tg}\vartheta, y - x\operatorname{tg}\vartheta)$$

d

$$c = \operatorname{tg}\vartheta_0,$$

erhalten wir nach leichter Rechnung

$$f = \int_{\vartheta_0}^{\vartheta} \sin(\vartheta - \tau)\, w(\operatorname{tg}\tau, y - x\operatorname{tg}\tau)\, d\tau + \frac{\partial u}{\partial x}\cos\vartheta + \frac{\partial u}{\partial y}\sin\vartheta.$$

abei bedeutet τ die Integrationsvariabele.

4b) Die Weierstraßsche Funktion E muß stets ein negatives
orzeichen besitzen.

Seien $\bar{x}$, $\bar{y}$, $\operatorname{tg}\bar{\vartheta} = \bar{p}$ die Werte von x, y, p längs irgend einer Kurve
welche die gegebenen Endpunkte 1 und 2 verbindet; seien $\vartheta = \operatorname{arctg} p$
Richtungen der auf $\bar{C}$ einmündenden Extremalen (Geraden), die von
ausgehen, so stellt sich E unter Benutzung der Funktion $g(x, y, p)$
durch

$$E = \left[g(\bar{x}, \bar{y}, p) - p\,\frac{\partial g(\bar{x}, \bar{y}, p)}{\partial p} - g(\bar{x}, \bar{y}, \bar{p}) + \bar{p}\,\frac{\partial g(\bar{x}, \bar{y}, p)}{\partial p}\right]\frac{\partial \bar{x}}{\partial \bar{s}}\ ^*).$$

hrt man die vorkommenden Differentiationen an der Darstellung von g
rch W aus, und substituiert hinterher w statt W, so läßt sich der
sdruck für E in folgender Weise zusammenziehen:

$$E = \int_{\bar{\vartheta}}^{\vartheta} \sin(\bar{\vartheta} - \tau)\, w(\operatorname{tg}\tau, \bar{y} - \bar{x}\operatorname{tg}\tau)\, d\tau.$$

raus erkennt man sofort, daß die notwendige Bedingung dafür,
E stets negativ wird, die ist, daß w in seinem ganzen Defi-
tionsbereiche das positive Zeichen besitzt. Und diese Be-
ngung ist auch hinreichend, da wir für $\bar{\vartheta}$ die Beschränkung
nehmen dürfen, daß $|\bar{\vartheta} - \vartheta| < \pi$ ist. Darüber weiteres im § 3.

*) Vergleiche Kneser: „Lehrbuch der Variationsrechnung". Braunschweig 1900.
77, Formel 58.

Es mag bemerkt werden, daß es im vorliegenden Falle keinen Sinn haben würde, nur den Eintritt eines schwachen Minimums zu fordern, sich also mit der Erfüllung der Legendreschen Bedingung zu begnügen. Denn wie eine nähere Überlegung zeigt, ist die Forderung, daß ein schwaches Extremum für alle Strecken stattfinden soll, auf denen $f(x, y, y')$ überhaupt existiert, gleichbedeutend mit der Forderung des starken Extremums.

Was die Jacobische Bedingung angeht, so ist sie in dem Falle, daß wir die Grenzen des zum Minimum zu machenden Integrales festhalten, von selbst erfüllt, da alle von einem Punkte ausgehenden Geraden keine zweite Enveloppe besitzen. Nur in dem Falle, daß alle Punkte und Geraden der erweiterten Geometrie erreichbare Punkte und Geraden sind, ist noch eine Bemerkung hinzuzufügen, hinsichtlich deren wir aber auf den § 4 verweisen möchten.

Abgesehen davon können wir jetzt das folgende Resultat aussprechen:

Alle ebenen Geometrieen, die unseren Axiomen und insbesondere der Archimedischen Forderung entsprechen, sind durch eine Maßbestimmung gegeben, in der sich das Bogenelement dl ausdrückt durch

$$dl \equiv ds \left\{ \int_{\vartheta_0}^{\vartheta} \sin(\vartheta - \tau)\, w(\operatorname{tg}\tau, y - x\operatorname{tg}\tau)\, d\tau + \frac{\partial u(x,y)}{\partial x}\cos\vartheta + \frac{\partial u(x,y)}{\partial y}\sin\vartheta \right\},$$

wobei w eine in ihrem Definitionsbereiche überall positive Funktion sein muß.

Auch die frühere Einschränkung, nach der zum Vergleiche nur Kurven mit stetiger Tangente herangezogen werden sollten, fällt jetzt weg. Die Gerade ist auch kürzer wie jeder Kurvenzug, für den die Länge etwa im Hilbertschen Sinne*) definiert werden kann.

§ 3.

Die Monodromieaxiome.

Die einzige Forderung, der in unserer Darstellung des Linienelementes noch nicht Folge geleistet ist, ist der Teil des ersten Kongruenzaxioms, der aussagt, daß

$$AB \equiv BA$$

ist. In meiner Dissertation habe ich diese Kongruenz nicht gefordert: es findet sich dementsprechend dort folgende Definition:

I) Wenn $AB \equiv BA$ ist, oder, was dasselbe ist, wenn $f(x, y, \operatorname{tg}\vartheta)$

*) Siehe C. A. Noble: „Eine neue Methode in der Variationsrechnung". Dissertation Göttingen, 1901. Kap. II.

ıe eindeutige Funktion auch des letzten Argumentes ist, so wollen wir gen, das „starke Monodromieaxiom“ sei erfüllt.

Da wir die Befriedigung dieses Axioms hier ständig fordern, müssen r uns noch fragen, welche Bedingungen dadurch den Funktionen w ıd u sowie der Konstanten c des vorigen Paragraphen auferlegt werden.

Ich habe nun in meiner Dissertation gezeigt, daß die notwendigen ıd hinreichenden Bedingungen für die Erfüllung des starken Monodromieioms die folgenden sind:

1) Es muß w eine eindeutige Funktion von $x, y, \operatorname{tg}\vartheta$ sein.

2) Die Funktion u darf nicht willkürlich angenommen werden; sie stimmt sich vielmehr folgendermaßen:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{1}{2}\int_{\vartheta_0}^{\vartheta_0+\pi} \sin\tau \cdot w\, d\tau,$$

$$\frac{\partial u}{\partial y} = \frac{1}{2}\int_{\vartheta_0}^{\vartheta_0+\pi} \cos\tau \cdot w\, d\tau.$$

ie Integrabilitätsbedingung ist erfüllt. Alsdann wird dl (resp. $f(x, y, \operatorname{tg}\vartheta)$) on ϑ_0 ganz unabhängig und läßt sich in die einfache Form bringen:

$$dl \equiv \frac{ds}{2}\int_{\vartheta-\pi}^{\vartheta} \sin(\vartheta-\tau)\, w(\operatorname{tg}\tau, y - x\operatorname{tg}\tau)\, d\tau.$$

ies ist das Längenelement in dem Falle, daß das starke Monodromieaxiom üllt ist.

Verzichtet man aber auf das starke Monodromieaxiom, so garantiert in § 2 gegebene Darstellung noch nicht einmal die Eindeutigkeit der ngenbestimmung für eine Strecke AB. Halte ich A fest und lasse B endwie herumwandern, bis es wieder in seine ursprüngliche Lage zurückhrt, so braucht nach einem vollen Umlauf des ϑ um 2π die Länge r Strecke AB nicht mehr dieselbe zu sein, wie beim Ausgang. Dieser nstand gab in meiner Dissertation die Veranlassung zu folgender finition:

II) Wenn dl oder $f(x, y, \operatorname{tg}\vartheta)$ nach einem vollen Umlauf des ϑ um 2π ieder den alten Wert bekommt, F also im vollen Sinne eine eindeutige unktion ist, so wollen wir sagen, das „schwache Monodromieaxiom“ ei erfüllt.

Ich habe in meiner Dissertation gezeigt, daß die hinreichenden und otwendigen Bedingungen für die Befriedigung des schwachen Monodromieioms die folgenden sind:

1) Es muß w eine eindeutige Funktion von $x, y, \sin\vartheta, \cos\vartheta$ sein.

2) Es müssen die Relationen stattfinden:

$$\int_0^{2\pi} \sin\tau \cdot w\, d\tau = 0 \quad \text{und} \quad \int_0^{2\pi} \cos\tau \cdot w\, d\tau = 0.$$

Von der Funktion u ist nur Eindeutigkeit hinsichtlich der Variabeln x, y zu verlangen.

Wir wollen aber im Laufe der folgenden Betrachtungen stets das starke Monodromieaxiom als erfüllt voraussetzen mit Ausnahme des Beispiels der Minkowskischen Geometrie (siehe § 5).

§ 4.

Die Normalgerade; die elliptischen Geometrieen.

Bis hierher blieb die Normalgerade von der Betrachtung ausgeschlossen, wir können aber nachträglich ihr Verhalten ohne weitere Rechnungen feststellen, indem wir zunächst die folgenden allgemeinen Sätze beweisen:

1) Gelten unsere sämtlichen Axiome A, B, C, D, E für alle Punkte und Geraden mit Ausnahme einer einzigen, von der dies noch ungewiß ist, und haben alle auf die ausgezeichnete Gerade einmündenden Strecken einen bestimmten endlichen Wert, so hat jede Strecke auf der fraglichen Geraden ebenfalls einen bestimmten endlichen Werth, d. h. die Länge einer (variablen) Strecke, deren Endpunkte irgendwie in die Endpunkte der fraglichen Strecke hineinrücken, konvergiert gegen einen festen endlichen Grenzwert unabhängig von der Art des Grenzüberganges.

2) Sind die Voraussetzungen des Satzes 1) erfüllt, gilt also insbesondere die Archimedische Forderung für alle in einer gewissen Umgebung der fraglichen Strecke gelegenen Strecken, von denen höchstens ein Punkt auf der Geraden liegt, so ist auch die fragliche Strecke selbst die kürzeste Entfernung ihrer Endpunkte.

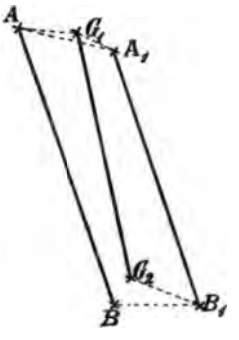


Fig. 3.

Der Beweis des ersten Satzes gestaltet sich folgendermaßen:

Es sei $G_1 G_2$ eine Strecke auf der Geraden, für die wir die Existenz der Länge noch nicht wissen. AB sei eine Strecke, deren Enden A und B in G_1 und G_2 einlaufen sollen; A_1, B_1 sei eine andere Strecke dieser Art.

Wir verbinden dann A, G_1, A_1 untereinander durch Strecken, ebenso B, G_2, B_1.

Zunächst beweisen wir jetzt, daß wir um G_1 ein endliches Gebiet abgrenzen können, dessen sämtliche Punkte, abgesehen von den Punkten der kritischen

Geraden, von G_1 eine Entfernung haben, die kleiner als die willkürlich angenommene Größe ε ist. Zu dem Zwecke ziehen wir durch G_1 zwei Geraden, auf denen wir nach beiden Seiten $\frac{\varepsilon}{2}$ abtragen. Verbinden wir die vier Endpunkte dieser Strecken unter einander, so haben alle Punkte innerhalb des entstehenden Rechteckes die verlangte Eigenschaft, wie durch zweimalige Anwendung der Archimedischen Forderung hervorgeht.

Infolgedessen können wir A_1 und A so nahe an G_1, und B und B_1 so nahe an G_2 wählen, daß

$$AG_1 < \tfrac{\varepsilon}{2};\quad A_1G_1 < \tfrac{\varepsilon}{2};\quad BG_2 < \tfrac{\varepsilon}{2};\quad B_1G_2 \leq \tfrac{\varepsilon}{2}$$

ist, wo ε eine beliebig vorgegebene kleine Zahl bedeutet. Dann ist nach der Archimedischen Forderung auch

$$AA_1 < \varepsilon \quad \text{und} \quad BB_1 < \varepsilon.$$

Daraus schließt man nach derselben Forderung

$$\begin{aligned} AB &< A_1B_1 + 2\varepsilon, \\ A_1B_1 &< AB + 2\varepsilon \end{aligned}$$

also ist

$$\lim_{\varepsilon=0} AB = \lim_{\varepsilon=0} A_1B_1;$$

und diesen Limes nennen wir die Entfernung G_1G_2.

Damit ist der erste Satz bewiesen. Der zweite Satz sagt nun aus, daß auch die Strecke G_1G_2 kleiner ist als jede andere Verbindung der Punkte G_1 und G_2.

Gäbe es nämlich eine kürzere Verbindung, so könnte man jedenfalls eine nicht längere konstruieren, die aus zwei Strecken G_2C und CG_2 besteht. Nun kann aber auf CG_1 ein Punkt A und auf CG_2 ein Punkt B so gewählt werden, daß

$$AG_1 < \tfrac{\varepsilon}{3},$$

$$BG_2 < \tfrac{\varepsilon}{3},$$

$$|G_1G_2 - AB| < \tfrac{\varepsilon}{3}.$$

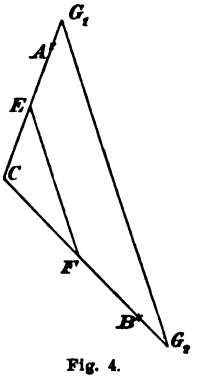


Fig. 4.

Da weiterhin jedenfalls

$$AB < AC + BC,.$$

so folgt

$$G_1G_2 < G_1C + G_2C + \varepsilon,$$

oder

$$G_1G_2 \leqq G_1C + G_2C,$$

weil ε beliebig klein gemacht werden kann, in dieser Ungleichheit aber lauter Größen vorkommen, die von ε unabhängig sind.

Daß aber auch das Gleichheitszeichen unmöglich ist, folgt daraus, daß man noch Wege zwischen G_1 und G_2 konstruieren kann, die kürzer sind als $CG_1 + CG_2$, z. B. G_1EFG_2 (s. Fig. 4), die aber andererseits doch wieder nur gleich G_1G_2 sein dürften, was ein Widerspruch ist.

Damit ist der Satz bewiesen.

Wir betrachten nunmehr eine Geometrie von völlig elliptischem Typus; d. h. eine Geometrie, von der wir wissen, daß jede Gerade außer der Normalgeraden eine endliche Länge besitzt; in der es also sonst keine relativ singulären und gar keine uneigentlichen Punkte gibt.

Außerdem mögen wir wissen, daß in jedem Dreieck, das von der Normalgeraden nicht geschnitten wird, die Summe zweier Seiten größer ist als die dritte.

Wir stellen die Fragen:

1) Wann existiert auch auf der Normalgeraden eine Längenbestimmung?

2) Wann ist diese so beschaffen, daß auch für sie die Archimedische Forderung erfüllt ist?

Auf Grund der bewiesenen Sätze können wir jedenfalls soviel aussagen:

Betrachten wir auf der Normalgeraden eine bestimmte Strecke s, so konvergieren die Längen aller Strecken, die von einer bestimmten Seite in die betrachtete Strecke s einrücken, gegen eine bestimmte Grenze und dieser Grenzwert ist auch die untere Grenze für die Längen aller Verbindungen, die auf der betrachteten Seite der Strecke s liegen.

Um allerdings diesen Satz auf die Überlegungen im Anfange dieses Paragraphen stützen zu können, müßten wir zeigen, daß auch in einem Dreieck, von dem eine Ecke in die Normalgerade einrückt, noch immer jede Seite kleiner bleibt als die Summe der beiden andern. Daß dies aber tatsächlich der Fall ist, läßt sich durch Betrachtungen erweisen, die den im Anfange dieses Paragraphen angestellten sehr ähnlich sind.

Wenn wir aber zeigen wollen, daß die durch Annäherung von verschiedenen Seiten an die Normalgerade erzielten Grenzwerte für die Längen einer Strecke übereinstimmen, so müssen wir die Archimedische Forderung auch für Dreiecke erfüllt wissen, welche von der Normalgeraden durchsetzt werden. Und über solche Dreiecke sagen die Betrachtungen des § 2 noch nichts aus.

(Es ist hier übrigens noch eine Bemerkung einzuschalten. In der elliptischen Geometrie gibt es zwei Strecken endlicher Länge, welche zwei Punkte verbinden (wenn wir prinzipiell von Strecken, die länger sind als der Umfang der ganzen Geraden, sich aber teilweise selbst überdecken,

sehen). Unter diesen ist natürlich im allgemeinen nur die eine die rklich kürzeste Verbindung der beiden Punkte. Trotzdem bleibt der tz, daß im Dreieck jede Seite kürzer ist als die Summe der beiden dern immer bestehen, wenn wir nur unter allen Strecken, welche drei nkte verbinden, solche Tripel auswählen, die ein Stück aus der Ebene sschneiden. Daß dieser Satz richtig ist, solange die Normalgerade das eieck nicht schneidet, folgt aus den Betrachtungen des § 2).

Soll aber in einem Dreiecke die Summe zweier Seiten auch dann noch ößer sein als die dritte, falls das Dreieck von der Normalgeraden geschnitten rd, so ist, wie wir sofort erkennen wer-

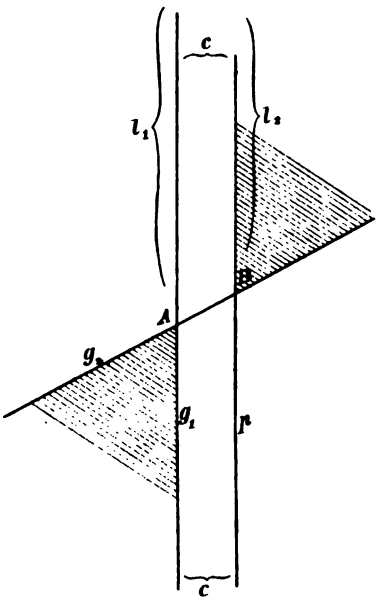


Fig. 5.

n, die hinreichende und notwendige ɔdingung dafür die, daß alle Geraden ɔselbe Gesamtlänge haben.

Wir wollen zunächst zeigen, daß e Bedingung notwendig ist.

Betrachten wir die beiden Geraden und g_2, die sich in A schneiden. Dann nn man auf g_2 einen Punkt B so ihlen, daß $AB < \varepsilon$ ist, wo ε eine be-big kleine Zahl ist. Durch B ziehe an eine Parallele p zu g_1; g_1 und p hneiden sich also auf der Normalgeraden ı Punkte C. Sei l_1 die Länge der ıen Strecke AC (also $g_1 - l_1$ die der dern) und l_2 die Länge der einen recke BC (also $p - l_2$ die der andern), ist $l_2 < l_1 + AB$ oder $l_2 < l_1 + \varepsilon$. ɔll nun der in Rede stehende Dreiecks-tz auch gelten für Dreiecke, die von r Normalgeraden geschnitten werden, so muß er auch erfüllt sein für as schraffierte Dreieck ABC. In diesem müßte also sein

$$g_2 - AB < g_1 - l_1 + l_2$$

ler

$$g_2 < g_1 + 2\varepsilon.$$

ınz analog läßt sich beweisen, daß

$$g_1 < g_2 + 2\varepsilon'.$$

a nun ε und ε' beliebig kleine Größen sind, so folgt $g_1 = g_2$, w. z. b. w.

Der Fall, daß g_1 und g_2 parallel sind, läßt sich durch zweimalige ıwendung des eben bewiesenen Satzes erledigen.

Nun zeigen wir auch, daß die Bedingung, daß alle Geraden gleiche Länge besitzen, hinreichend ist dafür, daß auch in Dreiecken, die von der Normalgeraden geschnitten werden, die Summe zweier Seiten größer ist als die dritte (falls dieser Satz gültig ist für alle Dreiecke, die von der Normalgeraden nicht geschnitten werden, wie wir voraussetzen).

Betrachten wir wieder das schraffierte Dreieck ABC. Wäre nun der genannte Satz falsch, also etwa $(g_2 - AB) \geqq g_1 - l_1 + l_2$, so folgte, da $g_1 = g_2$ ist, $AB + l_2 \leqq l_1$, was unmöglich ist, da AB, l_2, l_1 die Seiten eines Dreiecks sind, das von der Normalgeraden nicht durchsetzt wird.

Ebensowenig kann $g_1 - l_1 \geqq g_2 - AB + l_2$ sein, da dann $AB \geqq l_1 + l_2$ sein müsste, was aus denselben Gründen falsch ist. Die dritte Seite läßt sich natürlich ebenso behandeln. Damit ist die Grundlage gewonnen, um die an den Anfang gestellten Sätze vollständig anwenden zu können. Es existiert daher auf der Normalgeraden eine eindeutig festgelegte Maßbestimmung, wenn 1) die Geometrie überall vom elliptischen Typus ist und außerhalb der Normalgeraden überall unsere Axiome erfüllt, 2) wenn alle Geraden dieselbe Gesamtlänge besitzen.

Welche Bedingungen ergeben sich daraus für die Funktion w?

Bedingung 1) verlangt:

$$\lim_{s=\infty} \int_0^s \frac{ds}{2} \int_{\vartheta-\pi}^{\vartheta} \sin(\vartheta-\tau)\, w(\operatorname{tg}\tau,\ s\ \sin(\vartheta-\tau) + y_0 \cos\tau - x_0 \sin\tau)\, d\tau$$

hat für alle endlichen x_0, y_0 und für alle ϑ einen bestimmten endlichen Wert.

Bedingung 2) verlangt, daß

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{ds}{2} \int_{\vartheta-\pi}^{\vartheta} \sin(\vartheta-\tau)\, w(\operatorname{tg}\tau,\ s\cdot\sin(\vartheta-\tau) + y_0 \cos\tau - x_0 \sin\tau)\, d\tau$$

von ϑ, x_0, y_0 unabhängig ist.

Nun läßt sich zeigen, daß dies tatsächlich stets dann eintritt, wenn die beiden Integrationen über s und τ vertauschbar sind.

Nehmen wir an, daß diese Integrationen vertauschbar seien, und daß die Länge auf allen Geraden einen endlichen Wert besitze, so erfüllt unsere Geometrie vom elliptischen Typus überall ohne Ausnahme die Archimedische Forderung und alle Geraden haben dieselbe Gesamtlänge.

Dies ist so zu verstehen:

Von den beiden, zwei Punkte verbindenden Strecken ist stets die eine die absolut kürzeste Verbindung zwischen den beiden Punkten, wenn nicht grade beide Strecken gleich sind. Jede der beiden Strecken aber ist kürzer als jedes solches Kurvenstück, das unter Festhalten der Enden durch

stetige Deformation aus der Strecke erzeugt werden kann, das also mit ihr aus der elliptischen Ebene ein Stück herausschneidet. (Die beiden Strecken, in die eine elliptische Gerade durch zwei Punkte geteilt wird, können nicht in einander übergeführt werden. Es zeigen diese letzten Betrachtungen einen wesentlichen Unterschied der elliptischen Geometrie von der sphärischen, in der alle diese Sätze in dieser Form nicht gelten.)

§ 5.

Beispiele. Die Minkowskische und die Hilbertsche Geometrie.

I) Der nächst einfache Fall ist der, daß die Punkte einer und nur einer Geraden unerreichbare Punkte sind. Wir werden diese Gerade die „unendlich ferne Gerade" nennen.

Wir können ohne Einschränkung der Allgemeinheit annehmen, daß sie mit der Normalgeraden zusammenfalle. Das Parallelenaxiom ist jetzt im Euklidschen Sinne erfüllt.

Es wird ein gewisses Interesse haben, solche Geometrieen zu suchen, in denen zu jeder Schar paralleler Extremalen (Geraden) eine Schar paralleler Geraden als „Transversalen" im Kneserschen Sinne gehört.

Eine leichte Rechnung ergibt, daß die hinreichende und notwendige Bedingung dafür, daß eine Geometrie der vorstehend gekennzeichneten Art vorliegt, die ist, daß w von seinem zweiten Argument unabhängig und daß $\frac{\partial u}{\partial x} = \alpha$, $\frac{\partial u}{\partial y} = \beta$ Konstanten sind. (Wir lassen hier einmal zu, daß das starke Monodromieaxiom nicht erfüllt ist.)

Das Längenelement hat also jetzt die Form:

$$dl \equiv \left\{ \int_{\vartheta_0}^{\vartheta} \sin(\vartheta - \tau)\, w(\tau)\, d\tau + \alpha \cos\vartheta + \beta \sin\vartheta \right\} ds,$$

und die Länge der Strecke $\overline{1\,2}$ ist gleich

$$\overline{1\,2} = s_{1,2} \left\{ \int_{\vartheta_0}^{\vartheta} \sin(\vartheta - \tau)\, w(\tau)\, d\tau + \alpha \cos\vartheta + \beta \sin\vartheta \right\}.$$

Die Maßbestimmung ist also auf jeder Geraden proportional der gewöhnlichen Euklidschen Maßbestimmung und von jeder Parallelverschiebung unabhängig.

Das heißt aber:

Die einzige Geometrie unserer Art, bei der zu parallelen Geraden wieder parallele Geraden als Transversalen gehören, ist die Minkowskische

Geometrie (siehe Einleitung); denn diese ist durch die eben genannten Eigenschaften charakterisiert.

Die „Aichkurve" stellt sich in den Polarkoordinaten r, ϑ dar durch

$$1 = r \cdot \left\{ \int_{\vartheta_0}^{\vartheta} \sin(\vartheta - \tau)\, w(\tau)\, d\tau + \alpha \cos\vartheta + \beta \sin\vartheta \right\}.$$

Daraus folgt:

$$\frac{d^2\left(\frac{1}{r}\right)}{d\vartheta^2} + \frac{1}{r} = w(\vartheta).$$

Da aber $w(\vartheta)$ der einzigen Bedingung unterworfen war, stets positiv zu sein, und andererseits $\frac{d^2\left(\frac{1}{r}\right)}{d\vartheta^2} + \frac{1}{r}$ bis auf einen stets positiven Faktor gleich dem Krümmungsradius der Kurve ist, so erhalten wir für die Aichkurve die einzige Bedingung, daß sie eine überall konvexe Kurve um den Nullpunkt darstellt.

Daß sie den Nullpunkt wirklich umgibt, drückt sich darin aus, daß $\frac{1}{r}$ für alle ϑ einen endlichen Wert besitzt, falls wir annehmen, daß alle Punkte regulär sind.

Ferner ist klar, daß die Forderung des starken Monodromieaxioms darauf hinausläuft, daß die Aichkurve eine zum Anfangspunkt symmetrische Kurve sein muß.

II) Herr Hilbert hat in einem an Herrn Klein gerichteten Briefe (siehe Einleitung) eine Geometrie aufgestellt, in der ebenfalls die Gerade Kürzeste ist.

Betrachten wir in der xy-Ebene eine konvexe, geschlossene Kurve und definieren für das Innere derselben die Entfernung zweier Punkte durch den Logarithmus des Doppelverhältnisses, das diese beiden Punkte mit den Schnittpunkten der durch sie festgelegten Geraden auf der genannten Kurve bilden, so erhalten wir die fragliche Maßbestimmung.

Sei $H(x, y) = 0$ die Gleichung der bestimmenden Kurve, $y = px + b$ eine Gerade, so ergeben sich die Werte der Abscissen der Schnittpunkte der Geraden mit der konvexen Kurve durch die Gleichung $H(x, px + b) = 0$. Entweder hat diese Gleichung für x zwei reelle Wurzeln, oder eine mehrfache Wurzel, oder gar keine reelle Wurzel.

Seien die Wurzeln, falls sie existieren, $v_1(p, b)$ und $v_2(p, b)$, so erhält man mit leichter Mühe für den Ausdruck $W(p, y - px)$ den Wert

$$W(p, y - px) = \frac{\partial^2(v_2 - v_1)}{\partial b^2},$$

wobei für v_2 die größere oder kleinere der beiden Wurzeln zu nehmen ist, je nachdem $+\frac{\pi}{2} < \vartheta < \frac{3\pi}{2}$ oder $-\frac{\pi}{2} < \vartheta < \frac{\pi}{2}$ ist.

Es zeigt sich dann, daß die Funktion

$$w = \frac{1}{\cos^3 \vartheta} W$$

ein stets positives Vorzeichen besitzt, wenn die Kurve $H(x, y) = 0$ überall konvex ist. Ferner ist w definiert für alle Punkte im Innern der Kurve $H = 0$.

III) Man kann nun offenbar eine weit allgemeinere Geometrie unserer Art erzeugen, wenn man

$$W = \sum_{\lambda=1}^{\infty} \frac{\partial^3 (v_{\lambda,2} - v_{\lambda,1})}{\partial b^3}$$

setzt, wo die v_λ Kurven $H_\lambda = 0$ entsprechen.

Ob man aber durch solche Übereinanderlagerung Hilbertscher Geometrieen die allgemeine Geometrie unserer Art erhalten kann, habe ich noch nicht klarstellen können.

§ 6.

Über den Einfluß von Unstetigkeiten der Funktion w.

Es sei mir gestattet, aus den in der Überschrift dieses Paragraphen angedeuteten Untersuchungen hier nur einen Satz herauszuheben; im übrigen sei auf meine Dissertation verwiesen (§ 5—8).

Der betreffende Satz lautet:

Hat die Funktion w Singularitäten der Art, daß $\int dl$ auch längs einer über solche Stellen hinweg gehenden Geraden einen bestimmten endlichen Wert besitzt — also die betreffenden Punkte, für welche die Singularitäten eintreten, noch als erreichbare Punkte zu bezeichnen sind — so zeigt die zu w gehörige Geometrie keinerlei Abweichungen von der Archimedischen Forderung, falls nur w außerhalb der betreffenden Stellen überall positiv bleibt. Die gerade Strecke bleibt also die kürzeste Verbindung ihrer Endpunkte.

§ 7.

Verallgemeinerung des Begriffes „Aichkurve".

Angenommen, w sei längs eines Stückes der y-Achse regulär, eine Annahme, die keine Beschränkung bedeutet.

Bilden wir jetzt in Polarkoordinaten r, ϑ für jeden Punkt $x = 0$, $y = b$ als Anfangspunkt die Kurve

$$1 = r\left\{\int_{\vartheta_0}^{\vartheta} \sin(\vartheta-\tau)\, w(\tau, b)\, d\tau + \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)_{x=0} \cos\vartheta + \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)_{x=0} \sin\vartheta\right\},$$

so fällt diese für den Fall, daß w von b unabhängig ist, mit der Minkowskischen Aichkurve zusammen.

Für unsere Kurve gilt die Differentialgleichung

$$\frac{d^2\left(\frac{1}{r}\right)}{d\vartheta^2} + \frac{1}{r} = w(\vartheta, b). \tag{1}$$

Soweit w willkürlich ist, ist die Kurve auch willkürlich, denn $\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)_{x=0}$ und $\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)_{x=0}$ sind natürlich willkürliche Funktionen von y resp. b.

Ist das schwache Monodromieaxiom erfüllt, so heißt das offenbar, daß zu jedem $\vartheta + 2k\pi$ dasselbe r gehört wie zu ϑ (k eine ganze Zahl), daß die Kurve also geschlossen ist. Ist das starke Monodromieaxiom erfüllt, so gehört zu jedem $\vartheta + k\pi$ dasselbe r wie zu ϑ, die Kurve ist also in bezug auf $x = 0$, $y = b$ symmetrisch.

Da aber, wie wir schon früher sahen

$$\frac{d^2\frac{1}{r}}{d\vartheta^2} + \frac{1}{r}$$

bis auf einen positiven Faktor gleich der Krümmung der Kurve ist, so sagt $w > 0$ aus, daß die Kurve stets konvex ist.

Damit haben wir das Resultat:

Man erhält die ***allgemeinste ebene Geometrie,*** *in der die Gerade Kürzeste ist, in folgender Weise:*

Um jeden Punkt einer Geraden, die wir zur y-Achse machen, beschreibe man eine konvexe Kurve. Man setze dann die Gleichung dieser Kurve in Polarkoordinaten r, ϑ um den Punkt der Geraden in der Form an, die stets zu erhalten ist:

$$1 = rg(\vartheta, b)$$

oder

$$1 = r\left\{\int_{\vartheta_0}^{\vartheta} \sin(\vartheta-\tau)\, w(\tau, b)\, d\tau + \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)_{x=0} \cos\vartheta + \left(\frac{\partial u}{\partial b}\right)_{x=0} \sin\vartheta\right\},$$

wobei b der Parameter ist, der den Punkt auf der Geraden markiert, und $u(x, b)$ noch in mannigfacher Weise gewählt werden kann, nur so, daß $\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)_{x=0}$ und $\left(\frac{\partial u}{\partial b}\right)_{x=0}$ durch g gegebene Funktionen von b sind. w aber ist vollständig durch g bestimmt, nach Gleichung (1).

Dann ist das Längenelement der gesuchten Geometrie gleich

$$ds\left\{\int_{\vartheta_0}^{\vartheta}\sin(\vartheta-\tau)\,w(\tau, y-x\operatorname{tg}\tau)\,d\tau+\frac{\partial u}{\partial x}\cos\vartheta+\frac{\partial u}{\partial y}\sin\vartheta\right\};$$

e Länge also bis auf eine bloße Funktion des Ortes (unabhängig von m Verbindungswege der Endpunkte) bestimmt.

Ist die gewählte Kurve symmetrisch, so kann das starke Monodromieiom erfüllt werden durch passende Wahl von u, das dann ebenfalls llig bestimmt ist*).

Ist die Kurve nach einem Umlaufe geschlossen, so ist das schwache ɔnodromieaxiom erfüllt, wie sonst auch u — aber in Übereinstimmung t dem oben Gesagten — gewählt werden mag.

Diese, die Geometrie also wesentlich bestimmenden Kurven mögen ıichkurven" heißen.

Kapitel II.

Die Geometrieen im Raume.

§ 8.

Der Aufbau der postulierten Geometrieen.

Wenn wir jetzt zum Raume übergehen, so stehen der Verallgemeinerung r Überlegungen des § 1 keinerlei Schwierigkeiten im Wege; wir können ıo jedem Punkte außerhalb der Normalebene ein Zahlentripel x, y, z ordnen; die Gerade ist dann dargestellt durch die Gleichungen:

$$y = px + u,$$
$$z = qx + v,$$

er durch die Differentialgleichungen

$$\frac{d^2x}{ds^2}=0,\quad \frac{d^2y}{ds^2}=0,\quad \frac{d^2z}{ds^2}=0,\qquad \left(ds\equiv+\sqrt{dx^2+dy^2+dz^2}\right).$$

Was nun die Untersuchungen des § 2 angeht, so haben unsere Axiome zt ganz analoge Resultate wie damals: es läßt sich die Länge einer radlinigen Strecke im allgemeinen darstellen durch das Integral:

$$\int_{x_1}^{x_2} y(x, y, z, y', z')\,dx. \qquad \left(y'=\frac{dy}{dx},\ z'=\frac{dz}{dx}\right)$$

*) Siehe § 3.

und immer durch

$$\int_0^s f\left(x, y, z, \frac{dx}{ds}, \frac{dy}{ds}, \frac{dz}{ds}\right) ds,$$

wobei f in den drei letzten Variabeln homogen von der ersten Dimension ist.

Für andere Kurven definieren wir dann die Länge eines Abschnittes durch obiges Integral, das wir längs der betreffenden Kurve erstrecken.

4) Die Archimedische Forderung, daß die Gerade die kürzeste Verbindung zwischen zwei gegebenen Punkten sein soll, zerfällt wieder in zwei andere:

4a) Es müssen die beiden partiellen Differentialgleichungen erfüllt sein, die durch Vergleichung der Differentialgleichungen der Geraden mit den Lagrangeschen des Variationsproblems entstehen, nämlich

$$(1) \qquad 0 = \frac{\partial^2 g}{\partial p \partial x} + \frac{\partial^2 g}{\partial p \partial y} p + \frac{\partial^2 g}{\partial p \partial z} q - \frac{\partial g}{\partial y},$$

$$(2) \qquad 0 = \frac{\partial^2 g}{\partial q \partial x} + \frac{\partial^2 g}{\partial q \partial y} p + \frac{\partial^2 g}{\partial q \partial z} q - \frac{\partial g}{\partial z}. \qquad (p = y', q = z')$$

Daraus erhält man zunächst als notwendige Bedingung, daß $\frac{\partial^2 g}{\partial p^2}$, $\frac{\partial^2 g}{\partial p \partial q}$, $\frac{\partial^2 g}{\partial q^2}$ je eine Funktion von p, q, $u = y - px$, $v = z - qx$ allein sein müssen.

Setzt man dementsprechend:

$$\frac{\partial^2 g}{\partial p^2} = U(p, q, u, v),$$

$$\frac{\partial^2 g}{\partial p \partial q} = V(p, q, u, v),$$

$$\frac{\partial^2 g}{\partial q^2} = W(p, q, u, v),$$

so liefert die Bedingung für die Vereinbarkeit dieser drei Gleichungen die Relationen:

$$(Ia) \qquad \frac{\partial U}{\partial q} = \frac{\partial V}{\partial p}; \quad \frac{\partial V}{\partial q} = \frac{\partial W}{\partial p}; \quad \frac{\partial U}{\partial v} = \frac{\partial V}{\partial u}; \quad \frac{\partial V}{\partial v} = \frac{\partial W}{\partial u},$$

woraus wieder folgt, daß U, V, W je der partiellen Differentialgleichung genügen müssen:

$$(Ib) \qquad \frac{\partial^2 h}{\partial u \partial q} = \frac{\partial^2 h}{\partial v \partial p}. \qquad (h = U, V, W)$$

Berücksichtigt man alles dies, so erhält man als notwendigen Ansatz für das Längenelement den folgenden:

$$\text{I)}\quad dl \equiv g\,dx \equiv dx \int_{p_0,q_0}^{p,q} \Big\{ dp \int_{p_0,q_0}^{p,q} (U\,dp + V\,dq) + dq \cdot \int_{p_0,q_0}^{p,q} (V\,dp + W\,dq) \Big\} + dt(x,y,z),$$

obei t eine willkürliche Funktion von x, y, z bedeutet, p_0, q_0 irgend elche Konstanten.

Daß die hingeschriebenen Kurvenintegrale einen nur von den Grenzen bhängigen Wert haben, ist an die Erfüllung der Relationen (I) gebunden.

Erstrecken wir die inneren Integrale stets über dieselbe Kurve wie as äußere, so können wir auch schreiben

$$\text{Ia)}\quad dl \equiv g\,dx \equiv dx \int_{p_0 q_0}^{p,q} \int_{p_0 q_0}^{p,q} (U\,dp\,dp + 2V\,dp\,dq + W\,dq\,dq) + dt(x,y,z).$$

nd daß der so bestimmte Ausdruck für g auch die Differentialeichungen (1) und (2) befriedigt, wenn nur U, V, W den Bengungen (I) genügen, ist leicht nachzuweisen.

4b) Damit wirklich ein Minimum eintritt, muß die Weierstraßhe E-Funktion stets negativ sein.

Sind $\bar{p}$, $\bar{q}$ die Werte von p, q auf irgend einer die Endpunkte der Auge gefaßten Strecke verbindenden Kurve $\bar{C}$, p, q die Werte auf a in $\bar{C}$ einmündenden Extremalen (Geraden), welche von dem einen Ende r Strecke ausgehen, so lautet die E-Funktion:

$$E = \Big[g(p,q) - g(\bar{p},\bar{q}) + (\bar{p}-p)\frac{\partial g(p,q)}{\partial p} + (\bar{q}-q)\frac{\partial g(p,q)}{\partial q} \Big] \cdot \frac{d\bar{x}}{d\bar{s}}\ ^*).$$

it Hülfe von (II) erhält man nun leicht

$$E = -\frac{d\bar{x}}{d\bar{s}} \int_{p,q}^{\bar{p},\bar{q}} \int_{p,q}^{\bar{p},\bar{q}} (U\,dp\,dp + 2V\,dp\,dq + W\,dq\,dq).$$

)amit aber dieser Ausdruck stets negativ sei, ist notwendig und hineichend, daß an jeder Stelle des fünfdimensionalen Raumes p, q, x, y, z nd für jedes dp, dq

$$\frac{dx}{ds}(U\,dp\,dp + 2V\,dp\,dq + W\,dq\,dq) > 0$$

ei, woraus wieder folgt:

---

*) Vergleiche Noble l. c. p. 65. Der Faktor $\frac{d\bar{x}}{d\bar{s}}$ muß notwendig hinzugenommen rden, wenn wir nicht voraussetzen, daß y und z längs $\bar{C}$ eindeutige Funktionen n x sind, was hier eine wesentliche Beschränkung bilden würde.

(III) $$U \cdot W - V^2 > 0 \quad \text{und} \quad \frac{dx}{ds} U > 0,$$

was wir auch schreiben können:

(IIIa) $$\frac{\partial^2 g}{\partial p^2} \frac{\partial^2 g}{\partial q^2} - \left(\frac{\partial^2 g}{\partial p \partial q}\right)^2 > 0, \quad \frac{dx}{ds} \cdot \frac{\partial^2 g}{\partial p^2} > 0.$$

Wir können somit folgendes Resultat aussprechen:

Erfüllen die im übrigen willkürlichen Funktionen U, V, W der vier Argumente $p, q, u = y - xp, v = z - qx$ die Bedingungen (I) *und* (III), *so liefert der durch* (II) *gegebene Ausdruck des Längenelementes dl die allgemeinste Maßbestimmung, die den in der Einleitung erwähnten Axiomen entspricht.* (Abgesehen vom starken Monodromieaxiom.)

Machen wir die nicht wesentliche Annahme, daß U, V, W an der Stelle $p = 0, q = 0$ regulär seien, so können wir $p_0 = 0, q_0 = 0$ setzen.

Werde weiterhin eine Größe ε durch die Gleichung $\frac{p}{q} = \operatorname{ctg} \varepsilon$ bestimmt, so können wir als speziellen Integrationsweg $\varepsilon = \text{const.}$ wählen, falls U, V, W auf diesem ganzen Wege regulär sind.

Setzen wir dementsprechend $p = r \cos \varepsilon$, $q = r \sin \varepsilon$, so lautet der Ausdruck für das Längenelement

$$dl \equiv dx \int_0^r dr \int_0^r (U \cos^2 \varepsilon + 2V \cos \varepsilon \sin \varepsilon + W \sin^2 \varepsilon)\, dr + dt(x, y, z)$$

Führen wir endlich als neue Variabele ϑ durch die Transformation

$$r = \operatorname{tg} \vartheta$$

ein, so bekommen wir

(IIb) $$dl \equiv ds \int_0^{\vartheta} \sin(\vartheta - \tau)\, w\, d\tau + dt(x, y, z),$$

wo

$$w = \frac{1}{\cos^3 \tau} (U \cos^2 \varepsilon + 2V \cos \varepsilon \sin \varepsilon + W \sin^2 \varepsilon)$$

gesetzt ist.

Die Bedingungen, welche w erfüllen muß, lassen sich daraufhin gemäß (I) und (III) leicht angeben; speziell mag erwähnt werden, daß die zweite Bedingung (III) einfach lautet

(IIIb) $$w > 0.$$

§ 9.

Die Monodromieaxiome.

I) Wenn das schwache Monodromieaxiom erfüllt sein soll, d. h. wenn r Strecke AB überhaupt eine eindeutig bestimmte Länge zukommen ll, so müssen folgende Bedingungen erfüllt sein:

1) Es dürfen U, V, W nur solche Singularitäten besitzen, daß

a) die in g vorkommenden Integrale in den unabhängigen Variabeln p, q vom Wege unabhängig bleiben, solange in der pq-Ebene die unendlich ferne Gerade nicht überschritten wird.

b) daß dasselbe noch der Fall ist nach Einführung der Variabeln ϑ, ε statt p, q und zwar für alle Werte von ϑ und ε, für die überhaupt U, V, W definiert sind.

2) Es müssen w und damit auch U, V, W als Funktionen von τ id ε je die Periode 2π besitzen.

3) Es müssen die Gleichungen

$$\int_0^{2\pi} \sin\tau w\, d\tau = 0 \quad \text{und} \quad \int_0^{2\pi} \cos\tau w\, d\tau = 0$$

füllt sein. Die Funktion t bleibt ganz beliebig, abgesehen natürlich von, daß sie eindeutig sein muß. Die Bedingungen 1), 2), 3) sind auch nreichend für die Erfüllung des schwachen Monodromieaxioms.

II) Wenn das starke Monodromieaxiom befriedigt sein soll, h., wenn die Länge der Strecke AB stets der von BA gleich sein ll, so müssen abgesehen von der Bedingung I, 1) noch die folgenden dingungen erfüllt sein:

2) w muß eine eindeutige Funktion von $\operatorname{tg}\tau\cos\varepsilon$ und $\operatorname{tg}\tau\sin\varepsilon$, h. von p und q sein.

3) Die Funktion t muß so angenommen werden, daß

$$\frac{dt}{ds} = -\frac{1}{2}\int_0^{\pi} \sin(\vartheta-\tau)\, w\, d\tau$$

rd.

Daß diese Bestimmung von t möglich ist, läßt sich mit Benutzung r Voraussetzungen I, 1) leicht zeigen.

Die Erfüllung der Bedingungen 1), 2), 3) *ist auch hinreichend dafür, ıß das starke Monodromieaxiom erfüllt ist; das Längenelement selbst scheint dann unter der Form:*

$$dl \equiv \frac{ds}{2}\int_{\vartheta-\pi}^{\vartheta} \sin(\vartheta-\tau)\, w(\tau)\, d\tau.$$

§ 10.

Beispiele.

I) Nehmen wir U, V, W als von u, v unabhängig an, wodurch die Bedingungen (Ib) von selbst erfüllt sind, $\frac{\partial t}{\partial x} = \alpha$, $\frac{\partial t}{\partial y} = \beta$, $\frac{\partial t}{\partial z} = \gamma$, wo α, β, γ Konstanten sind, so wird

$$dl \equiv ds\left\{\int_0^{\vartheta} \sin(\vartheta - \tau)\, w(\varepsilon, \tau)\, d\tau + \alpha \cos\vartheta + \beta \sin\vartheta \cos\varepsilon + \gamma \sin\vartheta \sin\varepsilon\right\}.$$

Diese Maßbestimmung ist unter den andern dadurch eindeutig hervorgehoben, daß sie auf parallelen Geraden dieselbe ist, d. h. nur von der Richtung ϑ, ε des Linienelementes abhängt, nicht aber von dem Orte (x, y, z) desselben. Wir erhalten so offenkundig die Minkowskische Geometrie im Raume (siehe Einleitung).

Die „Aichfläche", die vom Koordinatenanfangspunkt überall die Entfernung 1 hat, stellt sich in Polarkoordinaten $r, \vartheta, \varepsilon$ so dar:

$$1 = r\left\{\int_0^{\vartheta} \sin(\vartheta - \tau)\, w(\tau, \varepsilon)\, d\tau + \alpha \cos\vartheta + \beta \sin\vartheta \cos\varepsilon + \gamma \sin\vartheta \sin\varepsilon\right\}.$$

Die einzige Bedingung, der diese Fläche unterworfen ist, ist die, daß sie eine den Nullpunkt umgebende, überall konvexe Fläche sein muß. Im übrigen kann sie ganz beliebig gewählt werden.

Ist sie einfach geschlossen, d. h. ist r eine eindeutige Funktion der Richtung $\vartheta, \varepsilon (0 \leqq \vartheta \leqq \pi, |\varepsilon| \leqq \pi)$, so ist das schwache Monodromieaxiom erfüllt; ist aber die Fläche zu dem Anfangspunkt symmetrisch, so ist das starke Monodromieaxiom befriedigt.

II) Man erhält die Hilbertsche Geometrie für den Raum in folgender Weise:

Man nehme eine geschlossene konvexe Fläche $H(x, y, z) = 0$. Dann existieren für alle p, q, u, v, deren Geraden:

$$y = px + u,$$
$$z = qx + v$$

durch das Innere der genannten Fläche gehen, zwei reelle Wurzeln ω_1 und ω_2 der Gleichung

$$H(\omega, \omega p + u, \omega p + v) = 0.$$

Setzt man alsdann

$$U = \frac{\partial^2(\omega_2 - \omega_1)}{\partial u^2},$$

$$V = \frac{\partial^2(\omega_2 - \omega_1)}{\partial u\, \partial v},$$

$$W = \frac{\partial^2(\omega_2 - \omega_1)}{\partial v^2}, \quad \left(\omega_1 > \omega_2, \text{ falls } -\frac{\pi}{2} < \vartheta < \frac{\pi}{2}, \text{ sonst } \omega_1 < \omega_2\right)$$

so sind die Bedingungen (I) und (III) sämtlich erfüllt. Ist $H = 0$ eine einfach geschlossene Fläche, so ist das starke Monodromieaxiom befriedigt, falls man noch t richtig bestimmt, und zwar erhält man für die Länge der Strecke $\overline{12}$ im Innern von $H = 0$:

$$\int_0^s \frac{ds}{2} \int_{\vartheta - \pi}^{\vartheta} \sin(\vartheta - \tau)\, w\, d\tau = lg \frac{(x_2 - \omega_2)(x_1 - \omega_1)}{(x_2 - \omega_1)(x_1 - \omega_2)}.$$

Dabei sind in ω_1 und ω_2 die Werte von p, q, u, v einzusetzen, die der durch die Strecke $\overline{12}$ bestimmten Geraden angehören.

Damit ist die von Herrn Hilbert gegebene Form erreicht:

Die Entfernung ist gleich dem Logarithmus des Doppelverhältnisses, das von folgenden vier Punkten gebildet wird: den Endpunkten der zu messenden Strecke und den Schnittpunkten der durch sie bestimmten Geraden mit der zugrunde gelegten *konvexen* Fläche.

Die Geometrie existiert nur im Innern der genannten Fläche.

§ 11.

Über die Differentialgleichung:

$$\frac{\partial^2 h}{\partial u\, \partial q} = \frac{\partial^2 h}{\partial v\, \partial p}.$$

Es leuchtet nach § 8 ein, daß die wirkliche Bestimmung aller räumlichen Geometrieen unserer Art auf die Integration dieser Differentialgleichung hinausführt.

Abgesehen von den bekannten Existenztheoremen über partielle Differentialgleichungen, mögen noch die folgenden für uns wichtigen Sätze kurz genannt werden, die ich über sie bis jetzt habe aufstellen können:

1) *Gegeben sei h längs $u = 0$ als Funktion $U(p, q, v)$ und längs $q = 0$ als Funktion $Q(p, u, v)$ der eingeschlossenen Größen. Diese Anfangswerte U, Q seien in p, v analytisch, aber nicht notwendigerweise in q resp. u; in diesen Variabeln jedoch stetig und zweimal differentiierbar. Dann gibt es eine Funktion $h(p, q, u, v)$, die in einem gewissen Gebiete um $u = 0$, $q = 0$ regulär ist, die in Rede stehende Differentialgleichung erfüllt und die vorgeschriebenen Anfangswerte annimmt.*

(Natürlich muß $U(p, 0, v) = Q(p, 0, v)$ sein!)

Und zwar lautet das Integral, wenn man

$$h_0 = U + Q - (U)_{q=0}$$

setzt und unter $\underbrace{\int}_{n}$ ein n-faches Integral versteht, folgendermaßen:

$$h = \sum_{n=0}^{\infty} \underbrace{\int_0^q}_{n} dq \underbrace{\int_0^u}_{n} du \, \frac{\partial^{2n} h_0}{\partial p^n \partial v^n}.$$

Dafür läßt sich auch der folgende geschlossene Ausdruck finden:

$$h(u, q, v, p) = h_0(u, q, v, p) + \frac{1}{2\pi} \int_0^u d\alpha \int_0^q d\beta \int_0^{2\pi} \frac{\partial^2 h_0}{\partial p \, \partial v} \, d\vartheta,$$

wobei $\frac{\partial^2 h_0}{\partial p \, \partial v}$ als Funktion folgender Argumente anzusehen ist:

$$\alpha, \beta, v - \sqrt{(u-\alpha)(q-\beta)}\, e^{\vartheta i}, \qquad p - \sqrt{(u-\alpha)(q-\beta)}\, e^{-\vartheta i}.$$

Für den Fall, daß h_0 in p, v nicht analytisch ist, habe ich den Existenzbeweis noch nicht führen können.

2) *Es existiere eine Funktion h, die der partiellen Differentialgleichung $\frac{\partial^2 h}{\partial u \, \partial q} = \frac{\partial^2 h}{\partial v \, \partial p}$ genügt und für $u = 0$ gleich $U(p, q, v)$ und für $q = 0$ gleich $Q(p, u, v)$ ist. Dann ist diese Funktion h in einem gewissen Bereiche um die Stelle $u = 0$, $q = 0$, p, v auch die einzige Funktion, die alle diese Bedingungen befriedigt*, vorausgesetzt, daß h eine stetige, bis zur zweiten Ordnung differentiierbare Funktion ist, die aber keineswegs analytisch zu sein braucht.

Der in Rede stehende Bereich kann a priori, unabhängig von den Werten der Funktionen U und Q angegeben werden.

§ 12.

Über die geometrische Deutung der Resultate. Erweiterung des Begriffes „Aichfläche".

Nachdem wir in den §§ 8—11 die analytischen Bedingungen formuliert haben, die das Längenelement dl auf Grund unserer Axiome erfüllen muß, soll jetzt eine geometrisch anschauliche Erläuterung derselben folgen.

Die eigentümliche Form von U, V, W weist zunächst darauf hin, daß wir g im wesentlichen überall kennen, wenn es auf der yz-Ebene allein gegeben ist für jeden Punkt in allen Richtungen.

Das im vorigen Paragraphen genannte Existenztheorem sagt dann — allerdings einstweilen nur unter Beschränkung auf den analytischen Charakter gewisser Funktionen — aus, daß es hinreicht, g allein zu kennen für

Achse in allen Richtungen ($u = 0$); außerdem aber noch in allen in der yz-Ebene, jedoch nur für $q = 0$, d. h. in den Richtungen, xy-Ebene parallel sind.

enken wir uns jetzt um jeden Punkt x, y, z eine Fläche konstruiert t, daß

$$1 = r \cos \vartheta g$$

eichung derselben in den Polarkoordinaten $r, \vartheta, \varepsilon$ ist, bezogen auf nkt x, y, z.

ann sagen, ebenso wie in dem speziellen Beispiel der Minkowski-Geometrie die Ungleichheitsbedingungen (III), (§ 8) nichts anderes s daß die so konstruierte Fläche überall gegen den festen Punkt konkav ist.

us der Geometrie selber kann man sich die Fläche in folgender entstanden denken:

onstruieren wir die Fläche, die in der betreffenden Geometrie von gewählten Punkte x, y, z einen bestimmten konstanten Abstand hat, vergrößern sie aber im Sinne der Namengebung dadurch, daß den Radiusvektor durch a dividieren. Alsdann lasse man a gegen onvergieren. Es gibt dann eine Grenzfläche, die, in Polarkoordinaten stellt, lautet

$$1 = rg \cos \vartheta.$$

Fläche soll allgemein „Aichfläche" heißen.

Mit Hülfe solcher Aichflächen kann man sich nun die allgemeinste etrie, die unsern Axiomen Genüge leistet, folgendermaßen verschaffen:

an konstruiere um jeden Punkt einer Geraden, die wir zur z-Achse n, eine konvexe Fläche, und um jeden Punkt einer durch die e gehenden Ebene, die wir zur yz-Ebene machen, in den Ebenen nst. je eine konvexe Kurve.

iese Flächen und Kurven mögen im allgemeinen stetig in einander . Schreibt man sie mittels Polarkoordinaten $r, \vartheta, \varepsilon$ in bezug auf igehörigen Punkt in der Form $1 = r \cos \vartheta \cdot \bar{g}$, so bestimmen die von $\frac{\partial^2 \bar{g}}{\partial p^2}, \frac{\partial^2 \bar{g}}{\partial p \partial q}, \frac{\partial^2 \bar{g}}{\partial q^2}$ *) $(p = \operatorname{tg} \vartheta \cos \varepsilon,\ q = \operatorname{tg} \vartheta \sin \varepsilon)$, soweit sie ilden lassen, zusammen mit der Differentialgleichung

$$\frac{\partial^2 h}{\partial u \partial q} = \frac{\partial^2 h}{\partial v \partial p} \qquad (u = y,\ v = z)$$

n Relationen Ia des § 8 die drei Funktionen U, V, W vollständig. wir dann

---

*) Wir setzen von unseren Gebilden voraus, daß diese Differentialquotienten n.

$$w = \frac{1}{\cos^5 \vartheta} (\cos^2 \varepsilon\, U + 2 \cos \varepsilon \sin \varepsilon\, V + \sin^2 \varepsilon\, W)$$

und bilden die Funktion

$$\bar{g} = \frac{1}{\cos \vartheta} \int_0^{\vartheta} \sin(\vartheta - \tau)\, w(p, q, u, v)\, d\tau + \alpha(y, z) + \beta(y, z)\, p + \gamma(y, z)\, q,$$

so sind α, β, γ vollständig bestimmt, wenn wir verlangen, daß $\bar{g}$ mit $\bar{\bar{g}}$ in den Definitionsbereichen des letzteren übereinstimmen und gleichzeitig $\frac{\partial \gamma}{\partial y} = \frac{\partial \beta}{\partial z}$ sein soll.

Endlich leiten wir aus $\bar{g}$ die Funktion g dadurch ab, daß wir setzen

$$g = \frac{1}{\cos \vartheta} \int_0^{\vartheta} \sin(\vartheta - \tau)\, w(p, q, y - xp, z - xq)\, d\tau + \frac{\partial t}{\partial x} + p \frac{\partial t}{\partial y} + q \frac{\partial t}{\partial z},$$

wobei t noch in mannigfaltiger Weise so gewählt werden kann, daß

$$\left(\frac{\partial t}{\partial x}\right)_{x=0} = \alpha(y, z); \quad \left(\frac{\partial t}{\partial y}\right)_{x=0} = \beta(y, z); \quad \left(\frac{\partial t}{\partial z}\right)_{x=0} = \gamma(y, z)$$

wird.

$$dl \equiv g\, dx$$

stellt dann das Längenelement der gesuchten Geometrie dar.

Dieselbe existiert so weit, als die Funktion g existiert, und befriedigt die Archimedische Forderung, solange w und $\frac{\partial^2 g}{\partial p^2} \frac{\partial^2 g}{\partial q^2} - \left(\frac{\partial^2 g}{\partial p\, \partial q}\right)^2$ positiv bleiben. In gewisser Nähe der Anfangswerte ($u = 0$, $q = 0$) ist diese letzte Bedingung aus Stetigkeitsrücksichten sicher erfüllt.

Das Einzige, was nach Wahl der angegebenen Aichflächen noch unbestimmt bleibt, ist zum Teil die Funktion t. Diese Unbestimmtheit fällt aber auch fort, sowie *wir die Erfüllung des starken Monodromieaxioms fordern. In diesem Falle ist die Geometrie durch die angenommenen Aichflächen und Aichkurven völlig festgelegt.*

Eine notwendige Bedingung für den Eintritt des starken Monodromieaxioms ist jedenfalls die, daß die ursprünglichen Aichflächen und Aichkurven symmetrisch waren; ob diese Bedingung auch hinreichend ist, könnte erst eine eingehendere Untersuchung der im vorigen Paragraphen besprochenen Differentialgleichung ergeben.

Gleichen, Dr. A., Oberlehrer am Königl. Kaiser Wilhelms-Realgymnasium zu Berlin, Lehrbuch der geometrischen Optik. Aus Teubners Sammlung von Lehrbüchern auf dem Gebiete der mathematischen Wissenschaften mit Einschluss ihrer Anwendungen). Band VIII. Mit 251 Figuren im Text. [XIV u. 511 S.] gr. 8. 1902. geb. n. ℳ 20.—

Grassmann's, Hermann, gesammelte mathematische und physikalische Werke. Auf Veranlassung der mathematisch-physikalischen Klasse der Königl. Sächsischen Gesellschaft der Wissenschaften und unter Mitwirkung der Herren Jacob Lüroth, Eduard Study, Justus Grassmann, Hermann Grassmann der Jüngere, Georg Scheffers herausgegeben von Friedrich Engel. II. Band. II. Teil. Die Abhandlungen zur Mechanik und zur mathematischen Physik. Mit 51 Figuren im Text. gr. 8. geh. n. ℳ 14.—

Hamburger, M., Gedächtnisrede auf Immanuel Lazarus Fuchs. Mit dem Bildnis des Verstorbenen sowie einem Verzeichnis seiner Schriften. gr. 8. 1902. geh. n. ℳ 1.—

Hensel, K., und **G. Landsberg**, Theorie der algebraischen Funktionen einer Variabeln und ihre Anwendung auf algebraische Kurven und Abelsche Integrale. Mit zahlreichen Textfiguren. [XVI u. 708 S.] gr. 8. 1902. In Leinwand geb. n. ℳ 28.— (Auch in 2 Hälften zu je n. ℳ 14.—)

Klein, F., Anwendung der Differential- und Integralrechnung auf Geometrie, eine Revision der Principien. Vorlesung, gehalten während des Sommersemesters 1901. Ausgearbeitet von Conrad Müller. [VIII u. 468 S.] gr. 8. 1902. geh. n. ℳ 10.—

Krazer, Dr. **Adolf**, o. Professor der Mathematik an der Technischen Hochschule zu Karlsruhe, Lehrbuch der Thetafunktionen. Mit 9 Textfiguren. gr. 8. 1903. In Leinw. geb.

Kübler, J., Baurat in Eßlingen, Die Berechnung der Kessel- und Gefäßwandungen. In zwei Teilen. I. Teil: Aufstellung der allgemeinen Gleichungen. Mit 6 Figuren. Mit einem Anhang: Welches Hindernis versperrt in der Knick-Theorie den Weg zur richtigen Erkenntnis!? [52 S.] gr. 8. 1902. geh. n. ℳ 1.60.

Loria, Dr **Gino**, ord. Professor der Geometrie an der Universität Genua, spezielle algebraische und transcendente ebene Kurven. Theorie und Geschichte. Autorisierte, nach dem italienischen Manuskript bearbeitete deutsche Ausgabe von Fritz Schütte, Oberlehrer am Kgl. Gymnasium zu Neuwied. Mit 74 Figuren auf 7 lithographierten Tafeln. [XXI u. 744 S.] gr. 8. 1902. In Leinw. geb. n. ℳ 28.— (Auch in 2 Teilen zu ℳ 16.— u. ℳ 12.—)

Musil, A., o. ö. Professor an der k. k. deutschen technischen Hochschule in Brünn, Grundlagen der Theorie und des Baues der Wärmekraftmaschinen. Zugleich autorisierte, erweiterte deutsche Ausgabe des Werkes The steam-engine and other heat-engines von J. A. Ewing, Prof. an der Universität in Cambridge. Mit 302 Abbildungen im Text. [X u. 794 S.] gr. 8. 1902. In Leinw. geb. n. ℳ 20.—

Netto, E., Lehrbuch der Kombinatorik. A. u. d. T.: B. G. Teubners Sammlung von Lehrbüchern auf dem Gebiete der Mathematischen Wissenschaften mit Einschluß ihrer Anwendungen. VII. Band. [VIII u. 260 S.] gr. 8. 1902. In Leinw. geb. n. ℳ 9.—

Perry, Dr. **John**, F. R. S., Professor der Mechanik und Mathematik am Royal College of Science zu London, höhere Analysis für Ingenieure. Autorisierte deutsche Bearbeitung von Dr. Robert Fricke, o. Professor an der technischen Hochschule zu Braunschweig, und Fritz Süchting, Oberingenieur am städtischen Elektrizitätswerke zu Minden i. W. Mit 106 in den Text gedruckten Figuren. [X u. 423 S.] gr. 8. 1902. geb. n. ℳ 12.—

Sauerbeck, Dr. **Paul**, Professor am Gymnasium Reutlingen, Einleitung in die analytische Geometrie der höheren algebraischen Kurven. Nach den Methoden von Jean Paul de Gua de Malves. Ein Beitrag zur Kurvendiskussion. Mit 76 Abbildungen im Text. [VI u. 165 S.] gr. 8. 1902. geh. n. ℳ 8.—

Serret-Bohlmann, Lehrbuch der Differential- und Integral-Rechnung. Zweite, durchgesehene Auflage. Dritter Band. Erste Lieferung. Differentialgleichungen. Herausgegeben von G. Bohlmann und E. Zermelo. Mit 10 in den Text gedruckten Figuren. [304 S.] gr. 8. 1903. geh. n. ℳ 6.—

Schenk, Dr. ing. **Julius**, Festigkeitsberechnung größerer Drehstrommaschinen. Mit 45 Figuren im Text und auf einer Doppeltafel. [IV u. 59 S.] gr. 8. 1903. geh. n. ℳ 1.60.

Schreber, Dr. K., die Theorie der Mehrstoffdampfmaschinen. Untersuchung der Frage: „Ist Wasser die vorteilhafteste Flüssigkeit zum Betriebe von Dampfmaschinen?“ und Bearbeitung der auf diese Frage sich ergebenden Antworten. Mit 12 Zeichnungen im Text. [IV u. 126 S.] gr. 8. geh. n. ℳ 3.60.

Study, E., Geometrie der Dynamen. Die Zusammensetzung von Kräften und verwandte Gegenstände der Geometrie. Mit in den Text gedruckten Figuren und einer Tafel. [XIII u. 602 S.] gr. 8. 1903. geh. n. ℳ 21.—, geb. n. ℳ 23.—

Wölffing, Dr. Ernst, Professor an der Königl. Technischen Hochschule zu Stuttgart, Mathematischer Bücherschatz. Systematisches Verzeichnis der wichtigsten deutschen und ausländischen Lehrbücher und Monographien des 19. Jahrhunderts auf dem Gebiete der mathematischen Wissenschaften. In zwei Teilen. I. Teil: Reine Mathematik. Mit einer Einleitung: Kritische Übersicht über die bibliographischen Hilfsmittel der Mathematik. (Abhandlungen zur Geschichte der mathematischen Wissenschaften mit Einschluß ihrer Anwendungen. Begründet von Moritz Cantor. Heft XVI, 1.) [XXXVI u. 416 S.] gr. 8. 1903. geh. n. ℳ 14.—, geb. n. ℳ 15.—

INHALT.

Seite

Neue Begründung der Bolyai-Lobatschefskyschen Geometrie. Von David Hilbert in Göttingen. (Mit 7 Figuren im Text) 157

Über die Curvatura integra und die Topologie geschlossener Flächen. Von Werner Boy in Leipzig. (Mit 24 Figuren im Text) 161

Anwendungen der Variationsrechnung auf partielle Differentialgleichungen mit zwei unabhängigen Variabeln. Von Yoshiya aus Tokio 185

Über die Anzahl der Primzahlen unter gegebener Grenze. Von Erhard Schmidt in Göttingen 195

Zur Proportionslehre. Von Friedrich Schur in Karlsruhe. (Mit 2 Figuren im Text) 265

Über die Incidenz zweier linearer Räume beliebiger Dimensionen. Von H. Schubert in Hamburg 289

Über einen Satz aus der Theorie der ebenen Kollineationen. Von Franz London in Breslau 327

Über die Geometricen, in denen die Geraden die Kürzesten sind. Von Georg Hamel in Karlsruhe. (Mit 5 Figuren im Text) 331

Wir ersuchen unsere geehrten Herren Mitarbeiter, etwaige, den Abhandlungen beizufügende Figuren — gleichviel ob dieselben im Texte selbst oder auf besonderen Tafeln veröffentlicht werden sollen — im Interesse einer raschen und exakten Ausführung stets auf besonderen Blättern, wenn möglich in der gewünschten Größe und in thunlichst präziser Zeichnung dem Manuscripte beilegen zu wollen. Ausserdem wird um möglichst genaue Angabe der Adresse gebeten.

Die Redaction.

☞ **Jeder Band der Annalen besteht aus 4 Heften und umfasst ca. 36 Druckbogen. Um jedoch in jedem Heft nur abgeschlossene Artikel zu geben, werden die einzelnen Hefte mitunter von ungleicher Stärke sein.**

Der Preis für den Band von 4 Heften beträgt 20 Mark; jährlich erscheinen etwa 4—6 Hefte. Alle Buchhandlungen und Postanstalten nehmen Bestellungen an.

Verantwortliche Redaction: **F. Klein**, Göttingen, Wilh.-Weber-Str. 3, **W. v. Dyck**, München, Hildegardstr. 1½, **David Hilbert**, Göttingen, Wilh.-Weber-Str. 28.

Hierzu Beilagen von **B. G. Teubner** in **Leipzig**, welche wir der Beachtung unserer Leser bestens empfehlen.

Druck und Verlag von B. G. Teubner in Leipzig, Poststraße 3.

MATHEMATISCHE ANNALEN.

BEGRÜNDET 1868 DURCH

ALFRED CLEBSCH UND CARL NEUMANN.

Unter Mitwirkung der Herren

PAUL GORDAN, ADOLPH MAYER, CARL NEUMANN, MAX NOETHER,
KARL VONDERMÜHLL, HEINRICH WEBER

gegenwärtig herausgegeben

von

Felix Klein
in Göttingen

Walther v. Dyck
in München

David Hilbert
in Göttingen

57. Band. 3. Heft.

Ausgegeben am 9. Juli.

LEIPZIG,
DRUCK UND VERLAG VON B. G. TEUBNER
1903.

Neuester Verlag von **B. G. Teubner** in Leipzig.

Encyklopädie der Mathematischen Wissenschaften, mit Einschluss ihrer Anwendungen. Hrsg. im Auftrage der Akademien der Wissenschaften zu München und Wien und der Gesellschaft der Wissenschaften zu Göttingen, sowie unter Mitwirkung zahlreicher Fachgenossen. In 7 Bänden zu je 6—8 Heften. gr. 8. geh.

Bisher erschien:

I. Arithmetik und Algebra, red. von Frz. Meyer.
Heft: 1. [112 S.] 1898. ℳ 3.40; 2. [112 S.] 1899. ℳ 3.40; 3. [128 S.] 1899. ℳ 3.80; 4. [160 S.] 1899. ℳ 4.80; 5. [208 S.] 1900. ℳ 6.40; 6. 272 S.] 1901. ℳ 7.20; 7. [128 S.] 1901. ℳ 3.80.

II. Analysis, 2 Teile, red. von H. Burkhardt.
I. Teil. Heft: 1. [120 S.] 1899. ℳ 4.80; 2./3. [240 S.] 1900. ℳ 7.50; 4. [160 S.] ℳ 4.80. II. Teil. Heft: 1. [176 S.] 1901. ℳ 5.20.

III. Geometrie, 3 Teile, red. von Frz. Meyer.
II. Teil. Heft: 1. [160 S.] 1903. ℳ 4.80
III. Teil. Heft: 1. [128 S.] 1902. ℳ 3.40.

IV. Mechanik, 2 Teile, red. von F. Klein.
I. Teil. Heft: 1. [121 S.] 1901. ℳ 3.40; 2. [136 S.] 1902. ℳ 4.80.
II. Teil. Heft: 1. [147 S.] 1901. ℳ 3.80; 2. [131 S.] 1903. ℳ 3.80.

V. Physik, 2 Teile, red. von A. Sommerfeld.
I. Teil. Heft: 1. [160 S.] 1903. ℳ 4.80.

Unter der Presse:

VI. 1: Geodäsie u. Geophysik, red. v. E. Wiechert.

In Vorbereitung:

VI. 2: Astronomie, red. von K. Schwarzschild.
VII. Historische, philosophische und didaktische Fragen behandelnd, sowie **Generalregister.**

Abel, Niels Henrik, Mémorial publié à l'occasion du centenaire de sa naissance. [XII u. 429 S.] 4. 1902. geh. n. ℳ 21.—

Inhalt: Niels Henrik Abel. — Par Bjørnstjerne Bjørnson. — Introduction historique. Par Elling Holst. — Correspondance d'Abel comprenant ses lettres et celles qui lui ont été adressées. — Lettres relatives à Abel. — Notes et éclaircissements sur la correspondance. — Texte original des lettres écrites par Abel en Norvégien. — Documents. Publiés par Carl Stormer. — Eclaircissements sur les documents. — Les études d'Abel et ses découvertes. Par L. Sylow.

Bauer, Dr. **Gustav**, Geheimrat, o. Professor an der Universität München, **Vorlesungen über Algebra.** Im Auftrage des mathematischen Vereins München herausgegeben von Dr. Karl Doehlemann, a. o. Professor an der Universität München. Mit dem Porträt Gustav Bauers als Titelbild und 11 Figuren im Text. [VI u. 376 S.] gr. 8. 1903. geh. n. ℳ 12.—, geb. n. ℳ 13.—

Berichte, Mathematische und Naturwissenschaftliche aus Ungarn. Mit Unterstützung der Ungarischen Akademie der Wissenschaften und der Kgl. Ungar. naturwissenschaftlichen Gesellschaft herausgegeben von Roland Baron Eötvös, Julius Kőnig, Karl von Than. Redigiert von Andreas Heller. 17. Band. [VII u. 364 S.] gr. 8. 1902. geh. n. ℳ 8.—

18. Band. [X u. 477 S.] gr. 8. 1903. geh. n. ℳ 8.—

Bolyai de Bolya, Joannes, Libellus post saeculum quam Anno MDCCCII a. d. XVIII Kalendas Januarias Claudiopoli natus est, ad celebrandam memoriam eius immortalem, ex consilio ordinis Mathematicorum et Naturae scrutatorum regiae Litterarum Universitatis Hungaricae Francisco-Josephinae Claudiopolitanae editus. 4. [XVI u. 154 S.] gr. 8. 1902. geh. ℳ 6.—

Appendix scientiam spatii absolute veram exhibens, a veritate aut falsitate axiomatis XI. Euclidei, a priori haud unquam decidenda, independentem, adiecta ad casum falsitatis quadratura circuli geometrica. Editio nova oblata ab Academia Scientiarum Hungarica ad diem natalem centesimum auctoris concelebrandum. Ediderunt Josephus Kürschak, Matthias Bényi, Béla Törökv de Zentgyörgy, Academiae Scientiarum Hungaricae sodales. 4. [VIII u. 40 S.] 1903. geh. n. ℳ 4.—

Braunmühl, Professor Dr. **A. von**, **Vorlesungen über Geschichte der Trigonometrie.** II. Hälfte: Von der Erfindung der Logarithmen bis auf die Gegenwart. Mit 39 Figuren im Text. [XI u. 264 S.] gr. 8. 1903. geh. ℳ 10.—

Bucherer, Dr. **A. H.**, Privatdocent an der Universität Bonn, **Elemente der Vektor-Analysis.** Mit Beispielen aus der theoretischen Physik. [VI u. 91 S.] gr. 8. 1903. geh. ℳ 2.40.

Curtze, M., **Urkunden zur Geschichte der Mathematik im Mittelalter und der Renaissance.** In 2 Teilen. Mit zahlreichen Textfiguren. gr. 8. 1902. geh. I. Teil. [X u. 336 S.] n. ℳ 16.—; II. Teil. [IV u. 291 S.] n. ℳ 14.—

Czuber, E., **Wahrscheinlichkeitsrechnung und ihre Anwendung auf Fehlerausgleichung, Statistik und Lebensversicherung.** [XV u. 534 S.] gr. 8. 1903. In Leinwand geb. n. ℳ 24.—

(Fortsetzung siehe 3. Umschlagseite.)

Über die Endlichkeit der Invariantensysteme.

Von

L. Maurer in Tübingen.

Inhalt.

Seite

Einleitung 266

I. Sätze über lineare infinitesimale Transformationen.

§ 1. Reguläre infinitesimale Transformationen und Differentialgleichungen. . . 267
§ 2. Über rationale Funktionen, die irregulären Differentialgleichungen genügen 269
§ 3. Verhalten ganzer Funktionen gegenüber regulären infinitesimalen Transformationen 272
§ 4. Über vertauschbare irreguläre infinitesimale Transformationen 276
§ 5. Über die Relation $BC(f) - CB(f) = \eta\, B(f)$. 279
§ 6. Hilfssätze der regulären infinitesimalen Transformationen zweiter Art betreffend 280
§ 7. Über Tripelsysteme 284
§ 8. Über das Verhalten ganzer rationaler Funktionen gegenüber einem Tripelsystem 287

II. Sätze aus der Theorie der kontinuierlichen Gruppen.

§ 9. Reguläre Gruppen 289
§ 10. Untergruppen 291
§ 11. Eine reguläre zusammengesetzte Gruppe besitzt eine reguläre ausgezeichnete Untergruppe 293
§ 12. Die charakteristische Determinante der Gruppe 295
§ 13. Gruppen vom Rang Null 297
§ 14. Gruppen, deren Rang größer als Null ist 300
§ 15. Einfache Gruppen 305

Einleitung.

Der Satz des Herrn Hilbert über die Endlichkeit der Invariantensysteme*) läßt sich als Spezialfall eines erheblich umfassenderen Satzes betrachten. Es ist dies der Satz:

Alle ganzen rationalen Funktionen der Variabeln $x_1 x_2 \cdots x_n$, die durch eine kontinuierliche lineare Gruppe G in sich selbst transformiert werden — die „ganzen Invarianten der Gruppe G" — lassen sich als ganze rationale Funktion einer endlichen Anzahl derselben darstellen.

Auch dieser Satz ist noch einer Erweiterung fähig.

Nehmen wir an, die Variabeln x seien nicht von einander unabhängig, sondern einem System algebraischer Gleichungen

$$(F) \qquad F_1 = 0 \; F_2 = 0 \cdots$$

unterworfen. Bezüglich dieses Gleichungssystems setzen wir nun voraus, daß es der Gruppe G gegenüber invariant ist.

Die Gesamtheit der Funktionen, die bei Berücksichtigung der Gleichungen (F) durch die Gruppe G in sich selbst transformiert werden, bilden ein „spezielles Invariantensystem" der Gruppe G. Auch die in diesem speziellen Invariantensystem enthaltenen ganzen Funktionen lassen sich als ganze Funktionen einer endlichen Anzahl derselben darstellen.

Die Liesche Gruppentheorie erlaubt dem ausgesprochenen Satz noch eine andere Fassung zu geben.

Die Gruppe G wird durch eine gewisse Anzahl r von infinitesimalen Transformationen der Form

$$C_\varrho(f) = \sum_{\lambda=1}^{n} \sum_{\mu=1}^{n} c_{\lambda\mu}^{(\varrho)} x_\mu \frac{\partial f}{\partial x_\lambda} \qquad \varrho = 1, 2, \cdots r$$

erzeugt.

Damit ein Gleichungssystem

$$(F) \qquad F_1 = 0 \; F_2 = 0 \cdots$$

der Gruppe G gegenüber invariant ist, ist erforderlich und hinreichend, daß eine jede der Gleichungen

$$C_\varrho(F_1) = 0 \; C_\varrho(F_2) = 0 \qquad \varrho = 1, 2, \cdots r$$

eine Folge der Gleichungen $F_1 = 0 \; F_2 = 0 \cdots$ ist.

Man bezeichnet in diesem Fall das Gleichungssystem (F) auch als invariant gegenüber den inf. Transf. $C_\varrho(f)$.

---

*) Ueber die Theorie der algebraischen Formen, Math. Annalen Bd. 36 S. 473. Vgl. auch die einleitenden Bemerkungen in der Abhandlung „Ueber die vollen Invariantensysteme", Math. Annalen Bd. 42, S. 313.

Das „allgemeine Invariantensystem" der Gruppe G umfaßt alle die Funktionen, die den Differentialgleichungen

$$C_\varrho(f) = 0 \qquad \varrho = 1, 2, \cdots r$$

bei unbeschränkter Variabilität der Größen x genügen; ein „spezielles Invariantensystem" umfaßt alle die Funktionen, die diesen Differentialgleichungen bei Berücksichtigung der Gleichungen (F) genügen.

Unser Satz läßt sich nun in der Form aussprechen:

Alle ganzen rationalen Funktionen die den Differentialgleichungen $C_\varrho(f) = 0$ bei unbeschränkter Variabilität der Größen x genügen, lassen sich als ganze Funktionen einer endlichen Anzahl derselben darstellen. Ebenso lassen sich alle ganzen rationalen Funktionen, die diesen Differentialgleichungen bei Berücksichtigung des Gleichungssystems (F) genügen, als ganze Funktionen einer endlichen Anzahl desselben darstellen, vorausgesetzt, daß dieses Gleichungssystem den inf. Transf. $C_\varrho(f)$ gegenüber invariant ist.

Eine knappe Darstellung eines Beweises für diesen Satz habe ich in den Sitzungsberichten der Münchener Akademie veröffentlicht (1899 S. 147); im folgenden gebe ich eine ausführlichere Darstellung dieses Beweises.

I. Sätze über lineare infinitesimale Transformationen.

§ 1.

Reguläre infinitesimale Transformationen und Differentialgleichungen.*)

Es sei eine inf. Transf.

$$C(f) = \sum_{\lambda=1}^{n} \sum_{\mu=1}^{n} c_{\lambda\mu} x_\mu \frac{\partial f}{\partial x_\lambda}$$

vorgelegt. Ich bezeichne dieselbe als regulär, wenn die „charakteristische Determinante der inf. Transf."

$$D(\omega) = \left| c_{\lambda\mu} - \binom{\lambda}{\mu} \omega \right| \qquad \lambda, \mu = 1, 2, \cdots r$$

entweder $= (-\omega)^n$ ist, oder wenn sie nur für ganzzahlige Werte von ω verschwindet und außerdem nur Elementarteiler erster Ordnung besitzt. Je nachdem der erste oder zweite Fall eintritt, nenne ich $C(f)$ regulär von der ersten oder von der zweiten Art. Tritt keiner von beiden Fällen ein, so heißt $C(f)$ irregulär.

*) Bezüglich der Entwicklungen der §§ 1 u. 2 vergl. meine Abhandlung Münchener Berichte 1888, S. 103.

Diese Bezeichnungen übertrage ich auch auf die Differentialgleichung $C(f) = 0$.

Jede irreguläre inf. Transf. läßt sich als homogene lineare Funktion einer Anzahl regulärer inf. Transf. darstellen.

Man gelangt zu dieser Darstellung auf folgendem Weg:

Ich bezeichne die verschiedenen Wurzeln der Gleichung $D(\omega) = 0$ mit $\omega_1\, \omega_2 \cdots \omega_{n'}$. Die Exponenten der Elementarteiler, die zur Wurzel ω_ν gehören, seien $e_1^{(\nu)}\, e_2^{(\nu)} \cdots e_{m_\nu}^{(\nu)}$. Man kann nun n^2 Größen mit nicht verschwindender Determinante

$$[gh1]_\nu,\ [gh2]_\nu,\ [gh3]_\nu, \cdots [ghn]_\nu$$

$$g = 1, 2, \cdots e_h^{(\nu)};\quad h = 1, 2, \cdots m_\nu;\quad \nu = 1, 2, \cdots n'$$

der Art bestimmen, daß

$$(1)\qquad \begin{aligned} &\sum_{\lambda=1}^{n} c_{\lambda\mu}\,[1h\lambda]^\nu = \omega_\nu [1h\mu]_\nu, \\ &\sum_{\lambda=1}^{n} c_{\lambda\mu}\,[gh\lambda]_\nu = \omega_\nu [gh\mu]_\nu + (g-1)\,[g-1\,h\mu]_\nu \end{aligned}$$

$$\mu = 1, 2, \cdots n;\quad g = 2, 3, \cdots e_h^{(\nu)};\quad h = 1, 2, \cdots m_\nu;\quad \nu = 1, 2, \cdots n'.$$

Man kann das erste dieser Gleichungssysteme unter die übrigen subsummiren, indem man Größen

$$[0h1]_\nu,\ [0h2]_\nu, \cdots [0hn]_\nu$$

einführt, auf deren Werte es nicht weiter ankommt, weil sie aus den Gleichungen wegfallen.

Sofern die Wurzeln ω_ν nicht selbst ganze Zahlen sind, kann man eine gewisse Anzahl i von Größen $\varrho_1\, \varrho_2 \cdots \varrho_i$ der Art wählen, daß erstens

$$(2)\qquad \omega_\nu = \alpha_{\nu 1}\,\varrho_1 + \alpha_{\nu 2}\,\varrho_2 + \cdots + \alpha_{\nu i}\,\varrho_i \qquad \nu = 1, 2, \cdots n'$$

wo $\alpha_{\nu 1}\, \alpha_{\nu 2} \cdots$ ganze Zahlen bedeuten, und daß zweitens die Größen $\varrho_1\, \varrho_2 \cdots$ keiner Relation

$$b_1\,\varrho_1 + b_2\,\varrho_2 + \cdots + b_i\,\varrho_i = 0$$

mit ganzzahligen Koeffizienten $b_1\, b_2 \cdots$ genügen.

Wir bestimmen nun die Größen $k_{\lambda\mu}^{(0)}$ durch die Gleichungen

$$(3)\qquad \sum_{\lambda=1}^{n} k_{\lambda\mu}^{(0)}\,[gh\lambda]_\nu = (g-1)\,[gh\mu]_\nu$$

und die Größen $k_{\lambda\mu}^{(\sigma)}$ $(\sigma = 1, 2, \cdots i)$ durch die Gleichungen

$$(4) \qquad \sum_{\lambda=1}^{n} k_{\lambda\mu}^{(\sigma)} [g h \lambda] = \alpha_{\nu\sigma} [g h \mu]_\nu$$

$$\mu = 1, 2, \cdots n; \quad g = 1, 2, \cdots e_h^{(\nu)}; \quad h = 1, 2, \cdots m_\nu; \quad \nu = 1, 2, \cdots n'.$$

Es ist nun ersichtlich, daß die inf. Transf.

$$K_0(f) = \sum_{\lambda=1}^{n} \sum_{\mu=1}^{n} k_{\lambda\mu}^{(0)} x_\mu \frac{\partial f}{\partial x_\lambda}$$

regulär von der ersten Art ist und daß jede der inf. Transf.

$$K_\sigma(f) = \sum_{\lambda=1}^{n} \sum_{\mu=1}^{n} k_{\lambda\mu}^{(\sigma)} x_\mu \frac{\partial f}{\partial x_\lambda} \qquad \sigma = 1, 2, \cdots i$$

regulär von der zweiten Art ist.

Bemerkt man, daß die n^2 Größen $c_{\lambda\mu}$ durch die Gleichungen (1) vollkommen bestimmt sind, so erkennt man, daß

$$c_{\lambda\mu} = k_{\lambda\mu}^{(0)} + \varrho_1 k_{\lambda\mu}^{(1)} + \varrho_2 k_{\lambda\mu}^{(2)} + \cdots + \varrho_i k_{\lambda\mu}^{(i)} \quad \lambda, \mu = 1, 2, \cdots n.$$

Denn die Gleichungen (1) bleiben in Geltung, wenn man die Größen $c_{\lambda\mu}$ durch die rechten Seiten der vorstehenden Gleichungen ersetzt. Es ist somit

$$C(f) = K_0(f) + \varrho_1 K_1(f) + \varrho_2 K_2(f) + \cdots + \varrho_i K_i(f).$$

§ 2.

Über rationale Funktionen, die irregulären Differentialgleichungen genügen.

Die Zusammensetzung einer irregulären inf. Transf. aus regulären Transf. ist für die hier zu entwickelnde Theorie von grundlegender Bedeutung; es gilt nämlich der Satz:

Genügt eine rationale Function f der irregulären Differentialgleichung $C(f) = 0$, so genügt f auch den regulären Differentialgleichungen

$$K_0(f) = 0 \quad K_1(f) = 0 \cdots \quad K_i(f) = 0.$$

Um diesen Satz zu beweisen, führen wir an Stelle der Variabeln x neue Variable ein durch die Substitution

$$(1) \qquad X_{gh}^{(\nu)} = \sum_{\mu=1}^{n} [g h \mu]_\nu x_\mu$$

$$g = 1, 2, \cdots e_h^{(\nu)}; \quad h = 1, 2, \cdots m_\nu; \quad \nu = 1, 2, \cdots n'.$$

Es ergibt sich bei Berücksichtigung der Gleichungen (1) des vorigen Paragraphen

$$C(f) = \sum_{\mu=1}^{n} \sum_{g=1}^{e_\mu^{(\nu)}} \sum_{h=1}^{m_\nu} \sum_{\nu=1}^{n'} (\omega_\nu [g h \mu]_\nu + [g-1\, h \mu]_\nu)\, x_\mu \frac{\partial f}{\partial X_{gh}^{(\nu)}}$$

also

$$(2) \quad C(f) = \sum_{h=1}^{m_\nu} \sum_{\nu=1}^{n'} \Big[\omega_\nu X_{1h}^{(\nu)} \frac{\partial f}{\partial X_{1h}^{(\nu)}} + \left(\omega_\nu X_{2h}^{(\nu)} + X_{1h}^{(\nu)}\right) \frac{\partial f}{\partial X_{2h}^{(\nu)}} + \left(\omega_\nu X_{3h}^{(\nu)} + 2 X_{2h}^{(\nu)}\right) \frac{\partial f}{\partial X_{3h}^{(\nu)}} + \cdots + \left(\omega_\nu X_{e_h^{(\nu)} h}^{(\nu)} + \left(e_h^{(\nu)} - 1\right) X_{e_h^{(\nu)}-1\, h}^{(\nu)}\right) \frac{\partial f}{\partial X_{e_h^{(\nu)} h}^{(\nu)}} \Big].$$

Dementsprechend folgt aus den Gleichungen (3) und (4) des vorigen Paragraphen

$$(3) \quad K_0(f) = \sum_{h=1}^{m_\nu} \sum_{\nu=1}^{n'} \Big[X_{1h}^{(\nu)} \frac{\partial f}{\partial X_{2h}^{(\nu)}} + 2 X_{2h}^{(\nu)} \frac{\partial f}{\partial X_{3h}^{(\nu)}} + \cdots + \left(e_h^{(\nu)} - 1\right) X_{e_h^{(\nu)}-1\, h}^{(\nu)} \frac{\partial f}{\partial X_{e_h^{(\nu)} h}^{(\nu)}} \Big],$$

$$K_\sigma(f) = \sum_{g=1}^{e_h^{(\nu)}} \sum_{h=1}^{m_\nu} \sum_{\nu=1}^{n'} \alpha_{\nu\sigma} X_{gh}^{(\nu)} \frac{\partial f}{\partial X_{gh}^{(\nu)}}.$$

Jede Funktion, die der Differentialgleichung $C(f) = 0$ genügt, wird durch eine eingliedrige lineare Gruppe in sich selbst transformiert. Die allgemeine Substitution dieser Gruppe, deren Koeffizienten von einem variabeln Parameter p abhängen, ist bestimmt durch die Differentialgleichungen

$$(4) \quad \begin{aligned} \frac{d Y_{1h}^{(\nu)}}{dp} &= \omega_\nu Y_{1h}^{(\nu)}, & g &= 2, 3, \cdots e_h^{(\nu)} \\ \frac{d Y_{gh}^{(\nu)}}{dp} &= \omega_\nu Y_{gh}^{(\nu)} + Y_{g-1\, h}^{(\nu)} & h &= 1, 2, \cdots m_\nu \\ & & \nu &= 1, 2, \cdots n' \end{aligned}$$

und die Anfangsbedingungen

$$Y_{gh}^{(\nu)} = X_{gk}^{(\nu)} \quad \text{für} \quad p = 0.$$

Die Integration ergibt

$$(5)\qquad Y_{1\lambda}^{(\nu)} = e^{\omega_\nu p}\, X_{1\lambda}^{(\nu)},$$

$$Y_{g\lambda}^{(\nu)} = e^{\omega_\nu p}\Big[X_{g\lambda}^{(\nu)} + (g-1)p\, X_{g-1\lambda}^{(\nu)} + \frac{(g-1)(g-2)}{1\cdot 2} p^2 X_{g-1\lambda}^{(\nu)} + \frac{(g-1)(g-2)(g-3)}{1\cdot 2\cdot 3} p^3 X_{g-3\lambda}^{(\nu)} + \cdots + p^{g-1} X_{2\lambda}^{(\nu)}\Big].$$

Umgekehrt genügt jede Funktion, die durch die eingliedrige Gruppe (5) in sich selbst transformiert sind, der Differentialgleichung (2).

In den Gleichungen (5) führen wir an Stelle von ω_ν den Ausdruck

$$\alpha_{\nu 1}\varrho_1 + \alpha_{\nu 2}\varrho_2 + \cdots + \alpha_{\nu i}\varrho_i$$

ein (§ 1 Nr. 2) und setzen $e^{\varrho_\sigma p} = q_\sigma$.

Die Variabeln $Y_{g\lambda}^{(\nu)}$ sind rationale Funktionen der Größen $p\, q_1 q_2 \cdots q_i$. Zwischen diesen Größen besteht keine algebraische Beziehung. Daraus folgt:

Wird eine rationale Funktion f durch die einfach unendlich vielen Substitutionen (5) in sich selbst transformiert, so wird sie auch durch die $i+1$-fach unendlich vielen Substitutionen in sich selbst transformiert, die sich ergeben, wenn man in (5) die Größen $p\, q_1 q_2 \cdots q_i$ als unabhängig variabel betrachtet. Setzt man von diesen $i+1$ Größen das eine Mal alle außer p gleich Null, das andere Mal alle außer q_σ gleich Null, so ergeben sich die Substitutionen

$$Y_{1\lambda}^{(\nu)} = X_{1\lambda}^{(\nu)},$$

$$Y_{g\lambda}^{(\nu)} = X_{g\lambda}^{(\nu)} + (g-1)p\, X_{g-1\lambda}^{(\nu)} + \frac{(g-1)(g-2)}{1\cdot 2} p^2 X_{g-2\lambda}^{(\nu)} + \cdots + p^{g-1} X_{1\lambda}^{(\nu)}$$

und

$$Y_{g\lambda}^{(\nu)} = q_\sigma^{\alpha_{\nu\sigma}} X_{g\lambda}^{(\nu)}.$$

Jede dieser Substitutionen transformiert f in sich selbst. Daraus folgt, daß f den Differentialgleichungen (3)

$$K_0(f) = 0 \quad K_1(f) = 0 \cdots K_i(f) = 0$$

genügt.

Aus dem vorangehenden ergibt sich überdies:

Eine reguläre inf. Transf. erzeugt eine Gruppe linearer Substitutionen, deren Koeffizienten sich als *rationale* Funktionen eines Parameters darstellen lassen.

§ 3.

Verhalten ganzer Funktionen gegenüber regulären infinitesimalen Transformationen.

Ganze rationale Funktionen zeigen gegenüber den regulären inf. Transf. erster und zweiter Art ein durchaus verschiedenes Verhalten.

Ist die inf. Transf. $C(f)$ regulär von der ersten Art, so kann man für jede ganze Funktion f eine Zahl ν der Art bestimmen, daß $C^\nu(f) = 0$ während $C^{\nu-1}(f)$ von Null verschieden ist.*)

Solange die Variabeln x als unter einander unabhängig betrachtet werden, verschwinden mit dem Ausdruck $C^\nu(f)$ selbstverständlich auch die Ausdrücke $C^{\nu+1}(f)$ $C^{\nu+2}(f)$ u. s. w. Dies gilt aber auch in dem Fall, daß zwischen den Variabeln Relationen bestehen, die den inf. Transf. $C(f)$ gegenüber invariant sind. Denn alsdann besteht gleichzeitig mit der Gleichung $F = 0$ auch die Gleichung $C(F) = 0$.

Um den ausgesprochenen Satz zu beweisen, transformieren wir die inf. Transf. durch die Substitution (1) des vorigen Paragraphen.

Im vorliegenden Fall hat man $n' = 1$ und $\omega_1 = 0$ zu setzen; der Index ν kann als überflüssig unterdrückt werden.

Es ergibt sich (Nr. 2 des vorigen Paragraphen)

$$(1)\qquad C(f) = \sum_{h=1}^{m}\Big[X_{1h}\frac{\partial f}{\partial X_{2h}} + 2X_{2h}\frac{\partial f}{\partial X_{3h}} + 3X_{3h}\frac{\partial f}{\partial X_{4h}} + \cdots + (e_h - 1)X_{e_h - 1\,h}\frac{\partial f}{\partial X_{e_h h}}\Big].$$

Inf. Transf. dieser Form sind aus der Theorie der Binärformen bekannt.**) Man bezeichnet in dieser Theorie bekanntlich als Gewicht eines Produktes

---

*) Ich setze zur Abkürzung in üblicher Weise

$$CC(f) = C^2(f) \quad CCC(f) = C^3(f) \text{ u. s. w.}$$

Es ist zweckmäßig überdies festzusetzen $C^0(f) = f$.

**) Die Differentialgleichung $C(f) = 0$ ist identisch mit der Aronholdschen Differentialgleichung

$$D_{21}^{(1)}(f) + D_{21}^{(2)}(f) + \cdots + D_{21}^{(m)}(f) = 0,$$

die sich auf das System der Binärformen

$$X_{1h}\xi^{e_h - 1} + (e_h - 1)X_{2h}\xi^{e_h - 2}\eta + \frac{(e_h - 1)(e_h - 2)}{1 \cdot 2}X_{3h}\xi^{e_h - 3}\eta^2 + \cdots + X_{e_h h}\eta^{e_h - 1}$$

$$h = 1, 2, \cdots m$$

bezieht. Es genügen derselben bekanntlich die leitenden Koeffizienten der Kovarianten — die Semiinvarianten — des Formensystems.

Die Integration ergibt

$$(5)\qquad Y_{1k}^{(\nu)} = e^{\omega_\nu p} X_{1k}^{(\nu)},$$

$$Y_{gk}^{(\nu)} = e^{\omega_\nu p}\Big[X_{gk}^{(\nu)} + (g-1)p\,X_{g-1k}^{(\nu)} + \frac{(g-1)(g-2)}{1\cdot 2}p^2 X_{g-1k}^{(\nu)} + \frac{(g-1)(g-2)(g-3)}{1\cdot 2\cdot 3}p^3 X_{g-3k}^{(\nu)} + \cdots + p^{g-1}X_{1k}^{(\nu)}\Big].$$

Umgekehrt genügt jede Funktion, die durch die eingliedrige Gruppe (5) in sich selbst transformiert sind, der Differentialgleichung (2).

In den Gleichungen (5) führen wir an Stelle von ω_ν den Ausdruck

$$\alpha_{\nu 1}\varrho_1 + \alpha_{\nu 2}\varrho_2 + \cdots + \alpha_{\nu i}\varrho_i$$

ein (§ 1 Nr. 2) und setzen $e^{\varrho_\sigma p} = q_\sigma$.

Die Variabeln $Y_{gk}^{(\nu)}$ sind rationale Funktionen der Größen $p\,q_1\,q_2\cdots q_i$. Zwischen diesen Größen besteht keine algebraische Beziehung. Daraus folgt:

Wird eine rationale Funktion f durch die einfach unendlich vielen Substitutionen (5) in sich selbst transformiert, so wird sie auch durch die $i+1$-fach unendlich vielen Substitutionen in sich selbst transformiert, die sich ergeben, wenn man in (5) die Größen $p\,q_1\,q_2\cdots q_i$ als unabhängig variabel betrachtet. Setzt man von diesen $i+1$ Größen das eine Mal alle außer p gleich Null, das andere Mal alle außer q_σ gleich Null, so ergeben sich die Substitutionen

$$Y_{1k}^{(\nu)} = X_{1k}^{(\nu)},$$

$$Y_{gk}^{(\nu)} = X_{gk}^{(\nu)} + (g-1)p\,X_{g-1k}^{(\nu)} + \frac{(g-1)(g-2)}{1\cdot 2}p^2 X_{g-2k}^{(\nu)} + \cdots + p^{g-1}X_{1k}^{(\nu)}$$

und

$$Y_{gk}^{(\nu)} = q_\sigma^{\alpha_{\nu\sigma}} X_{gk}^{(\nu)}.$$

Jede dieser Substitutionen transformiert f in sich selbst. Daraus folgt, daß f den Differentialgleichungen (3)

$$K_0(f) = 0\ K_1(f) = 0 \cdots K_i(f) = 0$$

genügt.

Aus dem vorangehenden ergibt sich überdies:

Eine reguläre inf. Transf. erzeugt eine Gruppe linearer Substitutionen, deren Koeffizienten sich als *rationale* Funktionen eines Parameters darstellen lassen.

Zum Beweise wenden wir wieder die Transformation (1) des vorigen Paragraphen an. Im vorliegenden Fall sind die Größen ω_ν ganze Zahlen, die Zahlen $e_k^{(\nu)}$ sind sämtlich gleich eins, man kann daher den Index g als überflüssig unterdrücken.

Die Gleichung (2) des § 2 ergibt

$$C(f) = \sum_{\nu=1}^{n'} \sum_{k=1}^{m_\nu} \omega_\nu X_k^{(\nu)} \frac{\partial f}{\partial X_k^{(\nu)}}. \tag{2}$$

Nehmen wir zunächst an, die Variabeln x seien unter einander unabhängig. In diesem Fall ist ohne weiteres klar, daß die ganze Funktion f dann und nur dann ausgezeichnete Funktion ist, wenn für alle Glieder

$$\text{Constans} \times \prod_{\nu=1}^{n'} X_1^{(\nu)^{\lambda_{\nu 1}}} X_2^{(\nu)^{\lambda_{\nu 2}}} \cdots X_{m_\nu}^{(\nu)^{\lambda_{\nu m_\nu}}}$$

aus denen sie sich zusammensetzt, die Summe

$$\sum_{\nu=1}^{n'} (\lambda_{\nu 1} + \lambda_{\nu 2} + \cdots + \lambda_{\nu m_\nu}) \omega_\nu$$

einen und denselben Wert k hat, der notwendig eine ganze Zahl ist.

Es ist ferner klar, daß sich jede ganze Funktion als Summe einer Anzahl von ausgezeichneten Funktionen darstellen läßt.

Nehmen wir nun einen Augenblick an, es sei

$$C(f) = kf + f' \qquad C(f') = kf'$$

also

$$C^2(f) - 2kC(f) + k^2 f = 0$$

Auch in diesem Fall kann f nur solche Glieder

$$\text{Constans} \times \prod_{\nu=1}^{n'} X_1^{(\nu)^{\lambda_{\nu 1}}} X_2^{(\nu)^{\lambda_{\nu 2}}} \cdots X_{m_\nu}^{(\nu)^{\lambda_{\nu m_\nu}}}$$

enthalten, für die

$$\sum_{\nu=1}^{n'} (\lambda_{\nu 1} + \lambda_{\nu 2} + \cdots + \lambda_{\nu m_\nu}) = k.$$

Ist aber diese Bedingung erfüllt, so ist

$$C(f) = kf \quad \text{und} \quad f' = 0$$

entgegen der gemachten Voraussetzung.

Nehmen wir nunmehr an, die Variabeln x_λ und also auch die Variabeln $X_k^{(\nu)}$ genügen einem Gleichungssystem, das der inf. Transf. $C(f)$ gegenüber invariant ist.

Wir gehen von der eben gemachten Bemerkung aus, daß sich jede ganze Function f als Summe einer Anzahl von ganzen Funktionen $\varphi_1\ \varphi_2 \cdots \varphi_\varrho$ darstellen läßt, von denen jede bei unbeschränkter Variabilität der Größen $X_\lambda^{(\nu)}$ einer Differentialgleichung der Form

$$C(\varphi_\sigma) = k_\sigma \varphi_\sigma \qquad \sigma = 1, 2, \cdots \varrho$$

genügt. Man kann die Funktionen φ_σ so wählen, daß unter den Indizes k_σ keine zwei einander gleich sind und daß keine der Funktionen φ_σ infolge der Relationen zwischen den Variabeln verschwindet. Unter dieser Voraussetzung können die Funktionen φ_σ keiner linearen Relation

$$F = \gamma_1\varphi_1 + \gamma_2\varphi_2 + \cdots + \gamma_\varrho\varphi_\varrho = 0$$

mit konstanten Koeffizienten γ_σ genügen. Denn mit $F = 0$ bestehen auch die Gleichungen

$$C(F) = \sum_{\sigma=1}^{\varrho} k_\sigma \gamma_\sigma \varphi_\sigma = 0 \quad C^2(F) = \sum_{\sigma=1}^{\varrho} k_\sigma^2 \gamma_\sigma \varphi_\sigma = 0 \text{ u. s. w.}$$

und diese erfordern unter den gemachten Voraussetzungen, daß alle Konstanten γ_σ verschwinden. Nun ist

$$C(f) - kf = \sum_{\sigma=1}^{\varrho} (k_\sigma - k)\varphi_\sigma,$$

und

$$C^2(f) - 2kC(f) + k^2 f = \sum_{\sigma=1}^{\varrho} (k_\sigma - k)^2 \varphi_\sigma.$$

Es ist sonach ersichtlich:

Die Gleichung $C(f) = kf$ erfordert $\varrho = 1\ f = \varphi_1\ k = k_1$.

Die Forderung

$$C^2(f) - 2kC(f) + k^2 f = 0 \qquad C(f) - kf \neq 0$$

führt zu einem Widerspruch.

Aus dem Vorangehenden folgt, daß sich jede ganze Funktion, die der Gleichung $C(f) = 0$ bei Berücksichtigung der invarianten Relationen zwischen den Variabeln genügt, als ganze Funktion darstellen läßt, die derselben Differentialgleichung auch bei unbeschränkter Variabilität der Größen x genügt.

§ 4.

Über vertauschbare irreguläre infinitesimale Transformationen.

Es seien zwei inf. Transf.

$$B(f)=\sum_{\lambda=1}^{n}\sum_{\mu=1}^{n} b_{\lambda\mu}x_\mu\frac{\partial f}{\partial x_\lambda} \quad \text{und} \quad C(f)=\sum_{\lambda=1}^{n}\sum_{\mu=1}^{n} c_{\lambda\mu}x_\mu\frac{\partial f}{\partial x_\lambda}$$

vorgelegt. Diese inf. Transf. seien mit einander vertauschbar; es sei also identisch

$$BC(f)-CB(f)=0$$

oder explizit geschrieben

$$\sum_{\nu=1}^{n}(b_{\lambda\nu}c_{\nu\mu}-c_{\lambda\nu}b_{\nu\mu})=0 \qquad \lambda,\mu=1,2,\cdots,n. \tag{1}$$

Ich nehme an, die inf. Transf. $C(f)$ sei irregulär und setze — die in § 1 eingeführten Bezeichnungen beibehaltend —

$$C(f)=K_0(f)+\varrho_1K_1(f)+\cdots+\varrho_iK_i(f)$$

wo $K_0(f)$ $K_1(f)\cdots K_i(f)$ reguläre Transformationen bedeuten. Ob die inf. Transf. $B(f)$ regulär ist oder nicht, kommt für das Folgende nicht in Betracht.

Es gilt nun der Satz:

Die inf. Transf. $B(f)$ ist vertauschbar mit einer jeden der regulären inf. Transf.

$$K_0(f),\ K_1(f)\cdots K_i(f),$$

aus denen $C(f)$ zusammengesetzt ist.

Zum Beweis bemerken wir zunächst: Die Gleichungen (1) werden vollständig vertreten durch die Gleichungen (s. § 1, Nr. 1)

$$\sum_{\lambda=1}^{n}\sum_{\varkappa=1}^{n}(b_{\lambda\varkappa}c_{\varkappa\mu}-c_{\lambda\varkappa}b_{\varkappa\mu})\,[gh\lambda]_\nu=0$$

oder

$$\sum_{\varkappa=1}^{n}c_{\varkappa\mu}\left(\sum_{\lambda=1}^{n}b_{\lambda\varkappa}[gh\lambda]_\nu\right)=\omega_\nu\sum_{\varkappa=1}^{n}b_{\varkappa\mu}[gh\varkappa]_\varkappa+(g-1)\sum_{\varkappa=1}^{n}b_{\varkappa\mu}[g-1h\varkappa]\ .$$

Setzen wir zur Abkürzung

$$\sum_{\lambda=1}^{n}b_{\lambda\varkappa}[gh\lambda]_\nu=[gh\varkappa]_\nu',$$

so erhalten diese Gleichungen die Form

$$(2)\qquad \sum_{\lambda=1}^{n} c_{\varkappa\mu}[gh\varkappa]_{\nu}' = \omega_{\nu}[g-1\,h\mu]_{\nu}' + (g-1)\,[g-1\,h\mu]_{\nu}',$$

$$\mu = 1, 2, \cdots, n; \quad g = 1, 2, \cdots, e_h^{(\nu)}; \quad h = 1, 2, \cdots, m_{\nu}; \quad \nu = 1, 2, \cdots, n'.$$

Weil die n Wertsysteme

$$[gh1]_{\nu},\ [gh2]_{\nu} \cdots [ghr]_{\nu}$$

unter einander linear unabhängig sind, so kann man Gleichungen der Form ansetzen

$$(3)\qquad [gh\lambda]_{\nu}' = \sum_{\varrho=1}^{n'} \sum_{j=1}^{m_{\varrho}} \Big[\beta_{\varrho j1}^{(\varrho)}[1j\lambda]_{\varrho} + \beta_{\varrho j2}^{(\varrho)}[2j\lambda]_{\varrho} + \beta_{\varrho j3}^{(\varrho)}[3j\lambda]_{\varrho} + \cdots + \beta_{\varrho j e_j^{(\varrho)}}^{(\varrho)}[e_j^{(\varrho)} j\lambda]_{\varrho}\Big],$$

$$\lambda = 1, 2, \cdots, n; \quad g = 1, 2, \cdots, e_h^{(\nu)}.$$

Hieraus ergibt sich

$$(4)\qquad \sum_{\varkappa=1}^{n} c_{\varkappa\mu}[gh\varkappa]_{\nu}' - \omega_{\nu}[gh\mu]_{\nu}'$$

$$= \sum_{\varrho=1}^{n'} \sum_{j=1}^{m_{\varrho}} \Big\{\big((\omega_{\varrho}-\omega_{\nu})\beta_{\varrho j1}^{(\varrho)} + \beta_{\varrho j2}^{(\varrho)}\big)[1j\mu]_{\varrho} + \big((\omega_{\varrho}-\omega_{\nu})\beta_{\varrho j2}^{(\varrho)} + 2\beta_{\varrho j3}^{(\varrho)}\big)[2j\mu]_{\varrho} + \cdots + (\omega_{\varrho}-\omega_{\nu})\beta_{\varrho j e_j^{(\varrho)}}^{(\varrho)}[e_j^{(\varrho)} j\mu]_{\varrho}\Big\}.$$

Für $g = 1$ verschwindet wegen (2) die linke Seite; da die Determinante der $[gh\mu]_{\varrho}$ nicht verschwindet, so folgt:

$$(\omega_{\varrho}-\omega_{\nu})\beta_{\varrho j1}^{(1)} + \beta_{\varrho j2}^{(1)} = 0, \quad (\omega_{\varrho}-\omega_{\nu})\beta_{\varrho j2}^{(1)} + 2\beta_{\varrho j3}^{(1)} = 0, \cdots,$$

$$(\omega_{\varrho}-\omega_{\nu})\beta_{\varrho j e_j^{(\varrho)}}^{(1)} = 0.$$

Wenn $\varrho \neq \nu$ also auch $\omega_{\varrho} \neq \omega_{\nu}$ ist, so ist demnach

$$\beta_{\varrho j g}^{(1)} = 0 \quad \text{für} \quad g = 1, 2, \cdots, e_j^{(\varrho)}; \quad j = 1, 2, \cdots, m_{\varrho}.$$

Für $g = 2$ ergeben die Gleichungen (4) bei Berücksichtigung der Gleichungen (2)

$$\sum_{j=1}^{m_{\nu}} \Big\{\beta_{\nu j1}^{(1)}[1j\mu]_{\nu} + \beta_{\nu j2}^{(1)}[2j\mu]_{\nu} + \cdots + \beta_{\nu j e_j^{(\nu)}}^{(1)}[e_j^{(\nu)} j\mu]_{\nu}\Big\}$$

$$= \sum_{\varrho=1}^{n'} \sum_{j=1}^{m_{\varrho}} \Big\{\big((\omega_{\varrho}-\omega_{\nu})\beta_{\varrho j1}^{(2)} + \beta_{\varrho j2}^{(2)}\big)[1j\mu]_{\varrho} + \big((\omega_{\varrho}-\omega_{\nu})\beta_{\varrho j2}^{(2)} + 2\beta_{\varrho j3}^{(2)}\big)[2j\mu]_{\nu} + \cdots + (\omega_{\varrho}-\omega_{\nu})\beta_{\varrho j e_j^{(\varrho)}}^{(2)}[e_j^{(\varrho)} j\mu]_{\varrho}\Big\}.$$

Die eben angewendete Schlußweise zeigt, daß

$$\beta^{(2)}_{\varrho j g} = 0 \quad \text{wenn} \quad \varrho \neq \nu.$$

Indem man sodann in den Gleichungen (4) $g = 3$ setzt, erkennt man daß

$$\beta^{(3)}_{\varrho j g} = 0 \quad \text{wenn} \quad \varrho \neq \nu \quad \text{u. s. w.}$$

Allgemein ist

$$\beta^{(i)}_{\varrho j g} = 0 \quad \text{wenn} \quad \varrho \neq \nu.$$

Die Gleichungen (3) erhalten demnach die vereinfachte Form

$$[g h \lambda]_\nu' = \sum_{j=1}^{m_\nu} \sum_{s=1}^{e_j^{(\nu)}} \beta^{(\varrho)}_{j s} [s j \lambda]_\nu.$$

Nun folgt aus § 1 Nr. 4 für $\sigma = 1, 2, \cdots$:

$$\sum_{\lambda=1}^{n} k^{(\sigma)}_{\lambda\mu} [g h \lambda]_\nu' = \sum_{j=1}^{m_\nu} \sum_{s=1}^{e_j^{(\nu)}} \beta^{(\varrho)}_{j s} \alpha_{\nu\sigma} [s j \mu]_\nu = \alpha_{\nu\sigma} [g h \mu]_\nu'.$$

Folglich ist

$$\sum_{\lambda=1}^{n} \sum_{\varkappa=1}^{n} \left(b_{\lambda\varkappa} k^{(\sigma)}_{\varkappa\mu} - k^{(\sigma)}_{\lambda\varkappa} b_{\varkappa\mu} \right) [g h \lambda]_\nu = \sum_{\varkappa=1}^{n} k^{(\sigma)}_{\varkappa\mu} [g h \varkappa]_\nu' - \alpha_{\nu\sigma} [g h \mu]_\nu' = 0$$

für $\mu = 1, 2, \cdots, n$; $g = 1, 2, \cdots, e_h^{(\nu)}$; $h = 1, 2, \cdots, m_\nu$; $\nu = 1, 2, \cdots, n'$; $\sigma = 1, 2, \cdots, i$.

Da die Determinante der Größen $[g h \lambda]_\nu$ nicht verschwindet, so folgt hieraus

$$\sum_{\varkappa=1}^{n} \left(b_{\lambda\varkappa} k^{(\sigma)}_{\varkappa\mu} - k^{(\sigma)}_{\lambda\varkappa} b_{\varkappa\mu} \right) = 0 \qquad \lambda, \mu = 1, 2, \cdots, n; \quad \sigma = 1, 2, \cdots i$$

d. h. die inf. Transf. $B(f)$ ist mit einer jeden der inf. Transf. $K_1(f)$ $K_2(f) \cdots K_i(f)$ vertauschbar. Da $B(f)$ mit

$$C(f) = K_0(f) + \varrho_1 K_1(f) + \cdots + \varrho_i K_i(f)$$

vertauschbar ist, so ist $B(f)$ auch mit $K_0(f)$ vertauschbar.

Damit ist der aufgestellte Satz bewiesen.

Ich möchte eine Folgerung hervorheben, die sich unmittelbar aus demselben ergibt:

Sind zwei irreguläre inf. Transf. $B(f)$ und $C(f)$ mit einander vertauschbar, so ist eine jede der regulären inf. Transf., aus denen sich $B(f)$ zusammensetzen läßt, mit einer jeden der inf. Transf., aus denen sich $C(f)$ zusammensetzen läßt, vertauschbar.

Setzt man insbesondere $B(f) = C(f)$, so ergibt sich:

Je zwei der inf. Transf. $K_0(f)$ $K_1(f) \cdots K_i(f)$ sind mit einander vertauschbar.

§ 5.

Über die Relation $BC(f) - CB(f) = \eta B(f)$ *).

Es seien zwei inf. Transf.

$$B(f) = \sum_{\lambda=1}^{n} \sum_{\mu=1}^{n} b_{\lambda\mu} x_\mu \frac{\partial f}{\partial x_\lambda} \quad \text{und} \quad C(f) = \sum_{\lambda=1}^{n} \sum_{\mu=1}^{n} c_{\lambda\mu} x_\mu \frac{\partial f}{\partial x_\lambda}$$

vorgelegt. Zwischen denselben bestehe die Beziehung

$$BC(f) - CB(f) = \eta B(f) \tag{1}$$

und die hier rechts auftretende Größe η sei von Null verschieden.

Dann gilt der Satz:

Entweder verschwindet die inf. Transf. $B(f)$ identisch oder η ist die Differenz zweier der Werte, für die die charakteristische Determinante $D(\omega)$ der inf. Transf. $C(f)$

$$D(\omega) = \left| c_{\lambda\mu} - \left|\begin{matrix}\lambda\\ \mu\end{matrix}\right| \omega \right| \qquad \lambda, \mu = 1, 2, \cdots, n$$

verschwindet und es ist außerdem die inf. Transf. $B(f)$ regulär von der ersten Art.

Die durch (1) ausgedrückten Bedingungen lauten explizit geschrieben

$$\sum_{\varkappa=1}^{n} (b_{\lambda\varkappa} c_{\varkappa\mu} - c_{\lambda\varkappa} b_{\varkappa\mu}) = \eta b_{\lambda\mu}. \qquad \lambda, \mu = 1, 2, \cdots, n \tag{2}$$

Halten wir an den in Nr. 1 des § 1 eingeführten Bezeichnungen fest und setzen wir wieder

$$\sum_{\lambda=1}^{n} b_{\lambda\mu} [gh\lambda]_\nu = [gh\mu]_\nu'.$$

Die Gleichungen (2) werden vollständig durch die Gleichungen vertreten

$$\sum_{\lambda=1}^{n} c_{\lambda\mu} [gh\lambda]_\nu' = (\eta + \omega_\nu) [gh\mu]_\nu' + (g-1)\,[g-1\,h\mu]_\nu'$$

$\mu = 1, 2, \cdots, n$; $g = 1, 2, \cdots, e_h^{(\nu)}$; $h = 1, 2, \cdots, m_\nu$; $\nu = 1, 2, \cdots, n'$.

Indem man g der Reihe nach $= 1, 2, \cdots, e_h^{(\nu)}$ setzt, erkennt man, daß $[gh\lambda]_\nu' = 0$ für $g = 1, 2, \cdots, e_h^{(\nu)}$, wenn nicht $\omega_\nu + \eta$ Wurzel der Gleichung $D(\omega) = 0$ ist. Ist also η nicht gleich der Differenz zweier Wurzeln dieser Gleichung, so ist $[gh\lambda]_\nu' = 0$ für alle Werte der Indizes und es verschwinden somit alle Koeffizienten $b_{\lambda\mu}$.

---

*) Bezüglich der §§ 5 u. 6 vergl, meine Abhandlung Münchener Berichte 1894, S. 297.

Aus der Gleichung (1) ergibt sich ferner

$$B^2C(f) - CB^2(f) = B(BC - CB)(f) + (BC - CB)B(f) = 2\eta B^2(f),$$
$$B^3C(f) - CB^3(f) = B(B^2C - CB^2)(f) + (BC - CB)B^2(f) = 3\eta B^2(f)$$

und allgemein

$$B^\varkappa C(f) - CB^\varkappa(f) = \varkappa\eta B^\varkappa(f).$$

Wählt man die Zahl $\varkappa$ so groß, daß $\varkappa\eta$ nicht gleich der Differenz zweier Wurzeln der Gleichung $D(\omega) = 0$ ist, so muß die inf. Transf. $B^\varkappa(f)$ identisch verschwinden. Damit das identische Verschwinden von $B^\varkappa(f)$ nicht das identische Verschwinden von $B(f)$ nach sich zieht, ist erforderlich, daß $B(f)$ regulär von der ersten Art ist.

Wenn die inf. Transf. $C(f)$ regulär von der zweiten Art ist, so ist η eine ganze Zahl.

§ 6.

Hilfssätze, die regulären infinitesimalen Transformationen zweiter Art betreffend.

Wir beweisen im folgenden drei Hilfssätze, die Beziehungen betreffend, die zwischen einer regulären inf. Transf. zweiter Art und anderen inf. Transf. bestehen können.

Der erste derselben lautet:

Wenn die inf. Transf. $A(f)$ regulär von der zweiten Art ist, so können die Identitäten

$$AC(f) - CA(f) = \eta C(f),$$
$$AB(f) - BA(f) = \eta B(f) + C(f)$$

nur bestehen, wenn die inf. Transf. $C(f)$ identisch verschwindet.

Zum Beweis nehmen wir an, f sei eine ganze Funktion, die der inf. Transf. $A(f)$ gegenüber ausgezeichnet ist und k sei ihr Index. Es ist also $A(f) = kf$.

Sei ferner zur Abkürzung $C(f) = \varphi$, $B(f) = \psi$.

Aus den obigen Identitäten ergibt sich

$$A(\varphi) = (\eta + k)\varphi, \quad A(\psi) = (\eta + k)\psi + \varphi.$$

Diese Gleichungen erfordern nach § 3

$$\varphi = C(f) = 0.$$

Der Ausdruck $C(f)$ verschwindet also, wenn für f irgend eine ausgezeichnete Funktion gesetzt wird, folglich auch, wenn für f eine beliebige ganze Funktion gesetzt wird; $C(f)$ verschwindet also identisch.

Hieraus können wir den Schluß ziehen:

Bestehen zwischen der regulären inf. Transf. zweiter Art $C_1(f)$ und den inf. Transf. $C_2(f)$, $C_3(f) \cdots C_r(f)$ die Beziehungen

$$C_1 C_\varrho(f) - C_\varrho C_1(f) = \sum_{\nu=1}^{r} \varepsilon_\nu^{(\varrho)} C_\nu(f), \qquad \varrho = 1, 2, \cdots, r$$

so besitzt die Determinante

$$\left| \varepsilon_\nu^{(\varrho)} - \left| \begin{matrix} \varrho \\ \nu \end{matrix} \right| \omega \right| \qquad \varrho, \nu = 1, 2, \cdots, r$$

nur Elementarteiler erster Ordnung.

Der zweite Hilfssatz betrifft die Beziehungen, die zwischen vertauschbaren regulären Transf. zweiter Art statt haben.

Nehmen wir an, die beiden regulären inf. Transf. zweiter Art $C_1(f)$ und $C_2(f)$ seien vertauschbar. Wir wollen der Einfachheit wegen voraussetzen $C_1(f)$ sei in der Normalform

$$C_1(f) = \sum_{\nu=1}^{n'} \sum_{h=1}^{m_\nu} \omega_\nu X_h^{(\nu)} \frac{\partial f}{\partial X_h^{(\nu)}}$$

vorgelegt, die in § 3, Nr. 2 eingeführt worden ist. Es sei sodann

$$C_2(f) = \sum_{\nu=1}^{h'} \sum_{\varkappa=1}^{n'} \sum_{h=1}^{m_\nu} \sum_{g=1}^{m_\varkappa} c_{gh}^{(\varkappa\nu)} X_h^{(\nu)} \frac{\partial f}{\partial X_g^{(\varkappa)}}.$$

Aus $C_1 C_2(f) - C_2 C_1(f) = 0$ folgt, wie man sich leicht überzeugt,

$$c_{gh}^{(\nu\varkappa)} = 0 \quad \text{wenn} \quad \varkappa \neq \nu.$$

Es ist daher

$$C_2(f) = \sum_{\nu=1}^{n'} \sum_{h=1}^{m_\nu} \sum_{g=1}^{m_\nu} c_{gh}^{(\nu)} X_h^{(\nu)} \frac{\partial f}{\partial X_g^{(\nu)}}.$$

Die charakteristische Determinante der inf. Transf. $C_2(f)$ ist das Produkt der n' Determinanten

$$\left| c_{gh}^{(\nu)} - \left| \begin{matrix} g \\ h \end{matrix} \right| \omega \right|. \qquad g, h = 1, 2, \cdots, m_\nu$$

Alle diese Determinanten dürfen nur Elementarteiler erster Ordnung besitzen und nur für ganzzahlige Werte von ω verschwinden, weil dies für ihr Produkt gilt.

Eine lineare Substitution, die an Stelle der Variabeln

$$X_1^{(\nu)} X_2^{(\nu)} \ldots X_{m_\nu}^{(\nu)}$$

die Variabeln

$$Y_1^{(\nu)} Y_2^{(\nu)} \ldots Y_{m_\nu}^{(\nu)}$$

einführt, transformiert die inf. Transf.

$$\omega_\nu \sum_{k=1}^{m_\nu} X_k^{(\nu)} \frac{\partial f}{\partial X_k^{(\nu)}}$$

in sich selbst und sie kann der Art gewählt werden, daß sie die inf. Transf.

$$\sum_{g=1}^{m_\nu} \sum_{k=1}^{m_\nu} c_k^{(\nu)} X_k^{(\nu)} \frac{\partial f}{\partial X_g^{(\nu)}}$$

in die Normalform

$$\sum_{k=1}^{m_\nu} \omega'_{\nu k} Y_k^{(\nu)} \frac{\partial f}{\partial Y_k^{(\nu)}}$$

transformiert. Es ergibt sich somit

$$C_1(f) = \sum_{\nu=1}^{n'} \sum_{k=1}^{m_\nu} \omega_\nu Y_k^{(\nu)} \frac{\partial f}{\partial Y_k^{(\nu)}}, \qquad C_2(f) = \sum_{\nu=1}^{n'} \sum_{k=1}^{m_\nu} \omega'_{\nu k} Y_k^{(\nu)} \frac{\partial f}{\partial Y_k^{(\nu)}}.$$

Unter den Größen $\omega'_{\nu k}$ können beliebig viele einander gleiche vorkommen.

Auf Grund des eben Bewiesenen überzeugt man sich leicht von der Richtigkeit des Satzes:

s reguläre inf. Transf. zweiter Art $C_1(f)$, $C_2(f) \cdots C_s(f)$, die paarweise vertauschbar sind, lassen sich stets der Art transformieren, daß

$$(1) \qquad C_\sigma(f) = \sum_{\nu=1}^{p} \sum_{k=1}^{q_\nu} \omega_\nu^{(\sigma)} X_k^{(\nu)} \frac{\partial f}{\partial X_k^{(\nu)}}. \qquad \sigma = 1, 2, \cdots, s$$

Die hier auftretende Zahl p ist durch die Bedingung charakterisiert, daß nicht gleichzeitig die Gleichungen

$$\omega_\nu^{(1)} = \omega_\varkappa^{(1)}, \quad \omega_\nu^{(2)} = \omega_\varkappa^{(2)} \cdots \omega_\nu^{(s)} = \omega_\varkappa^{(s)}$$

bestehen dürfen, wo ν, $\varkappa$ zwei Zahlen aus der Reihe $1, 2, \cdots, p$ sind.

Um nun den dritten Hilfssatz abzuleiten, gehen wir von der Annahme aus, es seien s reguläre inf. Transf. zweiter Art $C_1(f), C_2(f) \cdots C_s(f)$ und $r - s$ reguläre inf. Transf. erster Art $C_{s+1}(f)$, $C_{s+2}(f) \cdots C_\mu(f)$ vorgelegt. Diese r inf. Transf. seien unter einander linear unabhängig, es bestehe also keine Relation der Form

$$\gamma_1 C_1(f) + \gamma_2 C_2(f) + \cdots + \gamma_r C_r(f) = 0,$$

wo die Koeffizienten $\gamma_1 \gamma_2 \cdots$ Konstante sind.

Die inf. Transf. zweiter Art $C_1(f)$, $C_2(f) \cdots C_s(f)$ seien unter einander und mit den inf. Transf. erster Art $C_{s+1}(f)$, $C_{s+2}(f) \cdots C_\mu(f)$ vertauschbar. Endlich nehmen wir an, es bestehen Relationen der Form

$$C_\lambda C_\mu(f) - C_\mu C_\lambda(f) = \sum_{\varrho=1}^{r} \varepsilon_\varrho^{\lambda\mu} C_\varrho(f), \qquad \lambda, \mu = s+1, s+2, \cdots, r$$

o die $\varepsilon_\varrho^{\lambda\mu}$ Konstante bedeuten.

Ich behaupte nun: es ist notwendig

$$\varepsilon_1^{\lambda\mu} = 0, \quad \varepsilon_2^{\lambda\mu} = 0 \cdots \varepsilon_s^{\lambda\mu} = 0 \quad \text{für} \quad \lambda, \mu = s+1, s+2, \cdots, r.$$

um Beweis dürfen wir voraussetzen, die s regulären inf. Transf. zweiter rt $C_1(f), C_2(f) \cdots C_s(f)$ seien in der Normalform (1) vorgelegt. Für ie regulären inf. Transf. erster Art $C_{s+1}(f), C_{s+2}(f) \cdots C_\mu(f)$ gelten alsdann usdrücke der Form

$$C_\lambda(f) = \sum_{\nu=1}^{p} \sum_{g=1}^{q_\nu} \sum_{h=1}^{q_\nu} c_{gh}^{(\lambda\nu)} X_h^{(\nu)} \frac{\partial f}{\partial X_g^{(\nu)}}. \qquad \lambda = s+1, s+2, \cdots, \mu$$

ie charakteristische Determinante der inf. Transf. $C_\lambda(f)$ ist das Produkt er p Determinanten

$$\left| c_{gh}^{(\lambda\nu)} - \left|\frac{g}{h}\right| \omega \right| \qquad g, h = 1, 2, \cdots, q_\nu$$

Keine dieser Determinanten darf für einen von Null verschiedenen Wert von ω verschwinden, weil dies für ihr Produkt gilt. Indem man zum Ausdruck bringt, daß für jede dieser Determinanten der Koeffizient der zweithöchsten Potenz von ω, die auftritt, verschwindet, erhält man die Gleichungen

$$\sum_{h=1}^{q_\nu} c_{\lambda h}^{(\lambda\nu)} = 0. \qquad \nu = 1, 2, \cdots, p; \quad \lambda = s+1, s+2, \cdots, r$$

Nun folgt aus den Gleichungen (2) bei Berücksichtigung von (1) und (3):

$$\sum_{h=1}^{q_\nu} \left(c_{gj}^{(\lambda\nu)} c_{jh}^{(\mu\nu)} - c_{gj}^{(\mu\nu)} c_{jh}^{(\lambda\nu)} \right) = \left|\frac{g}{h}\right| \sum_{\varrho=1}^{s} \varepsilon_\varrho^{\lambda\mu} \omega_\nu^{(\varrho)} + \sum_{\varrho=s+1}^{r} \varepsilon_\varrho^{\lambda\mu} c_{gh}^{(\varrho\nu)},$$

$$g, h = 1, 2, \cdots, q_\nu; \quad \nu = 1, 2, \cdots, p; \quad \lambda, \mu = s+1, s+2, \cdots, r.$$

Setzen wir hier $g = h$ und summiren nach h von 1 bis q_ν, so verschwindet die linke Seite der entstehenden Gleichungen; auf der rechten fallen wegen (4) die letzten $r - s$ Summen weg und es ergibt sich

$$\varepsilon_1^{\lambda\mu} \omega_\nu^{(1)} + \varepsilon_2^{\lambda\mu} \omega_\nu^{(2)} + \cdots + \varepsilon_s^{\lambda\mu} \omega_\nu^{(s)} = 0. \qquad \nu = 1, 2, \cdots, p$$

Da nach Voraussetzung die s inf. Transf. $C_1(f), C_2(f) \cdots C_s(f)$ unter einander linear unabhängig sind, so folgt aus den vorstehenden Gleichungen die Richtigkeit der aufgestellten Behauptung.

Unter Benützung der Terminologie, die in der Lieschen Gruppentheorie üblich ist (vergl. § 9), können wir diesen Hülfssatz in der Form aussprechen:

Erzeugen die s regulären inf. Transf. zweiter Art $C_1(f), C_2(f), \cdots, C_s(f)$ und die $r-s$ regulären inf. Transf. erster Art $C_{s+1}(f), C_{s+2}(f), \cdots, C_r(f)$ zusammengenommen eine Gruppe der Ordnung r, und ist überdies eine jede der s ersteren Transf. mit einer jeden der $r-s$ übrigen Transf. vertauschbar, so erzeugen die $r-s$ inf. Transf. erster Art $C_{s+1}(f)$, $C_{s+2}(f) \cdots C_r(f)$ eine Gruppe der Ordnung $r-s$.

§ 7.

Über Tripelsysteme.

Es seien 3 inf. Transf. $A(f), B(f), C(f)$ vorgelegt, zwischen denen die Identitäten bestehen

$$(1) \qquad \begin{aligned} AB(f) - BA(f) &= -2B(f), \\ AC(f) - CA(f) &= 2C(f), \\ CB(f) - BC(f) &= A(f). \end{aligned}$$

Ein derartiges System von 3 inf. Transf. bezeichne ich als Tripel*). Die inf. Transf. $B(f)$ und $C(f)$ sind notwendig regulär von der ersten Art (§ 5); es läßt sich unschwer beweisen, daß $A(f)$ regulär von der zweiten Art ist, doch gehe ich hierauf nicht ein, weil dies für das folgende nicht nothwendig ist**). Dagegen muß hervorgehoben werden, daß jede reguläre inf. Transf. erster Art $C(f)$ durch Hinzufügung einer regulären inf. Transf. erster Art $B(f)$ und einer regulären inf. Transf. zweiter Art $A(f)$ zu einem Tripel ergänzt werden kann. Um dies zu beweisen, gehen wir aus von der in § 3, Nr. 1 benützten Normalform

$$C(f) = \sum_{k=1}^{m} \left[X_{1k} \frac{\partial f}{\partial X_{2k}} + 2 X_{2k} \frac{\partial f}{\partial X_{3k}} \cdots (e_k - 1) X_{e_k - 1\,k} \frac{\partial f}{\partial X_{e_k k}} \right].$$

Man überzeugt sich leicht, daß die Identitäten erfüllt sind, wenn man setzt

---

*) Ein derartiges Tripel bilden die in der Theorie der Binärformen auftretenden Differentialgleichungen

$$\sum_{k=1}^{m} \left[D_{11}^{(k)}(f) - D_{22}^{(k)}(f) \right], \quad \sum_{k=1}^{m} D_{12}^{(k)}(f), \quad \sum_{k=1}^{m} D_{21}^{(k)}(f).$$

**) Vergl. meine Abhandlung Münchener Berichte 1899, S. 168.

$$Bf = \sum_{i=1}^{n} \varepsilon_i - 1\ X_{i1} \frac{\partial f}{\partial X_{i1}} + \varepsilon_i - 2\ X_{i1} \frac{\partial f}{\partial X_{i2}} + \cdots + X_{i1} \frac{\partial f}{\partial X_{i\,\varepsilon_i - 1}},$$

$$Af = \sum_{i=1}^{n} \varepsilon_i - 1\ X_{i1} \frac{\partial f}{\partial X_{i1}} + \varepsilon_i - 3\ X_{i1} \frac{\partial f}{\partial X_{i2}} + \cdots + \varepsilon_i - 1\ X_{i1} \frac{\partial f}{\partial X_{i\,\varepsilon_i}}.$$

Es sei nun f eine ganze Funktion, die der partiellen Differentialgleichung $Af = kf$ genügt. Da die inf. Transf. Bf und Cf regulär von der ersten Art sind, so gibt es Zahlen λ, μ der Art, daß $B^{\lambda}f = 0$, $C^{\mu}f = 0$, während

$$Bf,\ B^2f \cdots B^{\lambda-1}f \quad \text{und} \quad Cf,\ C^2f \cdots C^{\mu-1}f$$

nicht verschwinden.

Aus (1) folgt:

$$ABf = (k-2)\,Bf, \qquad ACf = (k+2)\,Cf. \tag{2}$$

Es gelten ferner die beiden folgenden Formeln:

$$C^{\nu}Bf - BC^{\nu}f = \nu(\nu+k-1)\,C^{\nu-1}f \tag{3}$$

und für $\nu \geq \varkappa$

$$C^{\nu}B^{\varkappa}f - B^{\varkappa}C^{\nu}f = \sum_{\sigma=1}^{\varkappa} \gamma_{\sigma}(\nu, \varkappa, k)\,B^{\varkappa-\sigma}C^{\nu-\sigma}f, \tag{4}$$

wo

$$\gamma_{\sigma}(\nu, \varkappa, k) = (\sigma!)^2\,(\nu)_{\sigma}\,(\varkappa)_{\sigma}\,(\nu-\varkappa+k)_{\sigma}.$$

Die Formel (3) fällt für $\nu = 1$ wegen $Af = kf$ mit der letzten der Formeln (1) zusammen. Ihre allgemeine Giltigkeit beweisen wir durch den Schluß von n auf $n+1$. Angenommen es sei bereits bewiesen, daß

$$C^{\nu-1}Bf - BC^{\nu-1}f = (\nu-1)(\nu+k-2)\,C^{\nu-2}f.$$

Wir lassen an Stelle von f Cf treten und haben dann wegen (2) gleichzeitig k durch $k+2$ zu ersetzen. Es ergibt sich

$$C^{\nu-1}BCf - BC^{\nu}f = (\nu-1)(\nu+k)\,C^{\nu-1}f.$$

Nun ist

$$\begin{aligned} C^{\nu}Bf - BC^{\nu}f &= C^{\nu-1}(CB-BC)f + C^{\nu-1}BCf - BC^{\nu}f \\ &= C^{\nu-1}Af + (\nu-1)(\nu+k)\,C^{\nu-1}f \\ &= \nu(\nu+k-1)\,C^{\nu-1}f, \end{aligned}$$

w. z. b. w.

Die Formel (4) fällt für $\varkappa = 1$ mit der Formel (3) zusammen. Ihre allgemeine Giltigkeit beweisen wir wieder durch den Schluß von n auf $n+1$. Angenommen es sei bereits bewiesen, daß

$$C^{\nu}B^{\varkappa-1}f - B^{\varkappa-1}C^{\nu}f = \sum_{\sigma=1}^{\varkappa-1} \gamma_{\sigma}(\nu, \varkappa-1, k)\,B^{\varkappa-1-\sigma}C^{\nu-\sigma}f.$$

Wir lassen an Stelle von f $B(f)$ treten und haben dann wegen (2) gleichzeitig k durch $k-2$ zu ersetzen. Es ergibt sich bei Berücksichtigung von (3)

$$C^\nu B^\varkappa(f) - B^{\varkappa-1} C^\nu B(f) = \sum_{\sigma=1}^{\varkappa-1} \gamma_\sigma(\nu, \varkappa-1, k-2)\, B^{\varkappa-1-\sigma} C^{\nu-\sigma}(f)$$

$$= \sum_{\sigma=1}^{\varkappa-1} \gamma_\sigma(\nu, \varkappa-1, k-2)\, [B^{\varkappa-1-\sigma}(C^{\nu-\sigma}B - BC^{\nu-\sigma}(f) + B^{\varkappa-\sigma}C^{\nu-\sigma}(f)]$$

$$= \sum_{\sigma=1}^{\varkappa-1} \gamma_\sigma(\nu, \varkappa-1, k-2)\, [(\nu-\sigma)(\nu-\sigma+k-1)\, B^{\varkappa-1-\sigma} C^{\nu-\sigma-1}(f) + B^{\varkappa-\sigma} C^{\nu-\sigma}(f)]$$

$$= \gamma_1(\nu, \varkappa-1, k-2)\, B^{\varkappa-1} C^{\nu-1}(f)$$

$$+ \sum_{\sigma=2}^{\varkappa-1} [\gamma_\sigma(\nu, \varkappa-1, k-2) + (\nu-\sigma+1)(\nu+k-\sigma)\gamma_{\sigma-1}(\nu, \varkappa-1, k-2)]$$
$$B^{\varkappa-\sigma} C^{\nu-\sigma}(f) + \gamma_{\varkappa-1}(\nu, \varkappa-1, k-2)(\nu-\varkappa+1)(\nu+k-\varkappa) C^{\nu-\varkappa}(f).$$

Nun ist

$$C^\nu B^\varkappa(f) - B^\varkappa C^\nu(f)$$
$$= [C^\nu B^\varkappa(f) - B^{\varkappa-1} C^\nu B(f)] + B^{\varkappa-1}[C^\nu B - BC^\nu](f)$$
$$= [\gamma_1(\nu, \varkappa-1, k-2) + (\nu+k-1)]\, B^{\varkappa-1} C^{\nu-1}(f) + \sum_{\sigma=2}^{\varkappa-1} [\gamma_\sigma(\nu, \varkappa-1, k-2)$$
$$+ (\nu-\sigma+1)(\nu+k-\sigma)\gamma_{\sigma-1}(\nu, \varkappa-1, k-2)]\, B^{\varkappa-\sigma} C^{\nu-\sigma}(f)$$
$$+ (\nu-\varkappa+1)(\nu+k-\varkappa)\gamma_{\varkappa-1}(\nu, \varkappa-1, k-2)\, C^{\nu-k}(f).$$

Es ergeben sich also zur Bestimmung der Koeffizienten γ die Rekursionsformeln

$$\gamma_1(\nu, \varkappa, k) = \gamma_1(\nu, \varkappa-1, k-2) + \nu(\nu+k-1),$$

$$\gamma_\sigma(\nu, \varkappa, k) = \gamma_\sigma(\nu, \varkappa-1, k-2) + (\nu-\sigma+1)(\nu+k-\sigma)\gamma_{\sigma-1}(\nu, \varkappa-1, k-2), \quad \sigma = 2, 3, \cdots, \varkappa-1$$

$$\gamma_\varkappa(\nu, \varkappa, k) = (\nu-\varkappa+1)(\nu+k-\varkappa)\gamma_{\varkappa-1}(\nu, \varkappa-1, k-2).$$

Man überzeugt sich leicht, daß die unter (4) angegebenen Werte des Koeffizienten γ diesen Rekursionsformeln genügen. Damit ist auch die Formel (4) bewiesen.

Wir machen nunmehr die Annahme, die Variabeln $x_1 x_2 \cdots x_n$ seien entweder unter einander unabhängig, oder die Relationen, denen sie genügen, seien der inf. Transf. $C(f)$ gegenüber invariant. Dann bestehen gleichzeitig mit der nach Voraussetzung geltenden Gleichung $C^\mu(f) = 0$ die Gleichungen.

$$C^{\mu+1}(f) = 0, \quad C^{\mu+2}(f) = 0, \quad C^{\mu+3}(f) = 0 \quad \text{u. s. w.}$$

Setzen wir nun in der Formel (4) $\varkappa = \lambda$ und $\nu = \lambda + \mu - 1$, so verwinden die beiden Glieder links und die $\lambda - 1$ ersten Glieder rechts. nach Voraussetzung $C^{\mu-1}(f) \neq 0$, so ist

$$\gamma_\lambda(\lambda + \mu - 1, \lambda, k) = (\lambda!)^2 (\lambda + \mu - 1)_\lambda (\mu - 1 + k)_\lambda = 0.$$

muß also eine der Zahlen

$$\mu - 1 + k, \quad \mu - 2 + k \cdots \mu - \lambda + k$$

ich Null sein; es ist also

$$1 \leqq \mu + k \leqq \lambda.$$

mnach ist

$$\mu + k \neq 0.$$

§ 8.

ber das Verhalten ganzer rationaler Funktionen gegenüber einem Tripelsystem.

Auf den Entwicklungen des vorigen Paragraphen beruht der Beweis eier Hilfssätze, die für den beabsichtigten Endlichkeitsbeweis von ichtigkeit sind.

Halten wir an der Annahme fest, daß die Variabeln x entweder ter einander unabhängig sind oder nur Relationen genügen, die den . Transf. $C(f)$ gegenüber invariant sind. Halten wir ferner an der nahme fest, die ganze Function f genüge den Differentialgleichungen $f) = kf$ und $C^\mu(f) = 0$, dagegen sei $C^{\mu-1}(f) \neq 0$.

Setzen wir überdies voraus, es sei $\mu > 1$.

Unter diesen Annahmen genügt die Funktion $f' = BC(f)$ ebenfalls n Differentialgleichungen

$$A(f') = kf' \quad \text{und} \quad C^\mu(f') = 0$$

d es ist ebenfalls

$$C^{\mu-1}(f') \neq 0.$$

Es ist nämlich zunächst

$$\begin{aligned} A(f') &= (AB - BA)\, C(f) + B(AC - CA)\,(f) + BCA(f) \\ &= -2BC(f) + 2BC(f) + kBC(f) = kf'. \end{aligned}$$

setzt man sodann in der Gleichung (3) des vorigen Paragraphen f rch $C(f)$ und dementsprechend k durch $k + 2$, so ergibt sich

$$C^\nu BC(f) - BC^{\nu+1}(f) = \nu(\nu + k + 1)\, C^\nu(f),$$

$= \mu$ gibt

$$C^\mu BC(f) = C^\mu(f') = \mu(\mu + k + 1)\, C^\mu(f) = 0,$$

$\nu = \mu - 1$ gibt

$$C^{\mu-1}BC(f) = C^{\mu-1}(f') = (\mu-1)(\mu+k)\,C^{\mu-1}(f),$$

also

$$C^{\mu-1}(f') \neq 0,$$

(vergl. den Schluß des vorigen Paragraphen).

Wir wollen nunmehr annehmen, die Variabeln x seien entweder unter einander unabhängig oder sie genügen nur Relationen, die den 3 inf. Transf. $A(f)$, $B(f)$, $C(f)$ gegenüber invariant sind. Wir nehmen ferner an, f genüge den 3 Differentialgleichungen

$$A(f) = kf, \quad B^{(\lambda)}(f) = 0, \quad C^{\mu}(f) = 0,$$

dagegen sei

$$B^{\lambda-1}(f) \neq 0 \quad \text{und} \quad C^{\mu-1}(f) \neq 0.$$

Unter diesen Voraussetzungen kann man die Beziehung zwischen den Zahlen λ, μ, k noch genauer bestimmen, als dies am Schluß des vorigen Paragraphen geschehen ist.

Zu diesem Zweck bemerken wir, daß die Identitäten (1) des vorigen Paragraphen bestehen bleiben, wenn man $B(f)$ und $C(f)$ vertauscht und $A(f)$ durch $-A(f)$ ersetzt. Gleichzeitig hat man natürlich auch λ und μ zu vertauschen und k durch $-k$ zu ersetzen. Aus den Ungleichungen

$$1 \leqq \mu + k \leqq \lambda$$

ergeben sich bei den angegebenen Vertauschungen die Ungleichungen

$$1 \leqq \lambda - k \leqq \mu \quad \text{oder} \quad 1 + k \leqq \lambda \leqq \mu + k.$$

Der Vergleich beider Ungleichungen ergibt

$$\lambda = \mu + k.$$

Von besonderer Wichtigkeit ist ein Spezialfall.

Angenommen die ganze Funktion genüge zweien der 3 Differentialgleichungen

$$A(f) = 0, \quad B(f) = 0, \quad C(f) = 0,$$

es sei also entweder $\lambda = \mu = 1$ oder $k = 0$ und eine der beiden Zahlen λ, μ gleich eins. Dann ist im ersten Fall notwendig $k = 0$, im zweiten Fall sind *beide* Zahlen λ, μ gleich eins, d. h. genügt eine ganze Funktion zwei Differentialgleichungen eines Tripels, so genügt sie auch der dritten.

II. Sätze aus der Theorie der kontinuierlichen Gruppen.

§ 9.

Reguläre Gruppen.*)

Es seien r lineare inf. Transf.

$$C_\varrho(f) = \sum_{\lambda=1}^{n} \sum_{\mu=1}^{n} c_{\lambda\mu}^{(\varrho)} x_\mu \frac{\partial f}{\partial x_\lambda} \qquad \varrho = 1, 2, \cdots r$$

vorgelegt. Wir setzen voraus:

1) Die r inf. Transf. $C_\varrho(f)$ sind linear unabhängig, d. h. sie genügen keiner Relation der Form

$$\gamma_1 C_1(f) + \gamma_2 C_2(f) + \cdots + \gamma_r C_r(f) = 0$$

mit *konstanten* Koeffizienten γ.

Dagegen bleibt die Möglichkeit offen, daß lineare Relationen bestehen, bei denen als Koeffizienten Funktionen der Variabeln x auftreten. In diesem Fall ist eine Anzahl, etwa $r - r'$, der Differentialgleichungen $C_\varrho(f) = 0$ eine Folge der übrigen. Wir nehmen an es sei $r' < n$.

Wir setzen ferner voraus, daß nicht alle rationalen Funktionen, die den r Differentialgleichungen $C_\varrho(f) = 0$ genügen, noch weiteren Differentialgleichungen derselben Form genügen.

Da jede Funktion, die den beiden Differentialgleichungen $C_\varrho(f) = 0$ und $C_\sigma(f) = 0$ genügt, auch der Differentialgleichung

$$C_\varrho C_\sigma(f) - C_\sigma C_\varrho(f) = \sum_{\lambda=1}^{n} \sum_{\mu=1}^{n} \sum_{\nu=1}^{n} \left(c_{\lambda\nu}^{(\varrho)} c_{\nu\mu}^{(\sigma)} - c_{\lambda\nu}^{(\sigma)} c_{\nu\mu}^{(\varrho)} \right) X_\mu \frac{\partial f}{\partial x_\lambda} = 0$$

genügt, so ist hierzu erforderlich:

2) Zwischen den inf. Transf. $C_\varrho(f)$ bestehen Relationen der Form

$$C_\varrho C_\sigma(f) - C_\sigma C_\varrho(f) = \sum_{\tau=1}^{r} \varepsilon_\tau^{\varrho\sigma} C_\tau(f) \qquad \varrho, \sigma = 1, 2 \cdots r$$

wo die $\varepsilon_\tau^{\varrho\sigma}$ Konstante bedeuten.

Sind diese beiden Bedingungen erfüllt, so erzeugen die r inf. Transf. $C_\varrho(f)$ eine continuierliche lineare Gruppe G, die als r-gliedrig oder als

*) Bezüglich der in den §§ 9 und 10 benutzten Sätze aus der Theorie der endlichen kontinuierlichen Gruppen s. Lie-Engel, Theorie der Transformations-Gruppen Bd. 1, Kap. 4, 9, 12, 13, 15, 20. Vergl. auch meine schon genannte Abhandlung in den Münchener Berichten 1888.

Gruppe der Ordnung r bezeichnet wird. Die Gruppe „enthält" jede inf. Transf.

$$e_1 C_1(f) + e_2 C_2(f) + \cdots + e_r C_r(f)$$

wo $e_1\, e_2 \cdots e_r$ irgend welche Konstante bedeuten.

Aus unseren Voraussetzungen ergibt sich ferner:

3) Enthält die Gruppe G eine irreguläre inf. Transf., so enthält sie auch alle die regulären inf. Transf., aus denen sich dieselbe zusammensetzen läßt (s. § 1).

Denn wäre das nicht der Fall, so müsste eine jede rationale Funktion, die den r partiellen Differentialgleichungen $C_\varrho(f) = 0$ genügt, noch weiteren Differentialgleichungen derselben Form genügen (§ 2).

Aus (3) folgt: Indem man nötigenfalls die inf. Transf. $C_\varrho(f)$ durch geeignet gewählte lineare Kombinationen derselben ersetzt, kann man bewirken, daß eine jede der erzeugenden inf. Transf. regulär ist.

Zwischen drei inf. Transf. $C_\varrho(f)$ $C_\sigma(f)$ $C_\tau(f)$ besteht die Jacobische Identität. Sie läßt sich bei Einführung der abkürzenden Bezeichnung $C_\varrho C_\sigma(f) - C_\sigma C_\varrho(f) = (C_\varrho C_\sigma)$ in der Form darstellen

$$(C_\varrho (C_\sigma C_\tau)) + (C_\sigma (C_\tau C_\varrho)) + (C_\tau (C_\varrho C_\sigma)) = 0\,.$$

Aus denselben ergibt sich die Berücksichtigung von (1)

$$\sum_{\nu=1}^{r} \left(\varepsilon_\lambda^{\varrho\nu}\, \varepsilon_\nu^{\sigma\tau} + \varepsilon_\lambda^{\sigma\nu}\, \varepsilon_\nu^{\tau\varrho} + \varepsilon_\lambda^{\tau\nu}\, \varepsilon_\nu^{\varrho\sigma} \right) = 0 \tag{4}$$

$$\text{für } \varrho, \sigma, \tau, \lambda = 1, 2, \cdots r\,.$$

Es ist ferner offenbar

$$\varepsilon_\nu^{\varrho\varrho} = 0 \quad \text{und} \quad \varepsilon_\nu^{\sigma\varrho} = -\,\varepsilon_\nu^{\varrho\sigma}.$$

Ist die Bedingung (3) erfüllt, so lassen sich die Koeffizienten der allgemeinen Substitution A der Gruppe G als *rationale* Funktionen von r Parametern darstellen.

Eine jede inf. Transf. $C_\varrho(f)$ erzeugt nämlich eine eingliedrige Gruppe und da im gegebenen Fall $C_\varrho(f)$ als regulär vorausgesetzt werden darf, so lassen sich die Koeffizienten der allgemeinen Substitution S_ϱ dieser Gruppe als rationale Funktionen eines Parameters darstellen (§ 2).

Die allgemeine Substitution A der Gruppe G läßt sich als Produkt der r Substitutionen $S_1\, S_2 \cdots S_r$ darstellen.

Eine lineare Gruppe, der die Eigenschaft (3) zukommt, bezeichne ich als regulär.

Jede Funktion, die durch die allgemeine Substitution der Gruppe G in sich selbst transformiert wird, wird als Invariante der Gruppe G bezeichnet. Jede Invariante genügt den r partiellen Differentialgleichungen $C_\varrho(f) = 0$ und vice versa.

Wenn sich sämtliche Invarianten einer linearen continuierlichen Gruppe als Funktionen einer gewissen Anzahl rationaler Invarianten darstellen lassen, so ist die Gruppe regulär.

Umgekehrt gilt der Satz:

Wenn eine lineare continuierliche Gruppe durch *algebraische* Relationen zwischen den Substitutionskoeffizienten charakterisiert ist, so lassen sich alle Invarianten der Gruppe als Funktionen einer gewissen Anzahl rationaler Invarianten darstellen.

Sei nämlich die allgemeine Substitution der Gruppe G definiert durch die Gleichungen

$$(A) \qquad y_\lambda = \sum_{\mu=1}^{n} a_{\lambda\mu} x_\mu \qquad \lambda = 1, 2, \cdots n.$$

Die Substitutionskoeffizienten $a_{\lambda\mu}$ genügen einem System algebraischer Gleichungen

$$(F) \qquad F_1 = 0 \; F_2 = 0 \cdots.$$

Die Bedingungsgleichungen zwischen den Größen x und y, zu denen man durch Elimination der Größen $a_{\lambda\mu}$ aus den Gleichungen (A) und (F) gelangt, lassen sich — wie Christoffel nachgewiesen hat*) — vollständig durch ein System von Gleichungen der Form

$$\Pi(y_1\, y_2 \cdots y_n) = \Pi(x_1\, x_2 \cdots x_n)$$

ausdrücken, wo Π eine rationale Funktion der angezeigten Argumente ist. Jede dieser Funktionen Π ist offenbar Invariante, und es kann keine von diesen Funktionen unabhängige Invariante geben.

§ 10.

Untergruppen.

s linear unabhängige in der Gruppe G enthaltene inf. Transf.

$$K_\sigma(f) = \sum_{\varrho=1}^{r} e_{\sigma r} C_\varrho(f) \qquad \sigma = 1, 2, \cdots s$$

erzeugen eine Untergruppe Γ der Gruppe G, wenn Relationen der Form

$$(K_\sigma K_\tau) = \sum_{\nu=1}^{s} \delta_\nu^{\sigma\tau} K_\nu(f) \qquad \sigma, \tau = 1, 2, \cdots s$$

bestehen.

Die Untergruppe Γ ist in der Gesamtgruppe G ausgezeichnet, wenn ausserdem Relationen der Form

*) Math. Annalen Bd. 19, S. 280.

$$(C_\varrho K_\sigma) = \sum_{\nu=1}^{s} \vartheta_\nu^{\varrho\sigma} K_\nu(f) \qquad \varrho = 1, 2, \cdots r;\ \sigma = 1, 2, \cdots s$$

bestehen.

Sofern sich nicht jede in der Gruppe enthaltene inf. Transf. als lineare Funktion der inf. Transf. $(C_\varrho C_\sigma)$ $(\varrho, \sigma = 1, 2, \cdots r)$ darstellen läßt, erzeugen diese eine ausgezeichnete Untergruppe — die Hauptuntergruppe.

Die allgemeine Substitution T der ausgezeichneten Untergruppe Γ wird durch die allgemeine Substitution A der Gruppe G in eine Substitution T' transformiert, die ebenfalls der Untergruppe Γ angehört. Die Substitutionen T und T' sind im allgemeinen verschieden: sie entsprechen verschiedenen Wertsystemen der verfügbaren Parameter. T wird nur dann durch A in sich selbst transformiert, wenn alle Konstanten $\vartheta_\nu^{\varrho\sigma}$ verschwinden, wenn also

$$(C^\varrho K_\sigma) = 0 \quad \text{für} \quad \varrho = 1, 2, \cdots r;\ \sigma = 1, 2, \cdots s.$$

In diesem Fall heißt die Untergruppe Γ mit der Hauptgruppe G vertauschbar.

Die Gruppe G heißt zusammengesetzt oder einfach, je nachdem sie eine ausgezeichnete Untergruppe besitzt oder nicht.

Jede in der Gruppe enthaltene inf. Transf. $K(f)$ läßt sich in der Form

$$K(f) + e_1 C_1(f) + e_2 C_2(f) + \cdots + e_r C_r(f)$$

darstellen. Die inf. Transf., die eine Untergruppe Γ der Ordnung s erzeugen, kann man daher auch durch ein System von $r - s$ unter einander unabhängigen linearen Gleichungen

$$U_\lambda = u_{\lambda 1} e_1 + u_{\lambda 2} e_2 + \cdots + u_{\lambda r} e_r = 0 \qquad \lambda = 1, 2, \cdots r - s$$

definieren. Nehmen wir insbesondere an, die Untergruppe Γ sei ausgezeichnet, dann gehört mit $K(f)$ auch die inf. Transf.

$$(C_\varrho K) = \sum_{\sigma=1}^{r} e_\sigma (C_\varrho C_\sigma) = \sum_{\sigma=1}^{r} \sum_{k=1}^{r} e_\sigma \varepsilon_k^{\varrho\sigma} C_k(f) \qquad \varrho = 1, 2, \cdots r$$

der Untergruppe Γ an. Die Gleichungen $U_\lambda = 0$ müssen also in Geltung bleiben, wenn man für $k = 1, 2, \cdots r$ e_k durch $\sum_{\sigma=1}^{r} \varepsilon_k^{\varrho\sigma} e_\sigma$ ersetzt. Führen wir die r inf. Transf. ein

$$E_\varrho(f) = \sum_{\sigma=1}^{r} \sum_{\varkappa=1}^{r} \varepsilon_\varkappa^{\varrho\sigma} e_\sigma \frac{\partial f}{\partial e_\varkappa} \text{*)} \qquad \varrho = 1, 2, \cdots r$$

*) Die inf. Transf. $E_\varrho(f)$ erzeugen die adjungierte Gruppe, s. Lie-Engel, Transformationsgruppen Bd. 1, Kap. 16.

so können wir das Resultat der in U_λ auszuführenden Substitution mit $E_\varrho(U_\lambda)$ bezeichnen. Da die Gleichungen $E_\varrho(U_\lambda) = 0$ eine Folge der Gleichungen $U_\lambda = 0$ sind, so bestehen Gleichungen der Form

$$E_\varrho(U_\lambda) = \sum_{\varkappa=1}^{r-s} b_{\varrho\lambda\varkappa} U_\varkappa \qquad \varrho = 1, 2, \cdots r; \quad \lambda = 1, 2, \cdots r - s$$

wo die $b_{\varrho\lambda\varkappa}$ Konstante bedeuten.

Umgekehrt definieren die Gleichungen $U_\lambda = 0$ eine ausgezeichnete Untergruppe, wenn ein derartiges Gleichungssystem besteht.

§ 11.

Eine reguläre zusammengesetzte Gruppe besitzt stets reguläre ausgezeichnete Untergruppen.

In dem Fall, daß die inf. Transf. $C_1(f)$, $C_2(f)$, $\cdots C_r(f)$, die die Gruppe G erzeugen, paarweise vertauschbar sind, ist der Satz einleuchtend. Denn alsdann erzeugen irgend welche s in der Gruppe enthaltene reguläre inf. Transf. eine ausgezeichnete Untergruppe der Ordnung s.

Nehmen wir nunmehr an, die erzeugenden inf. Transf. der Gruppe G seien zwar nicht alle unter einander vertauschbar, es seien aber genau s unter einander linear unabhängige inf. Transf. in der Gruppe enthalten, die mit allen inf. Transf. der Gruppe vertauschbar sind. Dieselben erzeugen eine ausgezeichnete Untergruppe Γ der Ordnung s.

Wenn eine dieser inf. Transf. nicht regulär ist, so gehören die regulären inf. Transf., aus denen sie sich zusammensetzen läßt, der Gruppe G an, weil diese regulär ist (§ 9, Nr. 3). Sie gehören aber auch der Untergruppe Γ an, weil sie ebenfalls mit allen inf. Transf. der Hauptgruppe vertauschbar sind (§ 4) und weil Γ nach Voraussetzung alle derartigen inf. Transf. umfaßt. Also kann man Γ durch reguläre inf. Transf. erzeugen.

Es bleibt noch der Fall zu erledigen, daß die Untergruppe Γ Substitutionen enthält, die nicht mit der allgemeinen Substitution der Hauptgruppe vertauschbar sind.

Es sei T eine derartige Substitution.

Damit die Parameter $u_1\, u_2 \cdots u_r$ in Evidenz treten, von denen die Koeffizienten der allgemeinen Substitution der Hauptgruppe abhängen, möge dieselbe mit $A(u)$ bezeichnet werden.

Das System der Substitutionen

$$(\Sigma) \qquad P(u) = A^{-1}(u)\, TA(u)$$

das durch Transformation aus T hervorgeht, hat folgende Eigenschaften:

1) Jede Substitution des Systems gehört der Untergruppe Γ an.

2) Transformiert man eine Substitution des Systems (Σ) durch eine beliebige Substitution der Gruppe G, so gehört die Transformierte wieder dem System (Σ) an. Dieses System ist also in der Gesamtgruppe G ausgezeichnet.

3) Das System (Σ) ist durch ein irreduzibles System algebraischer Gleichungen bestimmt, denen die Koeffizienten der Substitution $P(u)$ genügen.

Man gelangt zu diesen Gleichungen durch Elimination der rational auftretenden Parameter u.

Bilden die Substitutionen des Systems (Σ) eine Gruppe — was in dem Fall, dass die Untergruppe Γ eingliedrig ist, notwendig eintritt — so haben wir in (Σ) eine reguläre ausgezeichnete Untergruppe von G. Ist dies nicht der Fall, so setzen wir zwei allgemeine Substitutionen von (Σ) $P(u)$ und $P(v)$, die zwei verschiedenen Systemen variabler Parameter entsprechen, zu einer Substitution

$$Q(u\,|\,v) = P(u)\,P(v)$$

zusammen. Auch das System (Σ) der Substitutionen $Q(u\,|\,v)$ besitzt die oben genannten drei charakteristischen Eigenschaften. Die Anzahl der Koeffizienten der Substitution $Q(u\,|\,v)$, über die durch geeignete Bestimmung der Parameter $u_1\,u_2 \cdots u_r\,v_1\,v_2 \cdots v_r$ verfügt werden kann, ist mindestens um eins größer als die Anzahl der verfügbaren Koeffizienten von $P(u)$. Hat das System (Σ') Gruppencharakter, so ist (Σ') eine reguläre ausgezeichnete Untergruppe von G. Andernfalls bilden wir das System (Σ''), dass die Substitutionen

$$R(u\,|\,v\,|\,w\,|\,t) = Q(u\,|\,v)\;Q(w\,|\,t)$$

umfaßt u. s. w. Auf diesem Weg fortschreitend, müssen wir schließlich zu einer regulären ausgezeichneten Untergruppe gelangen.

Die Hauptuntergruppe (s. § 9) einer regulären Gruppe ist regulär.

Es folgt das aus der Bemerkung Killing's*), dass sich die allgemeine Substitution der Hauptuntergruppe in der Form

$$A^{-1}(u)\,A^{-1}(v)\,A(u)\,A(v)$$

darstellen läßt.

---

*) Zur Theorie der Lie'schen Transformationsgruppen. Braunsberger Programm 1886.

§ 12.

Die charakteristische Determinante der Gruppe.

Eine genauere Untersuchung der Zusammensetzung der Gruppe G üpft an die Bestimmung der zweigliedrigen Untergruppen an.*)

Zwei in der Gruppe G enthaltene inf. Transf.

$$K(f) = \sum_{\varrho=1}^{r} e_\varrho C_\varrho(f) \quad \text{und} \quad K'(f) = \sum_{\varrho=1}^{r} e'_\varrho C_\varrho(f)$$

zeugen eine zweigliedrige Untergruppe, wenn

$$(KK') = wK'(f).$$

ın ist

$$(KK') = \sum_{\varrho=1}^{r}\sum_{\sigma=1}^{r} e_\varrho e'_\sigma (C_\varrho C_\sigma) = \sum_{\varrho=1}^{r}\sum_{\sigma=1}^{r}\sum_{\lambda=1}^{r} \varepsilon_\lambda^{\varrho\sigma} e_\varrho e'_\sigma C_\lambda(f).$$

ıs (1) folgt;

$$\sum_{\lambda=1}^{r}\left[\sum_{\varrho=1}^{r}\sum_{\sigma=1}^{r} \varepsilon_\lambda^{\varrho\sigma} e_\varrho e'_\sigma - \omega e'_\lambda\right] C_\lambda(f) = 0$$

o, weil die inf. Transf. linear unabhängig sind

$$\sum_{\varrho=1}^{r}\sum_{\sigma=1}^{r} \varepsilon_\lambda^{\varrho\sigma} e_\varrho e'_\sigma - \omega e'_\lambda = 0 \qquad \lambda = 1, 2, \cdots r.$$

Die Elimination von $e'_1 e'_2 \cdots e'_r$ ergibt, wenn zur Abkürzung

$$\sum_{\varrho=1}^{r} \varepsilon_\lambda^{\varrho\sigma} e_\varrho = \gamma_{\sigma\lambda}$$

setzt wird.

$$\Delta(\omega) = \left|\gamma_{\sigma\lambda} - \binom{\sigma}{\lambda}\omega\right| = 0 \qquad \sigma, \lambda = 1, 2, \cdots r$$

(ω) heißt die charakteristische Determinante, $\Delta(\omega) = 0$ die charakteıtische Gleichung der Gruppe.

Sei nach Potenzen von ω entwickelt

$-1)^r\Delta(\omega) = \omega^r - \psi_1(e)\omega^{r-1} + \psi_2(e)\omega^{r-2} + \cdots + (-1)^{r-1}\psi_{r-1}(e)\omega.$

*) Die im folgenden benutzten Sätze über die Zusammensetzung der Transmationsgruppen verdankt man Killing (Zusammensetzung der Transformationsuppen Math. Annalen Bd. 31, S. 252, Bd. 33, S. 1, Bd. 34, S. 57, Bd. 36, S. 161) rgl. auch Cartan: Sur la structure des groupes de transformations finis et continus èse Paris 1894.

Das absolute Glied verschwindet, weil wegen $\varepsilon_\lambda^{\sigma\varrho} = -\varepsilon_\lambda^{\varrho\sigma}$

$$\sum_{\sigma=1}^{r} \gamma_{\sigma\lambda} e_\sigma = \sum_{\sigma=1}^{r}\sum_{\varrho=1}^{r} \varepsilon_\lambda^{\varrho\sigma} e_\varrho e_\sigma = 0$$

also

$$\Delta(o) = 0.$$

Die Ausdrücke ψ sind ganze Funktionen der Größen $e_1\, e_2 \cdots e_r$. Insbesondere ist

$$\psi_1(e) = \sum_{\sigma=1}^{r} \gamma_{\sigma\sigma},$$

$$\psi_2(e) = \sum_{\varrho=1}^{r}\sum_{\sigma=1}^{r} \gamma_{\varrho\varrho}\gamma_{\sigma\sigma} - \frac{1}{2}\sum_{\varrho=1}^{r}\sum_{\sigma=1}^{r} \gamma_{\varrho\sigma}\gamma_{\sigma\varrho}.$$

Die charakteristische Determinante $\Delta(\omega)$ ist für beliebige Werte von ω den inf. Transf.

$$E_\varrho(f) = \sum_{\sigma=1}^{r}\sum_{\varkappa=1}^{r} \varepsilon_\varkappa^{\varrho\sigma} e_\sigma \frac{\partial f}{\partial e_\varkappa} \qquad \varrho = 1, 2, \cdots r$$

gegenüber invariant. Es sind daher auch die Funktionen $\psi_1\, \psi_2 \cdots$ diesen inf. Transf. gegenüber invariant.

Zum Beweis bemerken wir zunächst: es ist

$$E_\varrho(\gamma_{\lambda\mu}) = \sum_{\sigma=1}^{r}\sum_{\varkappa=1}^{r} \varepsilon_\varkappa^{\varrho\sigma} e_\sigma \varepsilon_\mu^{\varkappa\lambda}.$$

Nun ist (§ 9 Nr, 4)

$$\sum_{\varkappa=1}^{r}\left[\varepsilon_\varkappa^{\varrho\sigma}\varepsilon_\mu^{\varkappa\lambda} + \varepsilon_\varkappa^{\sigma\lambda}\varepsilon_\mu^{\varkappa\varrho} + \varepsilon_\varkappa^{\lambda\varrho}\varepsilon_\mu^{\varkappa\sigma}\right] = 0$$

also

$$E_\varrho(\gamma_{\lambda\mu}) = -\sum_{\varkappa=1}^{r}\left[\varepsilon_\mu^{\varkappa\varrho}\sum_{\sigma=1}^{r}\varepsilon_\varkappa^{\sigma\lambda} e_\sigma + \varepsilon_\varkappa^{\lambda\varrho}\sum_{\sigma=1}^{r}\varepsilon_\mu^{\varkappa\sigma} e_\sigma\right]$$

$$= -\sum_{\varkappa=1}^{r}\left[\varepsilon_\mu^{\varkappa\varrho}\gamma_{\lambda\varkappa} - \varepsilon_\varkappa^{\lambda\varrho}\gamma_{\varkappa\mu}\right].$$

Folglich ist

$$E_\varrho(\Delta) = \sum_{\lambda=1}^{r}\sum_{\mu=1}^{r} \frac{\partial\Delta}{\partial\gamma_{\lambda\mu}} E_\varrho(\gamma_{\lambda\mu})$$

$$= -\sum_{\lambda=1}^{r}\sum_{\mu=1}^{r}\sum_{\varkappa=1}^{r}\left[\varepsilon_\mu^{\varkappa\varrho}\gamma_{\lambda\varkappa}\frac{\partial\Delta}{\partial\gamma_{\lambda\mu}} - \varepsilon_\varkappa^{\lambda\varrho}\gamma_{\varkappa\mu}\frac{\partial\Delta}{\partial\gamma_{\lambda\mu}}\right].$$

Nun ist

$$\sum_{\lambda=1}^{r} \gamma_{\lambda\varkappa} \frac{\partial \Delta}{\partial \gamma_{\lambda\mu}} = \binom{\mu}{\varkappa} \Delta + \omega \frac{\partial \Delta}{\partial \gamma_{\varkappa\mu}},$$

$$\sum_{\mu=1}^{r} \gamma_{\varkappa\mu} \frac{\partial \Delta}{\partial \gamma_{\lambda\mu}} = \binom{\lambda}{\varkappa} \Delta + \omega \frac{\partial \Delta}{\partial \gamma_{\lambda\varkappa}}.$$

Folglich $E_\varrho(\Delta) = 0$ w. z. b. w.

Die Anzahl derjenigen unter den Funktionen $\psi_1(e)\, \psi_2(e) \cdots$ die unter einander unabhängig sind, bezeichnet Killing als „Rang" der Gruppe. Die Gruppe ist also vom Rang Null, wenn alle Funktionen ψ identisch verschwinden.

Eine Gruppe, die nur reguläre inf. Transf. erster Art enthält, hat den Rang Null. Denn wenn $K(f)$ regulär von der ersten Art ist, so erfordert die Gleichung

$$(KK') = \omega K'(f)$$

$\omega = 0$ (§ 5).

§ 13.

Gruppen vom Rang Null.

Die inf. Transf. $C_1(f)\, C_2(f) \cdots C_r(f)$, die eine Gruppe G vom Rang Null erzeugen, können so gewählt werden, daß zwischen ihnen Relationen folgender Formen bestehen*):

$$(1) \qquad (C_\varrho\, C_\sigma) = \sum_{\nu=1}^{\sigma-1} \varepsilon_\nu^{\varrho\sigma}\, C_\varrho(f) \qquad \varrho = 1, 2, \cdots \sigma - 1;\ \sigma = 2, 3, \cdots r$$

Diese Gleichungen zeigen, daß die inf. Transf. $C_1(f)\, C_2(f) \cdots C_t(f)$ $(t = 1, 2, \cdots r-1)$ eine ausgezeichnete Untergruppe der Gruppe G erzeugen. Insbesondere ist ersichtlich: es gibt mindestens eine inf. Transf., die mit allen inf. Transf. der Gruppe vertauschbar ist.

Der ausgesprochene Satz gilt sicher für $r = 2$, denn alsdann ist $(C_1\, C_2) = 0$. Falls $r > 2$ ist, nehmen wir an, es lassen sich s in der Gruppe enthaltene inf. Transf. — sie mögen mit $C_1(f)\, C_2(f) \cdots C_s(f)$ bezeichnet werden — der Art wählen, daß die Gleichungen (1) für $\varrho = 1, 2, \cdots \sigma - 1$ und $\sigma = 2, 3, \cdots s$ bestehen. Die Untergruppe, die von diesen s inf. Transf. erzeugt wird, bezeichne ich mit Γ.

Die gemachte Annahme ist für $s = 2$ jedenfalls zulässig, denn eine jede Gruppe, deren Ordnung größer als 2 ist, enthält zweigliedrige Unter-

*) Umlauf, über die Zusammensetzung der endlichen kontinuierlichen Transformationsgruppen. Dissertation, Leipzig 1891, S. 35. Der im Text gegebene Beweis ist einfacher.

gruppen. Da die Gruppe G den Rang Null hat, so müssen die beiden inf. Transf., die eine zweigliedrige Untergruppe erzeugen, mit einander vertauschbar sein.

Um unsern Satz zu beweisen, hat man nur nötig zu zeigen: Man kann eine inf. Transf. $C_{s+1}(f)$, die der Gruppe G aber nicht der Untergruppe Γ angehört, der Art wählen, daß die Gleichungen (1) auch noch für $\sigma = s+1$; $\varrho = 1, 2, \cdots s$ gelten.

Nehmen wir nun an, es gebe m unter einander lineare unabhängige inf. Transf.

$$K_\mu(f) = \sum_{\nu=1}^{r-s} e_{\mu\nu} C_{s+\nu}(f) \qquad \mu = 1, 2, \cdots m$$

die Gleichungen der folgenden Form genügen

$$(2) \qquad \begin{aligned}(C_\sigma K_\mu) = {} & \alpha_{\mu 1} C_1(f) + \alpha_{\mu 2} C_2(f) + \cdots + \alpha_{\mu s} C_s(f) \\ & + \beta_{\mu 1} K_1(f) + \beta_{\mu 2} K_2(f) + \cdots + \beta_{\mu m} K_m(f).\end{aligned}$$

Zu diesen Gleichungen fügen wir die Gleichungen hinzu

$$(C_\sigma C_\varrho) = \varepsilon_1^{\sigma\varrho} C_1(f) + \varepsilon_2^{\sigma\varrho} C_2(f) + \cdots + \varepsilon_s^{\sigma\varrho} C_s(f) \qquad \varrho = 1, 2, \cdots s.$$

Hier ist $\varepsilon_\nu^{\sigma\varrho} = 0$ zu setzen, wenn $\nu \geqq$ der größeren der beiden Zahlen ϱ, σ ist. Die Determinante

$$D(\omega) = \begin{vmatrix}
\varepsilon_1^{\sigma 1} - \omega & \varepsilon_2^{\sigma 1} & \varepsilon_3^{\sigma 1} & \cdots \varepsilon_s^{\sigma 1} & \cdots & & & & & \\
\varepsilon_1^{\sigma 2} & \varepsilon_2^{\sigma 2} - \omega & \varepsilon_3^{\sigma 2} & \cdots \varepsilon_s^{\sigma 2} & \cdots & & & & & \\
\varepsilon_1^{\sigma 3} & \varepsilon_2^{\sigma 3} & \varepsilon_3^{\sigma 3} - \omega & \cdots \varepsilon_s^{\sigma 3} & \cdots & & & & & \\
\cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & & & & & \\
\cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & & & & & \\
\varepsilon_1^{\sigma s} & \varepsilon_2^{\sigma s} & \varepsilon_3^{\sigma s} & \cdots \varepsilon_s^{\sigma s} - \omega & \cdots & & & & & \\
\alpha_{11} & \alpha_{12} & \alpha_{13} & \cdots \alpha_{1s} & \cdots \beta_{11} - \omega & \beta_{12} & \beta_{13} & \cdots \beta_{1m} \\
\alpha_{21} & \alpha_{22} & \alpha_{22} & \cdots \alpha_{2s} & \cdots \beta_{21} & \beta_{22} - \omega & \beta_{23} & \cdots \beta_{2m} \\
\alpha_{31} & \alpha_{32} & \alpha_{33} & \cdots \alpha_{3s} & \cdots \beta_{31} & \beta_{32} & \beta_{33} - \omega & \cdots \beta_{3m} \\
\cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\
\cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\
\alpha_{m1} & \alpha_{m2} & \alpha_{m3} & \cdots \alpha_{ms} & \cdots \beta_{m1} & \beta_{m2} & \beta_{m3} & \cdots \beta_{mm} - \omega
\end{vmatrix}$$

kann für keinen von Null verschiedenen Wert von ω verschwinden.

Denn andernfalls könnte man eine inf. Transf.

$$\begin{aligned}L(f) = {} & u_1 C_1(f) + u_2 C_2(f) + \cdots + u_s C_s(f) \\ & + v_1 K_1(f) + v_2 K_2(f) + \cdots + v_m K_m(f)\end{aligned}$$

der Art bestimmen,

$$(C_\sigma L) = \omega L(f) \quad \text{und} \quad \omega \neq 0.$$

Aber dies ist unmöglich, da die Gruppe G den Rang Null hat.

Da die Determinante $D(\omega)$ die Determinante

$$\left| \beta_{\lambda\mu} - \binom{\lambda}{\mu} \omega \right| \qquad \lambda, \mu = 1, 2, \cdots m$$

als Faktor enthält, so kann auch diese für keinen von Null verschiedenen Wert von ω verschwinden. Es gibt daher m Größen $v_1\ v_2 \cdots v_m$, die nicht alle gleich Null sind, und die den Gleichungen genügen

$$v_1\beta_{\mu 1} + v_2\beta_{\mu 2} + \cdots + v_m\beta_{\mu m} = 0 \qquad \mu = 1, 2, \cdots m.$$

Die inf. Transf.

$$L(f) = v_1 K_1(f) + v_2 K_2(f) + \cdots + v_m K_m(f)$$

hat nun die Eigenschaft, daß die aus $C_\sigma(f)$ und $L(f)$ abgeleitete inf. Transf. $(C_\sigma L)$ der Untergruppe Γ angehört.

Aus der eben durchgeführten Betrachtung schließen wir zunächst, indem wir $\sigma = 1 \quad m = r - s$ setzen:

Es gibt mindestens eine inf. Transf.

$$K(f) = e_1 C_{s+1}(f) + e_2 C_{s+2}(f) + \cdots e_{r-s} C_r(f)$$

die die Eigenschaft hat, daß die abgeleitete inf. Transf. $(C_1 K)$ der Untergruppe Γ angehört. Nehmen wir nun an, es gebe genau m unter einander linear unabhängige inf. Transf.

$$K_\mu(f) = \sum_{\nu=1}^{r-s} e_{\mu\nu} C_{s+\nu}(f)$$

von der Art, daß jede der abgeleiteten inf. Transf.

$$(C_\varrho K_\mu) \qquad \varrho = 1, 2 \cdots \sigma - 1;\ \mu = 1, 2, \cdots m$$

der Untergruppe Γ angehört; jede weitere inf. Transf. der Gruppe G, der dieselbe Eigenschaft zukommt, lasse sich als lineare Funktion von

$$C_1(f)\ C_2(f) \cdots C_s(f)\ K_1(f)\ K_2(f) \cdots K_m(f)$$

darstellen. Bilden wir die Jacobische Identität

$$(C_\varrho (C_\sigma K_\mu)) + (C_\sigma (K_\mu C_\varrho)) + (K_\mu (C_\varrho C_\sigma)) = 0$$
$$\varrho = 1, 2 \cdots \sigma - 1;\ \mu = 1, 2, \cdots m.$$

Die inf. Transf. $(K_\mu C_\varrho)$ gehört der Untergruppe Γ an, folglich auch die inf. Transf. $(C_\sigma (K_\mu C_\varrho))$. Die inf. Transf. $(C_\varrho C_\sigma)$ läßt sich als lineare Funktion der inf. Transf. $C_1(f)\ C_2(f) \cdots C_{\sigma-1}(f)$ darstellen; es geht dies aus den Gleichungen (1) hervor, die nach Voraussetzung für $\sigma \geqq s$ gelten. Folglich gehört auch die inf. Transf. $(K_\mu (C_\varrho C_\sigma))$ der Untergruppe Γ

an. Daraus folgt: Auch die aus den inf. Transf. $C_\varrho(f)$ $(\varrho = 1, 2, \cdots \sigma - 1)$ und $(C_\sigma K_\mu)$ $(\mu = 1, 2, \cdots m)$ abgeleitete inf. Transf. $(C_\varrho(C_\sigma K_\mu))$ gehört der Untergruppe Γ an. Folglich gelten für die inf. Transf. $(C_\varrho K_\mu)$ Gleichungen der Form (2). Hieraus schließen wir:

Es gibt mindestens eine inf. Transf.

$$L(f) = v_1 K_1(f) + v_2 K_2(f) + \cdots + v_m K_m(f)$$

die die Eigenschaft hat, daß nicht nur die inf. Transf. $(C_1 L)$ $(C_2 L) \cdots (C_{\sigma-1} L)$ sondern auch noch die inf. Transf. $(C_\sigma L)$ der Untergruppe Γ angehört. Indem wir σ der Reihe nach $= 2, 3, \cdots s$ setzen, gelangen wir offenbar zu einer nicht der Untergruppe Γ angehörenden inf. Transf. der Gruppe G — wir wollen sie mit $C_{s+1}(f)$ bezeichnen — für die Gleichungen der Form

$$(C_{s+1} C_\sigma) = \sum_{\nu=1}^{s} \varepsilon_\nu^{s+1\,\sigma} C_\nu(f) \qquad \sigma = 1, 2, \cdots s$$

bestehen.

§ 14.

Gruppen, deren Rang größer als Null ist.

Nehmen wir nun an, die Gruppe G sei regulär und ihr Rang sei größer als Null. Aus der Schlußbemerkung des § 12 ergibt sich, daß G mindestens eine reguläre Transf. zweiter Art enthalten muß. Es sei $C_1(f)$ eine solche.

Die Determinante

$$\Delta_1(\omega) = \left| \varepsilon_\mu^{1\lambda} - \binom{\lambda}{\mu} \omega \right| \qquad \lambda, \mu = 1, 2, \cdots r$$

besitzt nur Elementarteiler erster Ordnung und verschwindet nur für ganzzahlige Werte von ω (§ 5 und § 6). Die Wurzeln der Gleichung $\Delta_1(\omega) = 0$ bezeichne ich mit $\omega_1^{(1)}\, \omega_2^{(1)}\, \omega_3^{(1)} \cdots \omega_p^{(1)}$. Unter diesen mögen i unter einander verschiedene vorkommen.

Die Wurzel $\omega = 0$ möge m_1-fach, die übrigen Wurzeln mögen m_2-fach m_3-fach $\cdots$ m_i-fach auftreten.

Ich setze zur Abkürzung

$$m_1 = h_1,\ m_1 + m_2 = h_2,\ m_1 + m_2 + m_3 = h_3 \cdots m_1 + m_2 + \cdots + m_{i-1} = r - m_i = h_{i-1}$$
$$m_1 + m_2 + \cdots + m_i = r = h_i.$$

Die Bezeichnung der Wurzeln sei der Art gewählt, daß

$$\begin{aligned}
&\omega_1^{(1)} = \omega_2^{(1)} = \omega_3^{(1)} = \cdots = \omega_{h_1}^{(1)},\\
&\omega_{h_1+1}^{(1)} = \omega_{h_1+2}^{(1)} = \omega_{h_1+3}^{(1)} = \cdots = \omega_{h_2}^{(1)},\\
&\cdots\cdots\cdots

Man kann nun r linear unabhängige Wertsysteme

$$u_1^{(\varrho)}\ u_2^{(\varrho)} \cdots u_r^{(\varrho)} \qquad \varrho = 1, 2, \cdots r$$

der Art bestimmen, daß

$$\sum_{\nu=1}^{r} \varepsilon_\lambda^{1\nu}\, u_\nu^{(\varrho)} = \omega_\varrho^{(1)}\, u_\lambda^{(\varrho)} \qquad \lambda, \varrho = 1, 2, \cdots r.$$

Es ist offenbar zulässig $u_1^{(1)} = 1$, $u_2^{(1)} = u_3^{(1)} \cdots u_r^{(1)} = 0$ anzunehmen. Setzen wir nun

$$K_\varrho(f) = u_1^{(\varrho)} C_1(f) + u_2^{(\varrho)} C_2(f) + \cdots + u_r^{(\varrho)} C_r(f) \qquad \varrho = 1, 2, \cdots r$$

— also insbesondere $K_1(f) = C_1(f)$ — so bestehen die Gleichungen

$$(C_1 K_\varrho) = \omega_\varrho^{(1)} K_\varrho(f) \qquad \varrho = 1, 2, \cdots r.$$

Im folgenden wollen wir, um die Bezeichnungen des § 12 unverändert beibehalten zu können, statt $K_1(f)\ K_2(f) \cdots K_r(f)$ wieder $C_1(f)\ C_2(f) \cdots C_r(f)$ schreiben, also annehmen, die inf. Transf. $C_\varrho(f)$ seien von Anfang an so gewählt, daß

$$(1) \qquad (C_1 C_\varrho) = \omega_\varrho^{(1)} C_\varrho(f) \qquad \varrho = 1, 2, \cdots r.$$

Diejenigen unter den inf. Transf. $C_\varrho(f)$, die zu einer von Null verschiedenen Wurzel gehören, sind regulär von der ersten Art (§ 5). Auch die inf. Transf. $C_2(f)\ C_3(f) \cdots C_{m_1}(f)$, die zur Wurzel $\omega = 0$ gehören, kann man so wählen, daß sie regulär sind. Wäre nämlich etwa $C_2(f)$ nicht regulär, so müßten die regulären inf. Transf. $K_\sigma(f)$, aus denen sich $C_2(f)$ zusammensetzen läßt, sämtlich der Gruppe G angehören. Da aber $(C_1 C_2) = 0$ so ist auch $(C_1 K_\sigma) = 0$ (§ 4), folglich muß sich eine jede der inf. Transf. $K_\sigma(f)$ als lineare Funktion von $C_1(f)\ C_2(f) \cdots C_{m_1}(f)$ darstellen lassen und wir können $C_2(f)$ durch eine der regulären inf. Transf. $K_\sigma(f)$ ersetzen.

Es seien

$$C_1(f)\ C_2(f) \cdots C_l(f)$$

regulär von der zweiten Art,

$$C_{l+1}(f)\ C_{l+2}(f) \cdots C_{m_1}(f)$$

seien regulär von der ersten Art.

Es kann der Fall eintreten, daß $l = m_1$ ist, daß also unter der zur Wurzel 0 gehörigen inf. Transf. keine von der ersten Art auftritt.

Wir dürfen annehmen, daß in dem System

$$u_1 C_{l+1}(f) + u_2 C_{l+2}(f) + \cdots + u_{m_1 - l} C_{m_1}(f)$$

keine reguläre inf. Transf. zweiter Art enthalten sei. Denn andernfalls könnten wir auch noch $C_{l+1}(f)$ durch eine reguläre Transf. zweiter Art ersetzen.

Wir bilden nun die Jacobische Identität

$$(C_1(C_\varrho C_\sigma)) + (C_\varrho(C_\sigma C_1)) + (C_\sigma(C_1 C_\varrho)) = 0.$$

Es ist

$$(C_\sigma C_1) = -\omega_\sigma^{(1)} C_\sigma(f) \quad \text{und} \quad (C_1 C_\varrho) = \omega_\varrho^{(1)} C_\varrho(f)$$

also

$$\left(C_1(C_\varrho C_\sigma)\right) = \left(\omega_\varrho^{(1)} + \omega_\sigma^{(1)}\right)(C_\varrho C_\sigma).$$

Daraus folgt: $(C_\varrho C_\sigma) = 0$ wenn $\omega_\varrho^{(1)} + \omega_\sigma^{(1)}$ nicht Wurzel der Gleichung $\Delta_1(\omega) = 0$ ist. Ist dagegen $\omega_\varrho^{(1)} + \omega_\sigma^{(1)}$ gleich einer Wurzel $\omega_\tau^{(1)}$ dieser Gleichung, so läßt sich die inf. Transf. $(C_\varrho C_\sigma)$ als lineare Funktion der zu dieser Wurzel gehörigen inf. Transf. darstellen.

Gehören $C_\varrho(f)$ und $C_\sigma(f)$ zur Wurzel $\omega = 0$, so gilt dasselbe für $(C_\varrho C_\sigma)$; die zur Wurzel 0 gehörigen inf. Transf. erzeugen also eine Untergruppe Γ_0. Sind $\omega_\varrho^{(1)}$ und $\omega_\sigma^{(1)}$ positiv, so gilt dasselbe für ihre Summe; die zu positiven Wurzeln gehörigen inf. Transf. erzeugen also eine Untergruppe Γ_+. Ebenso erzeugen die zu negativen Wurzeln gehörigen inf. Transf. eine Untergruppe Γ_-.

Ist $\omega_\varrho^{(1)} = 0$ $\omega_\sigma^{(1)} \neq 0$ so ist $\omega_\tau^{(1)} = \omega_\sigma^{(1)}$. Die inf. Transf., die zu Wurzel 0 und die zu positiven Wurzeln gehören, erzeugen daher eine Untergruppe H_1, die die Untergruppen Γ_0 und Γ_+ umfaßt. Ebenso setzen sich die Untergruppen Γ_0 und Γ_- zu einer Untergruppe H_2 zusammen.

Bezüglich der inf. Transf. $C_1(f)$ haben wir bis jetzt nur vorausgesetzt, daß sie regulär von der zweiten Art ist. Wir nehmen nunmehr, um Weitläufigkeiten zu vermeiden, überdies an, $C_1(f)$ sei so gewählt, daß die Zahl i der verschiedenen Wurzeln der Gleichung $\Delta_1(\omega) = 0$ möglichst groß ist. Unter dieser Voraussetzung bestehen die Gleichungen

$$(2) \qquad (C_\lambda C_\varrho) = \omega_\varrho^{(\lambda)} C_\varrho(f) \qquad \varrho = 1, 2, \cdots r; \quad \lambda = 1, 2, \cdots l$$

und es ist

$$\omega_1^{(\lambda)} = \omega_2^{(\lambda)} = \cdots = \omega_{h_1}^{(\lambda)} = 0,$$

$$\omega_{h_\nu+1}^{(\lambda)} = \omega_{h_\nu+2}^{(\lambda)} = \cdots = \omega_{h_{\nu+1}}^{(\lambda)} \qquad \nu = 1, 2, \cdots i-1.$$

Nehmen wir einen Augenblick an, die aufgestellte Behauptung sei unrichtig. Da die inf. Transf. $C_\lambda(f)$ zur Wurzel 0 und die inf. Transf. $C_{h_\nu+\mu}(f)$ $(\mu = 1, 2, \cdots m_\nu)$ zur Wurzel $\omega_{h_\nu+1}$ gehören, so gelten jedenfalls Gleichungen der Form

$$(3) \qquad (C_\lambda C_{h_\nu+\mu}) = \sum_{\varkappa=1}^{m_\nu} \alpha_{\mu\varkappa} C_{h_\nu+\varkappa}(f) \qquad \mu = 1, 2. \cdots m_\nu.$$

Die Determinante

$$\left| \alpha_{\mu\varkappa} - \binom{\mu}{\varkappa} \omega \right| \qquad \mu, \varkappa = 1, 2, \cdots m_\nu$$

besitzt, weil $C_\lambda(f)$ regulär von der zweiten Art ist, nur Elementarteiler erster Ordnung (§ 6). Die Werte von ω, für die sie verschwindet, seien

$$\omega^{(\lambda)}_{h_\nu+1} \; \omega^{(\lambda)}_{h_\nu+2} \cdots \omega^{(\lambda)}_{h_\nu+1}.$$

Indem wir an Stelle der m_ν inf. Transf. $C_{h_\nu+\mu}(f)$ geeignet gewählte lineare Kombinationen derselben $K_{h_\nu+\mu}(f)$ einführen, können wir bewirken, daß an Stelle der Gleichungen (3) die Gleichungen

$$\left(C_\lambda K_{h_\nu+\mu}\right) = \omega^{(\lambda)}_{h_\nu+1} K_{h_\nu+\mu}(f) \qquad \mu = 1, 2, \cdots m_\nu$$

treten. Die gleiche Betrachtung können wir für die inf. Transf., die zu einer jeden der verschiedenen Wurzeln der Gleichung $\Delta_1(\omega) = 0$ gehören, anstellen. Wir gelangen zu einem Gleichungssystem

$$\left(K_\lambda K_\varrho\right) = \omega^{(\lambda)}_\varrho K_\varrho(f) \qquad \varrho = 1, 2, \cdots r$$

und hier darf — aus Gründen, die bei der Herleitung der Gleichungen (1) auseinander gesetzt sind — $K_\lambda(f) = C_\lambda(f)$ gesetzt werden. Da $(C_1 C_\lambda)(f) = 0$ ist, so darf überdies $K_1(f) = C_1(f)$ angenommen werden.

Wir haben eine jede in den Gleichungen (1) auftretende inf. Transf. $C_\varrho(f)$ durch eine lineare Kombination von inf. Transf. ersetzt, die zur selben Wurzel der Gleichung $\Delta_1(\omega) = 0$ gehören. Daraus folgt, daß bei den angewendeten Substitutionen die Form der Gleichungen (1) ungeändert bleibt, d. h. es gelten die Gleichungen

$$\left(K_1 K_\varrho\right) = \omega^{(1)}_\varrho K_\varrho(f) \qquad \varrho = 1, 2, \cdots r$$

Da die inf. Transf. zweiter Art $C_1(f)$ und $C_\lambda(f)$ vertauschbar sind, so ist auch $L(f) = uC_1(f) + vC_\lambda(f)$ eine reguläre inf. Transf. zweiter Art, sofern u und v ganze Zahlen sind (vergl. § 6 Hilfssatz 2). Für diese inf. Transf. bestehen die Gleichungen

$$\left(LK_\varrho\right) = \left(u\omega^{(1)}_\varrho + v\omega^{(\lambda)}_\varrho\right) K_\varrho(f) \qquad \varrho = 1, 2, \cdots r.$$

Man kann nun die ganzen Zahlen u und v so wählen, daß

$$u\omega^{(1)}_\varrho + v\omega^{(\lambda)}_\varrho \neq u\omega^{(1)}_\sigma + v\omega^{(\lambda)}_\sigma \qquad \varrho, \sigma = 1, 2, \cdots r$$

außer wenn

$$\omega^{(1)}_\varrho = \omega^{(1)}_\sigma \quad \text{und} \quad \omega^{(\lambda)}_\varrho = \omega^{(\lambda)}_\sigma.$$

Da nach Voraussetzung die inf. Transf. $C_1(f)$ so gewählt ist, daß die Anzahl der verschiedenen Wurzeln der Gleichung $\Delta_1(\omega) = 0$ möglichst groß ist, so ist jedesmal $\omega^{(\lambda)}_\varrho = \omega^{(\lambda)}_\sigma$ so oft $\omega^{(1)}_\varrho = \omega^{(1)}_\sigma$ ist. Wegen

$$K_1(f) = C_1(f) \quad K_\lambda(f) = C_\lambda(f) \text{ und } (C_1 C_\lambda) = 0$$

ist $\omega_1^{(\lambda)} = 0$ also auch

$$\omega_2^{(\lambda)} = \omega_3^{(\lambda)} = \cdots = \omega_{m_1}^{(\lambda)} = 0.$$

Auf Grund des eben Bewiesenen kann man offenbar $K_\varrho(f) = C_\varrho(f)$ setzen. Damit ist die Richtigkeit der Gleichungen (2) und der zugehörigen Zusätze bewiesen.

Die oben gemachte Bemerkung, daß $(C_\varrho C_\sigma) = 0$ wenn nicht $\omega_\varrho^{(1)} + \omega_\sigma^{(1)} =$ einer Wurzel $\omega_\tau^{(1)}$ der Gleichung $\Delta_1(\omega) = 0$ ist, läßt sich nun dahin ausdehnen, daß $(C_\varrho C_\sigma) = 0$, wenn nicht gleichzeitig die Gleichungen $\omega_\varrho^{(\lambda)} + \omega_\sigma^{(\lambda)} = \omega_\tau^{(\lambda)}$ für $\lambda = 1, 2, \cdots l$ bestehen.

Die inf. Transf. $C_1(f)\ C_2(f) \cdots C_l(f)$ sind paarweise vertauschbar, sie erzeugen eine Untergruppe Γ_0'.

Die m_1 inf. Transf. $C_1(f)\ C_2(f) \cdots C_{m_1}(f)$ erzeugen die Untergruppe Γ_0. Die l ersten inf. Transf. sind regulär von der zweiten Art; dieselben sind mit allen inf. Transf. von Γ_0 vertauschbar. Daraus folgt: die $m_1 - l$ inf. Transf. $C_{l+1}(f)\ C_{l+2}(f) \cdots C_{m_1}(f)$, die sämtlich regulär von der ersten Art sind, erzeugen eine Untergruppe Γ_0'' der Ordnung $m_1 - l$.*) Diese Untergruppe ist regulär, weil sie von regulären inf. Transf. erzeugt wird, und sie hat den Rang Null, weil sie keine reguläre inf. Transf. zweiter Art enthält.

Bilden wir — unter $e_{l+1}\ e_{l+2} \cdots e_{m_1}$ verfügbare Parameter verstehend — die allgemeine inf. Transf. der Gruppe Γ_0''

$$K(f) = e_{l+1} C_{l+1}(f) + e_{l+2} C_{l+2}(f) + \cdots + e_{m_1} C_{m_1}(f).$$

Ist μ eine Zahl aus der Reihe $h_\nu + 1,\ h_\nu + 2 \cdots h_{\nu+1}$, so ist

$$(K C_\mu) = \sum_{\lambda=l+1}^{m_1} e_\lambda (C_\lambda C_\mu) = \sum_{\lambda=l+1}^{m_1} \sum_{\varkappa=h_\nu+1}^{h_{\nu+1}} \varepsilon_\varkappa^{\lambda\mu} e_\lambda C_\varkappa(f).$$

Wir bestimmen nun die inf. Transf.

$$K'(f) = \sum_{\mu=h_\nu+1}^{h_{\nu+1}} u_\mu C_\mu(f)$$

der Art, daß $(K K') = \omega\ K'(f)$.

Die Größe ω ist durch die Bedingung bestimmt, daß die aus den Elementen

*) § 6 Hilfssatz 3.

$$\gamma'_{\varrho\sigma} - \binom{\varrho}{\sigma}\omega = \sum_{\lambda=l+1}^{m_1} \varepsilon_\sigma^{\lambda\varrho} e_\lambda - \binom{\varrho}{\sigma}\omega \quad \varrho,\sigma = h_\nu+1, h_\nu+2, \cdots h_{\nu+1}$$

gebildete Determinante $D(\omega)$ verschwindet (vergl. § 12).

Da nun $K(f)$ regulär von der ersten Art ist, so kann die Gleichung $(KK') = \omega\, K'(f)$ nur bestehen, wenn $\omega = 0$ (§ 5).

Die Gleichung $D(\omega) = 0$ kann also keine von Null verschiedene Wurzel besitzen. Es ist daher für beliebige Werte der Parameter e der Koeffizient von $(-\omega)^{m_\nu - 1}$

$$\sum_{\sigma=h_\nu+1}^{h_\nu+m_\nu} \gamma'_{\sigma\sigma} = 0 \quad \text{also} \quad \sum_{\sigma=h_\nu+1}^{h_\nu+m_\nu} \varepsilon_\sigma^{\lambda\sigma} = 0 \quad \text{für} \quad \lambda = l+1, l+2, \cdots m_1.$$

Dies gilt auch für $m_\nu = 1$. Ist $m_\nu \geqq 2$, so ist ferner de Koeffizient von $(-\omega)^{m_\nu - 2}$

$$-\frac{1}{2}\sum_{\varrho=h_\nu+1}^{h_\nu+m_\nu}\ \sum_{\sigma=h_\nu+1}^{h_\nu+m_\nu} \gamma'_{\varrho\sigma}\gamma'_{\sigma\varrho} = -\frac{1}{2}\sum_{\varrho=h_\nu+1}^{h_\nu+m_\nu}\ \sum_{\sigma=h_\nu+1}^{h_\nu+m_\nu}\ \sum_{\lambda=l+1}^{m_1}\ \sum_{\mu=l+1}^{m_1} \varepsilon_\sigma^{\lambda\varrho}\varepsilon_\varrho^{\mu\sigma} e_\lambda e_\mu = 0.$$

Folglich

$$\sum_{\varrho=h_\nu+1}^{h_\nu+m_\nu}\ \sum_{\sigma=h_\nu+1}^{h_\nu+m_\nu} \varepsilon_\sigma^{\lambda\varrho}\varepsilon_\varrho^{\mu\sigma} = 0 \quad \text{für} \quad \lambda, \mu = l+1, l+2, \cdots m_1.$$

Endlich ist, weil die Unterdeterminante Γ_0'' den Rang Null besitzt

$$\sum_{\varrho=l+1}^{m_1}\ \sum_{\sigma=l+1}^{m_1} \varepsilon_\sigma^{\lambda\varrho}\varepsilon_\varrho^{\mu\sigma} = 0 \quad \text{für} \quad \lambda, \mu = l+1, l+2, \cdots m_1.$$

§ 15.

Einfache Gruppen.

Wir nehmen nunmehr an, die reguläre Gruppe G sei einfach.*) Ihr Rang ist dann jedenfalls größer als Null, da ja jede Gruppe vom Rang Null zusammengesetzt ist (§ 13). Es dürfen ferner, wenn λ eine Zahl

*) Ich möchte beiläufig bemerken: jede lineare Gruppe, die einfach ist, ist auch regulär. Es beruht dies auf dem Satz: enthält eine lineare Gruppe überhaupt reguläre inf. Transf., so erzeugt die Gesamtheit derselben entweder die Gruppen selbst oder eine ausgezeichnete Untergruppe derselben. Jede Gruppe, deren Rang größer als Null ist, enthält sicher reguläre inf. Transf., denn sie enthält zweigliedrige Untergruppen, zwischen deren erzeugenden inf. Transf, $K(f)$ $K'(f)$ die Beziehung besteht

$$(KK') = \omega K'(f) \quad \text{wo} \quad \omega \neq 0$$

und hier ist $K'(f)$ regulär von der ersten Art.

aus der Reihe $1, 2, \cdots l$ bezeichnet, nicht gleichzeitig die Größen $\omega_1^{(\lambda)}\ \omega_2^{(\lambda)} \cdots \omega_\mu^{(\lambda)}$ verschwinden, denn andernfalls wäre die inf. Transf. $C_\lambda(f)$ mit allen inf. Transf. der Gruppe vertauschbar, erzeugte also eine ausgezeichnete Untergruppe. Aus derselben ergibt sich, daß nicht alle aus der Matrix

$$\begin{matrix} \omega_1^{(1)}\ \omega_2^{(1)} \cdots \omega_r^{(1)}, \\ \omega_1^{(2)}\ \omega_2^{(2)} \cdots \omega_r^{(2)}, \\ \cdots\cdots\cdots \\ \omega_1^{(l)}\ \omega_2^{(l)} \cdots \omega_r^{(l)} \end{matrix}$$

gebildeten Determinanten der Ordnung l verschwinden dürfen.

Betrachten wir die charakteristische Determinante der Gruppe

$$(-1)^r \Delta(\omega) = \omega^r - \psi_1(e)\,\omega^{r-1} + \psi_2(e)\,\omega^{r-2} - \cdots.$$

Die lineare Form $\psi_1(e)$ ist den inf. Transf.

$$E_\varrho(f) = \sum_{\sigma=1}^{r} \sum_{\varkappa=1}^{r} \varepsilon_\varkappa^{\varrho\sigma} e_\sigma \frac{\partial f}{\partial e_\varkappa} \qquad \varrho = 1, 2, \cdots r$$

gegenüber invariant (§ 12). Wenn also diese Linearform nicht identisch verschwindet, so bestimmt die Gleichung $\psi_1(e) = 0$ eine ausgezeichnete Untergruppe (§ 10). Da die Gruppe G einfach ist, so verschwindet demnach $\psi_1(e)$ identisch.

Auch die quadratische Form $\psi_2(e)$ ist den inf. Transf. $E_\varrho(f)$ gegenüber invariant.*) Aus der Gleichung $E_\varrho(\psi_2) = 0$ folgt durch Differentiation nach e_λ:

$$E_\varrho\left(\frac{\partial \psi_2}{\partial e_\lambda}\right) + \sum_{\varkappa=1}^{r} \varepsilon_\varkappa^{\varrho\lambda} \frac{\partial \psi_2}{\partial e_\varkappa} = 0 \qquad \varrho, \lambda = 1, 2, \cdots r.$$

Das Gleichungssystem $\frac{\partial \psi_2}{\partial e_\lambda} = 0$ $(\lambda = 1, 2, \cdots r)$ ist also den inf. Transf. $E_\varrho(f)$ gegenüber invariant, bestimmt also — sofern es Lösungen besitzt — eine ausgezeichnete Untergruppe.

Es folgt: die quadratische Form $\psi_2(e)$ muß entweder vollständig sein oder identisch verschwinden. Es wird sofort nachgewiesen werden, daß die letztere Alternative auszuschließen ist.

Da $\psi_1(e)$ verschwindet, ist (§ 12)

$$\psi_2(e) = -\frac{1}{2} \sum_{\varrho=1}^{r} \sum_{\sigma=1}^{r} \gamma_{\varrho\sigma}\gamma_{\sigma\varrho} \quad \text{wo} \quad \gamma_{\varrho\sigma} = \sum_{\lambda=1}^{r} \varepsilon_\sigma^{\lambda\varrho} e_\lambda.$$

*) Bezüglich der im folgenden durchgeführten Untersuchung der Form $\psi_2(e)$ vergl. Cartan a. a. O. Cap. IV.

Setzen wir

$$\psi_2(e) = \sum p_{\lambda\mu} e_\lambda e_\mu$$

also

$$p_{\lambda\mu} = -\frac{1}{2} \sum_{\varrho=1}^{r} \sum_{\sigma=1}^{r} \varepsilon_\sigma^{\lambda\varrho} \varepsilon_\varrho^{\mu\sigma} \qquad \lambda, \mu = 1, 2, \cdots r.$$

Nun ist $\varepsilon_\sigma^{\lambda\varrho} = 0$ außer wenn $\omega_\sigma^{(\tau)} = \omega_\varrho^{(\tau)} + \omega_\lambda^{(\tau)}$ für $\tau = 1, 2, \cdots l$. Damit $p_{\lambda\mu}$ von Null verschieden ist, ist also erforderlich

$$\omega_\sigma^{(\tau)} = \omega_\varrho^{(\tau)} + \omega_\lambda^{(\tau)} \quad \text{und} \quad \omega_\varrho^{(\tau)} = \omega_\sigma^{(\tau)} + \omega_\mu^{(\tau)}$$

d. h.

$$\omega_\lambda^{(\tau)} + \omega_\mu^{(\tau)} = 0.$$

Ist $\omega_\lambda^{(\tau)}$, also λ eine Zahl aus der Reihe $1, 2, \cdots m_1$, so ist $p_{\lambda\mu} = 0$ wenn nicht die Zahl μ derselben Reihe angehört.

Die quadratische Form $\psi_2(e)$ ist demnach die Summe zweier quadratischer Formen $\psi_2'(e)$ und $\psi_2''(e)$; die erste derselben enthält nur die Variabeln $e_1 e_2 \cdots e_{m_1}$, die zweite nur die $r - m_1$ übrigen Variabeln.

Wählen wir für λ, μ Zahlen der Reihe $1, 2, \cdots l$, so ist, da

$$\varepsilon_\sigma^{\lambda\varrho} = \binom{\varrho}{\sigma} \omega_\varrho^{(\lambda)} \quad \text{und} \quad \varepsilon_\varrho^{\mu\sigma} \binom{\varrho}{\sigma} \omega_\varrho^{(\mu)},$$

$$p_{\lambda\mu} = \sum_{\varrho=1}^{r} \omega_\varrho^{(\lambda)} \omega_\varrho^{(\mu)}.$$

Da $\omega_1^{(\lambda)}\ \omega_2^{(\lambda)} \cdots \omega_r^{(\lambda)}$ ganze Zahlen bedeuten, die nicht alle gleich Null sind, so ist jeder der Koeffizienten $p_{\lambda\lambda}$ von Null verschieden. Die quadratische Form $\psi_2(e)$ verschwindet also nicht identisch.

Geben wir unter der Voraussetzung $m_1 > l$ λ einen der Werte $1, 2, \cdots l$; μ einen der Werte $l+1, l+2, \cdots m_1$.

Es ergibt sich

$$\gamma_{\lambda\mu} = \sum_{\varrho=1}^{r} \omega_\varrho^{(\lambda)} \varepsilon_\varrho^{\mu\varrho}.$$

Wegen

$$\omega_1^{(\lambda)} = \omega_2^{(\lambda)} = \cdots = \omega_{m_1}^{(\lambda)} = 0,$$

$$\omega_{h_\nu+1}^{(\lambda)} + \omega_{h_\nu+2}^{(\lambda)} = \cdots = \omega_{h_\nu+1}^{(\lambda)} \qquad \nu = 1, 2, \cdots i-1$$

können wir diese Gleichung auch in der Form schreiben

$$p_{\lambda\mu} = \sum_{\nu=1}^{i-1} \omega_{h_\nu+1}^{(\lambda)} \left[\sum_{\varrho=h_\nu+1}^{h_{\nu+1}} \varepsilon_\varrho^{\mu\varrho} \right]$$

Demnach ist $p_{\lambda\mu} = 0$ für $\lambda = 1, 2, \cdots l$; $\mu = l+1, l+2, \cdots m_1$.*)

Es seien nun λ *und* μ Zahlen aus der Reihe $l+1, l+2, \cdots m_1$. Alsdann ist $\varepsilon_\sigma^{\lambda\varrho} = 0$, wenn ϱ eine Zahl aus der Reihe $1, 2, \cdots l$ ist. Ist ϱ eine Zahl aus der Reihe $l+1, l+2, \cdots m_1$ oder eine Zahl aus der Reihe $h_\nu + 1, h_\nu + 2, \cdots h_{\nu+1}$ $(\nu = 1, 2, \cdots i-1)$ so ist, damit $\varepsilon_\sigma^{\lambda\varrho}$ nicht verschwindet, erforderlich, daß die Zahl σ jedesmal derselben Zahlreihe angehört. Demnach ist

$$p_{\lambda\mu} = \sum_{\varrho=l+1}^{m_1} \sum_{\sigma=l+1}^{m_1} \varepsilon_\sigma^{\lambda\varrho}\, \varepsilon_\varrho^{\mu\sigma} + \sum_{\nu=1}^{i-1} \sum_{\varrho=h_\nu+1}^{h_\nu+1} \sum_{\sigma=h_\nu+1}^{h_\nu+1} \varepsilon_\sigma^{\lambda\varrho}\, \varepsilon_\varrho^{\mu\sigma}.$$

Die Betrachtung am Schluß des vorigen Paragraphen zeigt, daß $p_{\lambda\mu} = 0$. Damit ist unter der Voraussetzung $m_1 > l$ bewiesen: $p_{\lambda\mu} = 0$, wenn eine der Zahlen λ, μ der Reihe $l+1, l+2, \cdots m_1$ angehört. Da $\psi_2(e)$ eine vollständige quadratische Form ist, so folgt $m_1 = l$. Die im vorigen Paragraphen mit Γ_0'' bezeichnete Untergruppe reduziert sich auf die identische Substitution.

Nehmen wir nunmehr an, die beiden Zahlen λ, μ seien größer als m_1. Damit $p_{\lambda\mu}$ von Null verschieden ist, ist erforderlich

$$\omega_\lambda^{(\tau)} + \omega_\mu^{(\tau)} = 0 \qquad (\tau = 1, 2, \cdots l).$$

Es gehört also zu jeder Wurzel $\omega_\lambda^{(\tau)}$ eine ihr entgegengesetzt gleiche $\omega_\mu^{(\tau)} = -\omega_\lambda^{(\tau)}$. Da $(C_\lambda C_\mu)$ zur Wurzel 0 gehört, so ist

$$(2) \qquad (C_\lambda C_\mu) = e_1 C_1(f) + e_2 C_2(f) + \cdots + e_l C_l(f).$$

Es handelt sich nun darum zu untersuchen, ob alle l Konstanten e gleichzeitig verschwinden können.

Nehmen wir an in der Reihe der Größen

$$\omega_\varrho^{(1)} - \omega_\lambda^{(1)} \quad \omega_\varrho^{(1)} - 2\omega_\lambda^{(1)} \quad \omega_\varrho^{(1)} - 3\omega_\lambda^{(1)} \cdots$$

sei $\omega_{h_1+1}^{(1)} = \omega_{\lambda_2}^{(1)}$ die letzte, die Wurzel der Gleichung $\Delta_1(\omega) = 0$ ist.

In der Reihe der Größen

$$\omega_\varrho^{(1)} + \omega_\lambda^{(1)}, \ \omega_\varrho^{(1)} + 2\omega_\lambda^{(1)}, \ \omega_\varrho^{(1)} + 3\omega_\lambda^{(1)} \cdots$$

sei $\omega_{h_\alpha+1}^{(1)} = \omega_{h_{\alpha+1}}^{(1)}$ die letzte, die Wurzel der Gleichung $\Delta_1(\omega) = 0$ ist.

Es sei ferner die Bezeichnung der Wurzeln so gewählt, daß

$$\omega_{h_2}^{(1)} + \omega_\lambda^{(1)} = \omega_{h_2}^{(1)}, \ \omega_{h_3}^{(1)} + \omega_\lambda^{(1)} = \omega_{h_4}^{(1)} \cdots \omega_{h_\alpha}^{(1)} + \omega_\lambda^{(1)} = \omega_{h_{\alpha+1}}^{(1)}.$$

*) Vergl. den Schluß des vorigen Paragraphen.

In dem Fall, daß etwa $\omega^{(1)}_{h_2} + (\varkappa - 1)\omega^{(1)}_{\lambda} = 0$ hat man $\omega^{(1)}_{h_{\varkappa+1}}$ durch Null zu ersetzen. Für die folgenden Überlegungen macht das keinen Unterschied.

Es ist nun

$$(3)\qquad (C_\lambda C_\sigma) = \sum_{\varkappa=h_\nu+1}^{h_{\nu+1}} \varepsilon_\varkappa^{\lambda\sigma} C_\varkappa(f) \quad \text{für} \quad \sigma = h_{\nu-1}+1,\ h_{\nu-1}+2, \cdots h_\nu$$
$$\nu = 2, 3, \cdots \alpha,$$
$$(C_\lambda C_\sigma) = 0 \quad \text{für} \quad \sigma = h_\alpha + 1,\ h_\alpha + 2, \cdots h_{\alpha+1}$$

Ferner ist wegen $\omega^{(1)}_\mu = -\omega^{(1)}_\lambda$

$$(4)\qquad (C_\mu C_\sigma) = \sum_{\varkappa=h_\nu+1}^{h_{\nu+1}} \varepsilon_\varkappa^{\mu\sigma} C_\varkappa(f) \quad \text{für} \quad \sigma = h_{\nu+1}+1, h_{\nu+1}+2, \cdots h_{\nu+2}$$
$$\nu = 1, 2 \cdots \alpha - 1,$$
$$(C_\mu C_\sigma) = 0 \quad \text{für} \quad \sigma = h_1 + 1,\ h_1 + 2, \cdots h_2.$$

Wir bilden nun die Jacobischen Identitäten

$$(5)\qquad (C_\sigma(C_\lambda C_\mu)) + (C_\lambda(C_\mu C_\sigma)) + (C_\mu(C_\sigma C_\lambda)) = 0.$$

Es ist

$$(C_\sigma(C_\lambda C_\mu)) = \sum_{\varkappa=1}^{l} e_\varkappa (C_\sigma C_\varkappa) = -\sum_{\varkappa=1}^{l} \omega^{(\varkappa)}_\sigma e_\varkappa C_\sigma(f).$$

Ferner ist, wenn $\omega^{(1)}_\sigma = \omega^{(1)}_{h_\nu+1}$ für $\nu = 2, 3, \cdots \alpha$

$$(C_\lambda(C_\mu C_\sigma)) = \sum_{\varkappa=h_{\nu-1}+1}^{h_\nu} \varepsilon_\varkappa^{\mu\sigma} (C_\lambda C_\varkappa) = \sum_{\varkappa=h_{\nu-1}+1}^{h_\nu} \sum_{\iota=h_\nu+1}^{h_{\nu+1}} \varepsilon_\varkappa^{\mu\sigma} \varepsilon_\iota^{\lambda\varkappa} C_\iota(f).$$

Für $\omega^{(1)}_\sigma = \omega^{(1)}_{h_2}$ wird $(C_\mu C_\sigma) = 0$ also auch

$$(C_\lambda(C_\mu C_\sigma)) = 0.$$

Für $\omega^{(1)}_\sigma = \omega^{(1)}_{h_\nu+1}$ ist weiter $(\nu = 1, 2, \cdots \alpha - 1)$

$$(C_\mu(C_\sigma C_\lambda)) = -\sum_{\varkappa=h_{\nu+1}+1}^{h_{\nu+2}} \varepsilon_\varkappa^{\lambda\sigma} (C_\mu C_\varkappa) = -\sum_{\varkappa=h_{\nu+1}+1}^{h_{\nu+2}} \sum_{\iota=h_\nu+1}^{h_{\nu+1}} \varepsilon_\varkappa^{\lambda\sigma} \varepsilon_\iota^{\mu\varkappa} C_\iota(f).$$

Hierzu kommt

$$(C_\mu(C_\sigma C_\lambda)) = 0$$

wenn

$$\omega^{(1)}_\sigma = \omega^{(1)}_{h_{\alpha+1}}.$$

Wir führen die ausgerechneten Werte in die Gleichung (5) ein, setzen den Koeffizienten von $C_\sigma(f)$ gleich Null und geben, wenn

$$\omega_\sigma^{(1)} = \omega_{h_\nu+1}^{(1)}$$

ist, σ der Reihe nach die Werte

$$h_\nu + 1, \quad h_\nu + 2, \cdots, h_{\nu+1}$$

und addieren. Wir erhalten:

$$(6)\quad m_2 \sum_{x=1}^{l} \omega_{h_2}^{(x)} e_x = -\sum_{\sigma=h_1+1}^{h_2} \sum_{x=h_2+1}^{h_3} \varepsilon_x^{\lambda\sigma}\varepsilon_\sigma^{\mu x}, \qquad \omega_\sigma^{(1)} = \omega_{h_2}^{(1)}$$

$$m_{\nu+1} \sum_{x=1}^{l} \omega_{h_\nu+1}^{(x)} e_x = \sum_{\sigma=h_\nu+1}^{h_{\nu+1}} \sum_{x=h_{\nu-1}+1}^{h_\nu} \varepsilon_x^{\mu\sigma}\varepsilon_\sigma^{\lambda x} - \sum_{\sigma=h_\nu+1}^{h_{\nu+1}} \sum_{x=h_{\nu+1}+1}^{h_{\nu+2}} \varepsilon_x^{\lambda\sigma}\varepsilon_\sigma^{\mu x}, \qquad \omega_\sigma^{(1)} = \omega_{h_{\nu+1}}^{(1)}$$

$$\nu = 2, 3, \cdots, \alpha-1$$

$$m_{\alpha+1} \sum_{x=1}^{l} \omega_{h_\alpha+1}^{(x)} e_x = \sum_{\sigma=h_\alpha+1}^{h_{\alpha+1}} \sum_{x=h_{\alpha-1}+1}^{h_\alpha} \varepsilon_x^{\mu\sigma}\varepsilon_\sigma^{\lambda x} \qquad \omega_\sigma^{(1)} = \omega_{h_{\alpha+1}}^{(1)}$$

Vertauscht man in den rechts an erster Stelle stehenden Doppelsummen die Summationsbuchstaben x und σ, so erkennt man daß eine jede dieser Doppelsummen gleich der in der vorhergehenden Gleichung an zweiter Stelle stehenden Doppelsumme ist.

Nehmen wir an, daß die in (2) auftretenden Größen $e_1 e_2 \cdots e_l$ alle verschwinden, dann ergibt sich

$$(7)\quad \sum_{\sigma=h_\nu+1}^{h_{\nu+1}} \sum_{x=h_{\nu+1}+1}^{h_{\nu+2}} \varepsilon_x^{\lambda\sigma}\varepsilon_\sigma^{\mu x} = 0 \quad \text{für} \quad \omega_\sigma^{(1)}\omega_{h_\nu+1}^{(1)}. \qquad \nu = 1, 2, \cdots, \alpha$$

Kehren wir nun zu dem in $\psi_2(e)$ auftretenden Koeffizienten

$$(1)\quad \gamma_{\lambda\mu} = \sum_{\sigma=1}^{r} \sum_{x=1}^{r} \varepsilon_x^{\lambda\sigma}\varepsilon_\sigma^{\mu x}$$

zurück. Wir fassen alle die Glieder von $p_{\lambda\mu}$ zusammen, die der Bedingung genügen, daß $\omega_\sigma^{(1)}$ einen festen Wert hat.

Sei etwa $\omega_\sigma^{(1)} = \omega_{h_\nu+1}^{(1)}$. Es ist dann $\varepsilon_x^{\lambda\sigma} = 0$, wenn nicht x einen der Werte $h_{\nu+1} + 1$, $h_{\nu+1} + 2, \cdots, h_{\nu+2}$ hat. Demnach ist die Summe der in Rede stehenden Glieder von $p_{\lambda\mu}$ gleich der linken Seite der Gleichung (7) also gleich Null.

Demnach ist $p_{\lambda\mu} = 0$, wenn $(C_\lambda C_\mu) = 0$.

Unter den inf. Transf., die zur Wurzel $\omega_\mu^{(1)} = -\omega_\lambda^{(1)}$ gehören, muß es folglich mindestens eine geben — etwa $C_\mu(f)$ — für die $(C_\lambda C_\mu)$ nicht verschwindet, denn sonst käme e_λ in der quadratischen Form $\psi_2(e)$ nicht vor.

Wir setzen nunmehr voraus, daß in den Gleichungen (2) die Größen $e_1 e_2 \cdots e_l$ nicht gleichzeitig verschwinden und ziehen aus den Gleichungen 6) noch eine weitere Folgerung.

Wir haben diese Gleichungen unter der Voraussetzung abgeleitet, dass $\omega_{h_2}^{(1)} - \omega_\lambda^{(1)}$ nicht Wurzel der Gleichung $\Delta_1(\omega) = 0$ ist. Lassen wir diese Voraussetzung fallen, so kann man die erste der Gleichungen 6) nicht mehr beweisen, aber die übrigen bleiben in Geltung.

Nehmen wir nun an es sei

$$\omega_\lambda^{(\varkappa)} = \omega_{h_2}^{(\varkappa)} \quad \text{für} \quad \varkappa = 1, 2, \cdots, l,$$

demnach auch

$$\omega_{h_\nu+1}^{(\varkappa)} = \omega_{h_\nu+1}^{(\varkappa)} = \nu\omega_{h_2}^{(\varkappa)}.$$

Zu den in Geltung gebliebenen Gleichungen (6) tritt nun noch die Gleichung

$$h_2 \sum_{\varkappa=1}^{l} \omega_{h_2}^{(\varkappa)} e_\varkappa = \sum_{\sigma=h_1+1}^{h_2} \sum_{\varkappa=1}^{l} \varepsilon_\varkappa^{\mu\sigma}\, \varepsilon_\sigma^{\lambda\varkappa} - \sum_{\sigma=h_1+1}^{h_2} \sum_{\varkappa=h_2+1}^{h_2} \varepsilon_\varkappa^{\lambda\sigma}\, \varepsilon_\sigma^{\mu\varkappa} \qquad \omega_\sigma^{(1)} = \omega_{h_2}^{(1)}.$$

Addieren wir diese sämtlichen Gleichungen, so ergibt sich:

$$\sum_{\nu=1}^{\alpha} \sum_{\varkappa=1}^{l} m_{\nu+1}\, \omega_{h_\nu+1}^{(\varkappa)}\, e_\varkappa = \sum_{\sigma=h_1+1}^{h_2} \sum_{\varkappa=1}^{l} \varepsilon_\varkappa^{\mu\sigma}\, \varepsilon_\sigma^{\lambda\varkappa}.$$

Nun ist

$$\omega_{h_\nu+1}^{(\varkappa)} = \nu\omega_\lambda^{(\varkappa)}, \qquad (\varkappa = 1, 2, \cdots, l), \qquad \varepsilon_\sigma^{\lambda\varkappa} = -\binom{\sigma}{\lambda}\omega_\lambda^{(\varkappa)}, \quad \varepsilon_\varkappa^{\mu\lambda} = -e_\varkappa,$$

folgl.

$$\sum_{\nu=1}^{\alpha} \sum_{\varkappa=1}^{l} \nu m_{\nu+1}\, \omega_\lambda^{(\varkappa)}\, e_\varkappa = \sum_{\varkappa=1}^{l} \omega_\lambda^{(\varkappa)}\, e_\varkappa$$

oder

$$\left[\sum_{\nu=1}^{\alpha} \nu m_{\nu+1} - 1\right] \cdot \left[\sum_{\varkappa=1}^{l} \omega_\lambda^{(\varkappa)}\, e_\varkappa\right] = 0.$$

Man überzeugt sich leicht, daß

$$\eta = \sum_{\varkappa=1}^{l} \omega_\lambda^{(\varkappa)}\, e_\varkappa \neq 0.$$

Setzen wir nämlich

$$K(f) = \sum_{x=1}^{l} e_x C_x(f),$$

so bestehen die Gleichungen

$$(K C_\lambda) = \eta C_\lambda(f), \quad (K C_\mu) = -\eta C_\mu(f), \quad (C_\lambda C_\mu) = K(f).$$

Aus dem Hilfssatz (3) des § 6 ergibt sich, daß diese Gleichungen nicht bestehen können, wenn $\eta = 0$ ist.

Demnach ist

$$\sum_{\nu=1}^{\alpha} \nu m_{\nu+1} = 1$$

folgl. $$\alpha = 1, \quad m_2 = 1.$$

Die Gleichung $\Delta_1(\omega) = 0$ hat also, abgesehen von der λ-fachen Wurzel $\omega = 0$, nur einfache Wurzeln.

Die Anzahl $i - 1$ der von Null verschiedenen Wurzeln ist gerade, weil mit $\omega_\lambda^{(1)}$ auch $-\omega_\lambda^{(1)}$ Wurzel ist. Sei $i = 2k+1$ also $r = l+2k+1$. Ich denke mir die Bezeichnung der Wurzeln nunmehr so gewählt, daß

$$\omega_1^{(x)} = \omega_2^{(x)} = \cdots = \omega_l^{(x)} = 0 \quad \text{und} \quad \omega_{l+2\lambda}^{(x)} = -\omega_{l+2\lambda-1}^{(x)}$$

für $$\lambda = 1, 2, \cdots, k; \quad x = 1, 2, \cdots, l,$$

und zwar möge $\omega_{l+2\lambda-1}^{(1)}$ positiv, $\omega_{l+2\lambda}^{(1)}$ negativ sein.

Es bestehen nun Gleichungen der Form

$$(C_{l+2\lambda-1} C_{l+2\lambda}) = K_\lambda(f) = \sum_{x=1}^{l} e_{\lambda x} C_x(f), \qquad \lambda = 1, 2, \cdots, k$$

$$(K_\lambda C_{l+2\lambda-1}) = \eta_\lambda C_{l+2\lambda-1}(f), \qquad K_\lambda C_{l+2\lambda}) = -\eta_\lambda C_{l+2\lambda}(f).$$

Die hier auftretenden Größen

$$\eta_\lambda = \sum_{x=1}^{l} e_{\lambda x} \omega_{l+2\lambda-1}^{(x)}$$

sind sämtlich von Null verschieden. Indem man die inf. Transf. $C_{l+2\lambda-1}(f)$, $C_{l+2\lambda}(f)$ mit passenden Konstanten multipliziert, kann man erreichen, daß diese Konstanten η_λ sämtlich den Wert 2 erhalten.

Die 3 inf. Transf. $K_\lambda(f)$, $C_{l+2\lambda-1}(f)$, $C_{l+2\lambda}(f)$ bilden ein Tripel (§ 7). Jede ganze Funktion, die zweien dieser 3 inf. Transf. gegenüber invariant ist, ist auch gegenüber der dritten invariant (§ 8).

Daraus folgt: Jede ganze Funktion, die gegenüber den $C+k$ inf. Transf.

(8) $$C_1(f), \; C_2(f) \cdots C_l(f), \; C_{l+1}(f), \; C_{l+3}(f) \cdots C_{l+2x-1}(f)$$

invariant ist, ist auch den inf. Transf.

$$C_{i+2}(f), \quad C_{i+4}(f) \cdots C_{i+2k}(f)$$

gegenüber invariant.

Nun erzeugen die inf. Transf. (8) eine Untergruppe H_1, die sich aus den Untergruppen Γ_0 und Γ_i zusammensetzt (s. den vorigen Paragraphen).

Jede ganze Funktion, die der Untergruppe H_1 gegenüber invariant ist, ist auch der Gesamtgruppe G gegenüber invariant.

Tübingen, den 30. Januar 1900.

(Fortsetzung folgt.)

Über Zerlegung von Rechtecken in Rechtecke.

Von

M. Dehn in Münster i./W.

Im folgenden soll ein einfaches und doch recht allgemeines Problem der Geometrie eine erste Behandlung erfahren. Zu der Fragestellung leitet uns folgende Überlegung: Jedes ebene Polygon läßt sich, wie leicht ersichtlich, aus rechtwinkligen Dreiecken zusammensetzen, also aus Gliedern einer zweigliedrigen Schar von Polygonen. Es entsteht die Frage: gibt es eine eingliedrige Schar von Figuren, etwa Dreiecken, aus deren Gliedern sich jedes Polygon zusammensetzen läßt? Diese Frage ist höchst wahrscheinlich zu verneinen. Im folgenden soll nun ein besonderer Fall erledigt werden, der uns den Satz liefert: Aus den Gliedern einer eingliedrigen Schar von Rechtecken läßt sich nicht jedes Rechteck zusammensetzen (genauer: läßt sich wieder nur eine eingliedrige Schar von Rechtecken zusammensetzen). Wir werden spezielle Fälle, in denen die Gültigkeit dieses Satzes sich ziemlich leicht ergibt, und die doch andrerseits die Methode zur Erledigung des allgemeineren Falles zugänglicher machen, vorausschicken.

1.

Analytische Formulierung.

Wir gehen von der Bemerkung aus, daß sich jedes Rechteck nur so in Rechtecke zerlegen läßt, daß die Seiten der Teilrechtecke je der einen oder anderen Seite des großen Rechtecks parallel sind. Dies ergibt sich sofort, wenn man mit der Zusammensetzung in einer Ecke des großen Rechtecks beginnt. Durch die „Ausfüllung" einer Ecke durch ein Rechteck hinterbleibt ein noch auszufüllendes Polygon mit nur solchen Winkeln, deren Schenkel den Seiten des großen Rechtecks parallel sind. Durch Ausfüllung einer Ecke dieser Figur durch ein Rechteck entsteht eine neue Figur von derselben Beschaffenheit usw., so daß die Richtigkeit der Bemerkung einleuchtet.

Sei nun eine Zerlegung des Rechtecks mit den Seiten x_0 und y_0 in Rechtecke mit den Seiten x_1 und y_1, x_2 und y_2, $\cdots$, x_n und y_n vorgelegt, wobei die Seiten x_i der Seite x_0, die Seiten y_i der Seite y_0 parallel sind. Seien

$$S_x \begin{cases} l_1^x(x_0, x_1 \cdots x_n) = 0 \\ l_2^x(x_0, x_1 \cdots x_n) = 0 \\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \end{cases} \quad \text{und} \quad S_y \begin{cases} l_1^y(y_0, y_1 \cdots y_n) = 0 \\ l_2^y(y_0, y_1 \cdots y_n) = 0 \\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \end{cases}$$

diejenigen homogenen, linearen, ganzzahligen und von einander unabhängigen Beziehungen, die zwischen $x_0, x_1 \cdots x_n$ und zwischen $y_0, y_1 \cdots y_n$ bestehen.

Es befriedigen diese Größen ferner nach Voraussetzung die Gleichung

$$x_0 y_0 = x_1 y_1 + x_2 y_2 + \cdots + x_n y_n. \tag{I}$$

Aus der speziellen Eigenschaft aber der Größenpaare $x_1, y_1; \cdots x_n, y_n$, daß die aus ihnen gebildeten Rechtecke das Rechteck x_0, y_0 einfach und lückenlos überdecken können, folgt nun:

Satz 1. Jedes System von Werten x_0, y_0; $x_1, y_1; \cdots : x_n, y_n$, das die Gleichungen S_x und S_y befriedigt, erfüllt auch die Gleichung (I).

Zum Beweise lassen wir zwei Seiten des in die Rechtecke $x_1, y_1; \cdots$ zerlegten Rechtecks x_0, y_0 zusammenfallen mit den positiven Achsen eines Koordinatensystems und zwar die Seite von der Länge y_0 mit der y-Achse. Dann ist jedem der Eckpunkte jedes Rechtecks x_i, y_i ein Koordinatenpaar zugeordnet, das wir je nach der Wahl des Eckpunkts mit $x_{i,0}$, $y_{i,0}$; $x_{i,1}$, $y_{i,0}$; $x_{i,0}$, $y_{i,1}$ und $x_{i,1}$, $y_{i,1}$ bezeichnen, wo

$$x_{i,1} = x_{i,0} + x_i; \quad y_{i,1} = y_{i,0} + y_{i,1}$$

ist. Jede der Größen $x_{i,0}$ und $x_{i,1}$ kann, wie leicht ersichtlich, auf mannigfache Weise als Summe von Größen $x_k, x_l, \cdots$, jede der Größen $y_{i,0}$ und $y_{i,1}$ ebenso als Summe von Größen $y_i, y_k, \cdots$ dargestellt werden.

Führen wir nun zunächst statt des gegebenen Größensystems $x_0, x_1 \cdots$, $y_0, y_1 \cdots$ ein neues $\bar{x}_0, \bar{x}_1 \cdots$, $y_0, y_1 \cdots$ ein, in dem wir, wie schon die Bezeichnung andeutet, nur die Größen $x_0 \cdots$ abgeändert haben und zwar so, daß auch die abgeänderten Größen $\bar{x}_0 \cdots$ die Gleichungen S_x befriedigen. Wir wollen ferner diese Veränderung als so klein annehmen, daß wie die Größen $x_0 \cdots$ so auch die Größen $\bar{x}_0 \cdots$ sämtlich positiv sind. Wir ordnen nun den Punkten $x_{i,0}, y_{i,0}$; $x_{i,1}, y_{i,0}$; $x_{i,0}, y_{i,1}$; $x_{i,1}, y_{i,1}$ solche neue Abscissen $\bar{x}_{i,0}, \bar{x}_{i,1}$ zu, wie sie sich durch Einsetzung der neuen Größen $\bar{x}_0, \cdots$ in die Darstellung der alten Abscissen durch die alten Größen $x_0, \cdots$ ergeben. Zunächst ist diese Zuordnung eindeutig. Denn war vorher etwa:

$$x_{i,0} = x_{k_1} + x_{l_1} + \cdots = x_{k_2} + x_{l_2} + \cdots$$

so wird jetzt:

$$\bar{x}_{i,0} = \bar{x}_{k_1} + \bar{x}_{l_1} + \cdots = \bar{x}_{k_2} + \bar{x}_{l_2} + \cdots$$

weil die Größen $\bar{x}_{k_1}, \bar{x}_{l_1}, \cdots, \bar{x}_{k_2}, \bar{x}_{l_2}, \cdots$ nach Voraussetzung die sämtlichen ganzzahligen linearen Beziehungen, die zwischen den $x_{k_1}, x_{l_1}, \cdots, x_{k_2}, x_{l_2}, \cdots$ bestehen, ebenfalls erfüllen. Es ergibt sich ferner, daß

$$\bar{x}_{i,1} = \bar{x}_{i,0} + \bar{x}_i$$

ist. Denn war

$$x_{i,0} = x_k + x_l + \cdots,$$

so ergibt sich für $x_{i,1}$ die Darstellung:

$$x_{i,1} = x_k + x_l + \cdots + x_i.$$

Also für die neuen Werte:

$$\bar{x}_{i,0} = \bar{x}_k + \bar{x}_l + \cdots,$$
$$\bar{x}_{i,1} = \bar{x}_k + \bar{x}_l + \cdots + \bar{x}_i.$$

Und daraus:

$$\bar{x}_{i,1} - x_{i,0} = \bar{x}_i.$$

Aus den Rechtecken mit den Seiten x_i und y_i werden demgemäß Rechtecke mit den Seiten $\bar{x}_i$ und y_i, welche gegen die früheren lediglich nach rechts oder links verschoben und in ihrer Breite abgeändert sind. Sie sind aber weder nach unten oder oben verschoben noch in ihrer Höhe verändert. Daraus ergibt sich unmittelbar: Fielen die Basen (zu der Seite x_0 parallelen Seiten) zweier Rechtecke vor der Abänderung in eine Gerade, so liegen sie auch nach dieser in einer Geraden. Aber wir können auch leicht schließen: Fielen die Höhen zweier Rechtecke vor der Abänderung in eine Gerade, so liegen sie auch nachher in einer Geraden. Denn war etwa:

$$x_{i,0} = x_{k,0}$$

und:

$$x_{i,0} = x_{k_1} + x_{l_1} + \cdots,$$
$$x_{k,0} = x_{k_2} + x_{l_2} + \cdots,$$

so folgt:

$$x_{k_1} + x_{l_1} + \cdots = x_{k_2} + x_{l_2} + \cdots.$$

Dann ist auch:

$$\bar{x}_{i,0} = \bar{x}_{k_1} + \bar{x}_{l_1} + \cdots,$$
$$\bar{x}_{k,0} = \bar{x}_{k_2} + \bar{x}_{l_2} + \cdots,$$

$$\bar{x}_{k_1} + \bar{x}_{l_1} + \cdots = \bar{x}_{k_2} + \bar{x}_{l_2} + \cdots.$$

Also auch:

$$\bar{x}_{i,0} = \bar{x}_{k,0}$$

und auch die Höhen mit den neuen Abscissen $x_{i,0}$ und $x_{k,0}$ liegen in einer Geraden.

Damit ist die Lückenlosigkeit der Bedeckung des Rechtecks $\bar{x}_0, y_0$ mit den Rechtecken $\bar{x}_1, y_1$; $\bar{x}_2, y_2$; $\cdots$ gewährleistet. Wir haben noch die

„Einfachheit" dieser Bedeckung nachzuweisen. Angenommen nun, zwei Rechtecke mit den Ecken $x_{i,0}\, y_{i,0} \cdots$ und $x_{k,0}\, y_{k,0} \cdots$ gingen durch die Abänderung in die Rechtecke $\bar{x}_{i,0}, y_{i,0} \cdots$ und $\bar{x}_{k,0}, y_{k,0} \cdots$ über, die übereinandergriffen. Da die Abänderung die Rechtecke nicht nach oben oder unten verschiebt, auch ihre Höhen nicht verändert, so müssen diese beiden Rechtecke so liegen, daß sie durch eine Verschiebung parallel zur x-Achse zum Übereinandergreifen gebracht werden können. Ist etwa $x_{i,0} > x_{k,1}$, dann muß, wenn die Abänderung die Rechtecke übereinanderschieben soll, jedenfalls $\bar{x}_{k,1} > \bar{x}_{i,0}$ sein. Es sei nun

$$x_{i,0} = x_{k,1} + x_r + x_s + \cdots,$$

wo $x_r, x_s \cdots$ Grundlinien von Rechtecken zwischen den Rechtecken x_i und x_k bedeuten.

Es folgt:

$$\bar{x}_{i,0} = \bar{x}_{k,1} + \bar{x}_k + \bar{x}_r + \cdots.$$

Also da nach Voraussetzung auch alle abgeänderten Größen positiv sein sollen:

$$\bar{x}_{i,0} > x_{k,1}.$$

Also ist ein Übereinandergreifen der abgeänderten Rechtecke $\bar{x}_0, \bar{x}_1;$ $\bar{x}_1, y_1; \cdots; \bar{x}_n, y_n$ unmöglich und wir haben damit nachgewiesen, daß $\bar{x}_0, y_0$ von $\bar{x}_1, y_1, \cdots$ einfach und lückenlos überdeckt wird. Folglich befriedigen $\bar{x}_0, y_0;$ $\bar{x}_1, y_1; \cdots$ auch die Gleichung (I).

Verändern wir jetzt auch die Größen $y_1 \cdots$ und stellen die analogen Betrachtungen an, so ergibt sich: Jedes System von lauter positiven Größen $\bar{x}_0, \bar{y}_0;$ $\bar{x}_1, \bar{y}_1; \cdots$ das in S_x und S_y für $x_0, y_0;$ $x_1, y_1; \cdots$ eingesetzt diese Gleichungssysteme befriedigt, erfüllt auch die Gleichung (I). Weil aber die Gleichungen S_x und S_y linear sind und die Gleichung (I) eine analytische ist, so können wir die Voraussetzung der Positivität (die wir zur Erleichterung der geometrischen Betrachtung eingeführt haben) fallen lassen. Wir lassen jetzt die Striche über den $\bar{x}_0, \bar{y}_0$ weg, indem wir uns die zunächst fest gegebenen Größen x_0, y_0 variabel denken und erhalten den Satz 1.

Man kann diesen Satz auch geometrisch deuten: Die lineare Mannigfaltigkeit, welche im Raume der $x_0, y_0, x_1, y_1, \cdots, x_n, y_n$ durch die linearen Gleichungssysteme S_x und S_y bestimmt wird, liegt auf der quadratischen Mannigfaltigkeit, die durch (I) gegeben ist.

Soll es also möglich sein, aus den Rechtecken mit den Seiten $x_1, y_1; \cdots; x_n, y_n$ ein Rechteck zusammenzusetzen, so müssen zwischen diesen Größen gewisse lineare ganzzahlige Beziehungen bestehen, welche von der Art sind, wie sie aus S_x und S_y durch Elimination von x_0 und y_0

entstehen. Wir wollen nun im folgenden besondere Klassen von Rechtecken betrachten. Aus ihnen werden durch jene Bedingungen gewisse Unterklassen ausgeschieden, deren Glieder imstande sind mit einander Rechtecke zusammenzusetzen. Diese werden häufig wieder derselben Unterklasse angehören.

2.

Die einfachsten Beispiele.

a) Rechtecke mit kommensurabelen Seiten.

Sei etwa:

$$y_1 = r_1 x_1,\ y_2 = r_2 x_2, \cdots, y_n = r_n x_n.$$

Setzen wir diese Werte von $y_1 \cdots y_n$ in die Gleichungssysteme S_x und S_y sowie in die Gleichung (I) ein, so ergibt sich:

Soll es möglich sein aus den Rechtecken $y_1, x_1; \cdots; y_n, x_n$ ein Rechteck, etwa mit den Seiten x_0 und y_0, zusammenzusetzen, so muß jedes Wertesystem $x_0, x_1, \cdots, x_n$, welches

$$S \begin{cases} l_1(x_0, y_0, x_1, x_2, \cdots, x_n) = 0, \\ l_2(x_0, y_0, x_1, x_2, \cdots, x_n) = 0, \\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \end{cases}$$

das System aller ganzzahligen Beziehungen zwischen $x_0, y_0, x_1, \cdots, x_n$, befriedigt, auch die Gleichung:

$$x_0 y_0 = r_1 x_1^2 + r_2 x_2^2 + \cdots + r_n x_n^2 \tag{1}$$

erfüllen. Setzen wir in (1) $x_0 = -y_0$, so ergibt sich,

$$x_0 = y_0 = x_1 = x_2 = \cdots = x_n = 0$$

als einziges reelles Wertesystem, das diese Gleichung erfüllt. Dieses Wertesystem ist demnach auch das einzige, welches die Gleichungen S und die Gleichung $x_0 = -y_0$ gleichzeitig befriedigt. Daraus folgt aber, daß S aus $n+1$ Gleichungen bestehen muß. Denn aus weniger als $n+2$ linearen Gleichungen zwischen $n+2$ Variabeln kann niemals das identische Verschwinden aller Variabeln gefolgert werden. Da nun der Fall, daß eine der Größen $x_0, y_0, x_1, \cdots, x_n$ verschwindet auszuschließen ist, so folgt, daß diese Größen alle zu einander in rationalen Verhältnissen stehen. Wir haben also den Satz:

Läßt sich aus einer Anzahl von Rechtecken ein Rechteck zusammensetzen und stehen die Seiten jedes einzelnen der Teil-Rechtecke in rationalem Verhältnis zu einander, so stehen die Seiten sämtlicher Teil-Rechtecke untereinander und mit den Seiten des zusammengesetzten Rechtecks in rationalem Verhältnis.

Als Spezialfälle von diesem Satz wollen wir folgende erwähnen:

Ein Quadrat läßt sich nur in Quadrate mit kommensurabeln Seiten zerlegen. Legt man also in eine Ecke eines Quadrates ein Quadrat, dessen Seite nicht kommensurabel ist mit der Seite des großen Quadrates, so läßt sich der übrig bleibende Teil des großen Quadrates auf keine Weise in Quadrate zerlegen.

Ein Rechteck mit nicht kommensurabelen Seiten läßt sich nicht in Quadrate zerlegen.

b) Rechtecke mit Seiten, die in vorgegebenem Verhältnis zu einander stehen.

Sei

$$y_1 = a_1 x_1,\ y_2 = a_2 x_2, \cdots, y_n = a_n x_n,$$

wo $a_1, a_2, \cdots, a_n$ irgend welche positive Zahlen sind. Setzen wir diese Werte von $y_1 \cdots y_n$ in S_x, S_y und (I) ein, so ergibt sich:

Angenommen, es läßt sich aus den Rechtecken mit den Seiten x_1 und y_1, x_2 und $y_2, \cdots, x_n$ und y_n ein Rechteck, etwa mit den Seiten x_0 und y_0, zusammensetzen und sei:

$$S\begin{cases} l_1(x_0, y_0, x_1, x_2, \cdots, x_n) = 0, \\ l_2(x_0, y_0, x_1, x_2, \cdots, x_n) = 0, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots \\ \cdots\cdots\cdots\cdots \end{cases}$$

das System aller solcher linearen homogenen Gleichungen zwischen $x_0, y_0, x_1, \cdots, x_n$, in denen die Koeffizienten von $x_0, y_0, x_1, \cdots, x_n$ beziehungsweise von der Form:

$$r_0, \varrho_0, r_1 + \varrho_1 a_1,\ r_2 + \varrho_2 a_2, \cdots, r_n + a_n \varrho_n$$

sind, wo $r_0, \varrho_0, r_1, \varrho_1, \cdots, r_n, \varrho_n$ rationale Zahlen sind. Dann muß jedes Wertesystem $x_0, y_0, x_1, \cdots, x_n$, das S befriedigt, auch die Gleichung

$$x_0 y_0 = a_1 x_1^2 + a_2 x_2^2 + \cdots + a_n x_n^2$$

befriedigen. Setzen wir jetzt wieder $x_0 = -y_0$, so erhalten wir aus dieser Gleichung

$$x_0 = y_0 = x_1 = x_2 = \cdots = x_n = 0.$$

Folglich muß S wieder aus $n+1$ Gleichungen bestehen und es ergibt sich:

$$y_0 = a_0 x_0;\ x_1 = k_1 x_0,\ x_2 = k_2 x_0, \cdots, x_n = k_n x_0.$$

Zu jedem Werte x_i gehört also nur ein einziges Wertesystem $x_0, x_1, \cdots, x_n$; $y_0, y_1, \cdots, y_n$. Ferner ist bemerkenswert, daß die Größen $a_0; k_1, k_2, \cdots, k_n$ rationale Ausdrücke in $a_1, \cdots, a_n$ mit rationalen Koeffizienten sind. Die so erhaltenen Resultate können wir in folgende Formen bringen:

1) Sei ein Rechteck x_0, y_0 vorgelegt, das in die Rechtecke x_1, y_1; x_2, y_2; $\cdots$; x_n, y_n geteilt ist. Dann ist:

$$\frac{x_0}{y_0} = R\left(\frac{x_1}{y_1}, \frac{x_2}{y_2}, \cdots, \frac{x_n}{y_n}\right),$$

wo R eine rationale Funktion der Argumente mit rationalen Koeffizienten bedeutet.

2) Betrachten wir die unendliche Reihe von Scharen von Rechtecken, deren Seitenverhältnisse vorgegebene Werte

$$a_1, a_2, \cdots, a_n, \cdots$$

haben. Dann läßt sich a) aus den Rechtecken dieser Scharen nicht jedes Rechteck zusammensetzen, vielmehr muß das Seitenverhältnis dieses Rechtecks sich rational mit rationalen Koeffizienten durch eine endliche Anzahl von Größen aus der Reihe $a_1, a_2, \cdots, a_n, \cdots$ ausdrücken lassen. Es gibt also wieder nur eine abzählbar unendliche Anzahl von Scharen von Rechtecken, die sich so zusammensetzen lassen. b) Zu einem bestimmten Rechteck einer jener Scharen mit nicht verschwindenden Seiten gehören nur je eine abzählbar unendliche Anzahl von Rechtecken jeder der Scharen, die mit dem vorgegebenen Rechtecke zusamenzusetzen fähig sind.

3) Vorgelegt sei ein Rechteck x_0, y_0. irgendwie zusammengesetzt aus den Rechtecken x_1, y_1; x_2, y_2; $\cdots$; x_n, y_n. Wir denken uns nun die Teil-Rechtecke und das große Rechteck veränderlich und zwar mit folgenden Beschränkungen:

a) Jedes einzelne Teil-Rechteck für sich ist nur so zu bewegen, daß es ein Rechteck bleibt und daß, wenn man einen Winkel festhält, die gegenüberliegende Ecke auf der zugehörigen Diagonale fortschreitet. Also jedes Rechteck darf nur in ihm ähnliche übergeführt werden.

b) Rechtecke, die je mit einer Seite aneinander liegen, dürfen nicht übereinander geschoben werden, sondern können nur aneinander hingleiten. — Diese Beschränkung, die sich nach früher Entwickeltem analytisch ausdrücken läßt, als ständige Erfüllung gewisser linearer ganzzahliger Relationen zwischen den Rechtecksseiten, bewirkt, daß die veränderten Teilrechtecke wieder das große (ebenfalls veränderte) Rechteck einfach und lückenlos bedecken.

Halten wir endlich c) um bloße Bewegungen des Systems auszuschließen, einen Winkel des großen Rechtecks fest, so ergibt sich:

Das durch a), b), c) definierte kinematische System hat nur einen Freiheitsgrad: Durch die Lage einer Ecke irgend eines Rechtecks (natürlich mit Ausnahme der von vorneherein festgehaltenen Ecke)

des großen Rechtecks ist die Lage jeder Ecke jedes Rechtecks bestimmt, und es schreitet auch die dem festen Winkel gegenüberliegende Ecke des großen Rechtecks auf einer Geraden fort, die durch den festen Scheitel hindurchgeht. Die Figur des in Rechtecke eingeteilten Rechtecks kann nur in ihr ähnliche Figuren übergehen. — Rechtecke die aus resp. ähnlichen Rechtecken homolog zusammengesetzt sind, sind ähnlich.

Wir wollen bei dieser Gelegenheit bemerken, daß die Resultate dieses Paragraphen im wesentlichen von der Form sind, daß sie zeigen, daß nur die gleichsam trivialen Arten der Zerlegung möglich sind. Denn wie es beispielsweise trivial ist, daß sich ein Quadrat aus kommensurablen Quadraten zusammensetzen läßt, so ist es ebenfalls selbstverständlich, daß wir, bei gegebener Zerlegung eines Rechtecks in Rechtecke, mit „proportional" abgeänderten Teilrechtecken wieder ein Rechteck und zwar mit ebenfalls proportional abgeänderten Seiten zusammensetzen können.

3.

Ein Satz über lineare Mannigfaltigkeiten, die auf quadratischen liegen, und neue Beispiele.

Es ist bemerkenswert, daß sich mit den bisherigen Methoden eine Reihe von sehr einfachen und an das früher Behandelte sich eng anschließenden Problemen nicht erledigen läßt. Wir wollen nur das folgende nennen: Aus einem Rechteck mit den Seiten x_1 und y_1 und einer Anzahl von Quadraten läßt sich ein Quadrat zusammensetzen: müssen x_1 und y_1 irgend welche Bedingungen erfüllen? Die Gleichung (I) lautet für diesen Fall:

$$x_0^2 = x_1 y_1 + x_2^2 + x_n^2 + \cdots + x_n^2.$$

Wenn wir die in dem vorangehenden Paragraphen angewandten Methoden benutzen und $x_0 = 0$, $x_1 = y_1$ setzen, so folgt: Es müssen zwischen den $n + 2$ Variabeln $x_0, x_1, y_1, x_2, x_3, \cdots, x_n$ n lineare Gleichungen bestehen. Da wir aber die Natur dieser Gleichungen gar nicht kennen, so können wir nicht schließen, daß aus diesen Gleichungen eine Beziehung zwischen x_1 und y_1 folgt, weil wir ja nur n Gleichungen zwischen $n + 2$ Größen haben. Es wird sich aber im folgenden ergeben, daß, wie man wohl schon vermuten dürfte, x_1 und y_1 kommensurabel sein müssen, daß also auch hier nur der triviale Fall möglich ist.

Daß unsere bisherigen Methoden hier versagen, liegt nun daran, daß wir, was auch in den vorangehenden Fällen nicht nötig war, unsern Satz 1 nicht vollständig ausgenutzt haben. Diesen haben wir nämlich bisher immer nur in der Form angewandt, daß aus den linearen ganz-

zahligen Relationen zwischen $x_0, x_1, x_2, \cdots, x_n, y_1, y_2, \cdots, y_n$ die Gleichung (I):

$$x_0 y_0 = x_1 y_1 + \cdots + x_n y_n$$

folge. Wir haben aber viel mehr bewiesen; nämlich, daß diese Beziehung (I) allein aus den linearen Beziehungen zwischen den $x_0, x_1, \cdots, x_n$ und denjenigen zwischen den $y_0, y_1, \cdots, y_n$ folgt. Wir wollen jetzt folgenden allgemeinen Satz beweisen:

Satz 2: Sei

$$\text{(A)} \quad \begin{cases} l_1^x(x_0, x_1, \cdots, x_n) = 0, \\ l_2^x(x_0, x_1, \cdots, x_n) = 0, \\ \cdots\cdots\cdots \end{cases} \qquad \text{(B)} \quad \begin{cases} l_1^y(y_0, y_1, \cdots, y_n) = 0, \\ l_2^y(y_0, y_1, \cdots, y_n) = 0, \\ \cdots\cdots\cdots \end{cases}$$

eine lineare Mannigfaltigkeit des $(x_0, y_0; x_1, y_1; \cdots; x_n, y_n)$-Raumes, die auf der quadratischen Mannigfaltigkeit:

$$\text{(1)} \qquad \alpha_0 x_0 y_0 + \alpha_1 x_1 y_1 + \cdots + \alpha_n x_n y_n = 0$$

liegt. Dann folgt aus (A) und (B) und irgend welchen n Beziehungen unter den $n+1$ Beziehungen:

$$\text{(C)} \quad \begin{cases} a_0 x_0 + b_0 y_0 + c_0 = 0, \\ a_1 x_1 + b_1 y_1 + c_1 = 0, \\ \cdots\cdots\cdots \\ \cdots\cdots\cdots \\ a_n x_n + b_n y_n + c_n = 0 \end{cases}$$

die $n+1^{\text{te}}$ Beziehung.

Dabei sind die Koeffizienten in den Gleichungen (A), (B), (C) und (1) sonst beliebige reelle oder komplexe Größen und nur den (selbstverständlichen) Bedingungen unterworfen, daß keine Größe α_i gleich Null ist und nicht die Größen a_i, b_i, gleichzeitig verschwinden, also eine der Gleichungen (C) identisch erfüllt ist. Von den Gleichungen (A) und (B) wird nicht vorausgesetzt, daß sie homogen sind.

Beweis: 1) Spezialfall: (A) besteht aus (mindestens) n Gleichungen. Sei die in (C) weggelassene Gleichung etwa:

$$a_0 x_0 + b_0 y_0 + c_0 = 0.$$

Folgt dann aus den Gleichungen (A):

$$x_0 = j_0,$$

so ist unmittelbar die im zu beweisenden Satze geforderte Beziehung zwischen x_0 und y_0 vorhanden ($b_0 = 0$; $a_0 = 1$; $c_0 = j_0$). Folgt aus den Gleichungen (A) aber nicht, daß x_0 konstant ist, so können wir alle Größen $x_1, x_2, \cdots, x_n$ durch x_0 ausdrücken; es sei etwa:

$$x_1 = \lambda_{0,1} x_0 + j_1; \quad x_2 = \lambda_{0,2} x_0 + j_2; \cdots; x_n = \lambda_{0,n} x_0 + j_n.$$

Setzen wir diese Werte für $x_1, x_2, \cdots, x_n$ in (1) ein, so ergibt sich:

$$x_0(\alpha_0 y_0 + \alpha_1 \lambda_{0,1} y_1 + \cdots + \alpha_n \lambda_{0,n} y_n) + \alpha_1 j_1 y_1 + \alpha_2 j_2 y_2 + \cdots + \alpha_n j_n y_n = 0.$$

Diese Gleichung ist für alle Werte von x_0 erfüllt. Setzen wir $x_0 = 0$ so ergibt sich:

$$\alpha_1 j_1 y_1 + \cdots = 0$$

und folglich auch:

$$\alpha_0 y_0 + \alpha_1 \lambda_{0,1} y_1 + \cdots + \alpha_n \lambda_{0,n} y_n = 0. \tag{2}$$

Es sei ferner:

$$(C') \quad \begin{cases} a_1 x_1 + b_1 y_1 + c_1 = 0, \\ \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \\ \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \\ a_n x_n + b_n y_n + c_n = 0. \end{cases}$$

Wir können also y_i durch x_i linear ausdrücken, wenn nicht

$$b_i = 0; \quad x_i = \frac{-c_i}{a_i}$$

ist. Ist in diesem Falle in der Gleichung

$$x_i = \lambda_{0,i} x_0 + j_i$$

$\lambda_{0,i}$ nicht gleich Null, so folgt vermöge einer der Gleichungen (C').

$$x_0 = \frac{\frac{-c_i}{a_i} - j_i}{\lambda_{0,i}} = c_0,$$

was wieder der Behauptung entspräche. Verschwindet aber für keinen Index i $(i = 1, 2, \cdots, n)$ b_i, ohne daß $\lambda_{0,i}$ verschwindet, so kann ich durch Einsetzung der Werte von x_i, ausgedrückt durch x_0, in (C') alle diejenigen y_i, deren Koeffizient in (2): $\alpha_i \lambda_{0,i}$ nicht verschwindet, durch x_0 ausdrücken und erhalte so statt (2) die Gleichung:

$$\alpha_0 y_0 - \sum_{i=1}^{n} \frac{\alpha_i \lambda_{0,i}}{b_i} (a_i \lambda_{0,i} x_0 + a_i j_i + c_i) = 0$$

oder:

$$\alpha_0 y_0 - x_0 \sum_{i=1}^{n} \frac{\alpha_i \lambda_{0,i}^2 a_i}{b_i} - \sum_{i=1}^{n} \frac{\alpha_i \lambda_{0,i}}{b_i} (a_i j_i + c_i) = 0.$$

Damit haben wir aber, da nach Voraussetzung der Koeffizient α_0 von y_0 nicht gleich Null ist, die in (C) weggelassene Beziehung zwischen x_0 und y_0 wieder erhalten und unsere Behauptung für diesen speziellen Fall erwiesen.

2) Allgemeiner Fall: (A) besteht aus $n-m$ Beziehungen zwischen $x_0, x_1, \cdots, x_n$. Sei wieder:

$$a_0 x_0 + b_0 y_0 + c_0 = 0$$

die Beziehung, die nach der Behauptung aus (A), (B) und den übrigen Gleichungen (C) folgen soll. Wieder können wir den Fall, daß aus den Gleichungen (A) folgt, daß x_0 konstant ist, ausschließen, da dann unsere Behauptung unmittelbar folgen würde.

Wir können also durch x_0 und m weitere Größen x_i, etwa $x_1, x_2, \cdots, x_m$, die übrigen Größen $x_{m+1}, \cdots, x_n$ linear ausdrücken. Es sei etwa:

$$(D)\quad \begin{cases} x_{m+1} = \lambda_{0,m+1} x_0 + \lambda_{1,m+1} x_1 + \cdots + \lambda_{m,m+1} x_m + j_{m+1}, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ x_n = \lambda_{0,n} x_0 + \lambda_{1,n} x_1 + \cdots + \lambda_{m,n} x_m + j_n. \end{cases}$$

Setzen wir diese Werte in (1) ein, so erhalten wir:

$$\left.\begin{aligned} x_0\left(\alpha_0 y_0 + \sum_{i=m+1}^{n} \alpha_i \lambda_{0,i} y_i\right) + x_1\left(\alpha_1 y_1 + \sum_{i=m+1}^{n} \alpha_i \lambda_{1,i} y_i\right) + \cdots \\ + x_m\left(\alpha_m y_m + \sum_{i=m+1}^{n} \alpha_i \lambda_{m,i} y_i\right) + \sum_{i=m+1}^{n} \alpha_i j_i y_i \end{aligned}\right\} = 0.$$

Da nun diese Gleichung für jeden Wert von $x_1 \cdots x_m$ erfüllt sein soll, so folgt zunächst:

$$\sum_{i=m+1}^{n} \alpha_i j_i y_i = 0$$

und darauf:

$$(E)\quad \begin{cases} \alpha_0 y_0 + \sum_{i=m+1}^{n} \alpha_i \lambda_{0,i} y_i = 0, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots \\ \cdots\cdots\cdots\cdots \\ \alpha_m y_m + \sum_{i=m+1}^{n} \alpha_i \lambda_{m,i} y_i = 0. \end{cases}$$

Nun ist ferner:

$$(C')\quad \begin{cases} a_1 x_1 + b_1 y_1 + c_1 = 0, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots \\ \cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_n x_n + b_n y_n + c_n = 0. \end{cases}$$

Wir können y_i durch x_i linear ausdrücken, wenn nicht b_i gleich Null ist.

In diesem Falle folgt aber, wenn $i < m+1$ ist, daß zu den Gleichungen (D) (oder (A)) eine neue Beziehung, nämlich:

$$x_i = \frac{c_i}{a_i}$$

hinzukommt. Ist $i > m$, so folgt aus (D):

$$\frac{c_i}{a_i} = \lambda_{0,i} x_0 + \lambda_{1,i} x_1 + \cdots + \lambda_{m,i} x_i + j_i,$$

also ebenfalls eine neue Beziehung zwischen den Größen $x_0, x_1, \cdots, x_n$, (da ja nach Voraussetzung aus (A) keine Beziehung zwischen $x_0, x_1, \cdots, x_m$ folgt) wenn nicht:

$$\lambda_{0,i} = \lambda_{1,i} = \cdots = \lambda_{m,i} = 0 \quad \text{und} \quad \frac{c_i}{\alpha_i} = j_i$$

ist. Entweder also ist der Fall von $n-m$ Beziehungen zwischen den Größen $x_0 \cdots x_n$ auf den Fall von $n-m+1$ Beziehungen reduziert, oder wir können durch Einsetzung der Werte von x_i $(i > m)$, ausgedrückt durch die Größen $x_0 \cdots x_m$, in (C') alle diejenigen y_i $(i = 1, 2, \cdots, n)$, deren Koeffizienten in (E) nicht verschwinden, durch $x_0 \cdots x_m$ ausdrücken. Nehmen wir den letzteren Fall als vorliegend an, so erhalten wir:

$$y_i = -\frac{a_i \sum_{k=0}^{m} (\lambda_{k,i} x_k + j_i) + c_i}{b_i}, \qquad i > m$$

$$y_i = -\frac{a_i x_i + c_i}{b_i}, \qquad 0 < i < m+1.$$

Setzen wir diese Werthe in (E) ein, so erhalten wir:

$$(F) \quad \begin{cases} \alpha_0 y_0 = \alpha_{0,0} x_0 + \alpha_{0,1} x_1 + \cdots + \alpha_{0,m} x_m + \beta_0, \\ \dfrac{-\alpha_1 x_1}{b_1} = \alpha_{1,0} x_0 + \alpha_{1,1} x_1 + \cdots + \alpha_{1,m} x_m + \beta_1 + \dfrac{c_1}{b_1}, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ \dfrac{-\alpha_m x_m}{b_m} = \alpha_{m,0} x_0 + \alpha_{m,1} x_1 + \cdots + \alpha_{m,m} x_m + \beta_m + \dfrac{c_m}{b_m}. \end{cases}$$

Hierbei ist:

$$\alpha_{l,k} = \alpha_{k,l} = \sum \frac{\alpha_i \lambda_{l,i} \lambda_{k,i} a_i}{b_i},$$

$$\beta_i = \sum \frac{\alpha_i \lambda_{l,i} (\alpha_i j_i + c_i)}{b_i}$$

gesetzt, wo die Summen zu erstrecken sind über alle diejenigen Indices $i > m$, für die b_i von Null verschieden ist.

Verschwinden nicht alle Koeffizienten der Variabeln $x_0 \cdots x_m$ in den m letzten Gleichungen von (F), so haben wir wieder nicht mehr bloß $n-m$ Beziehungen zwischen $x_0 \cdots x_n$, sondern $n-m+1$ und unser Fall ist wiederum auf diesen Fall reduziert. Verschwinden dagegen alle Koeffizienten in den m letzten Gleichungen von (F), so erhalten wir:

$$\alpha_0 y_0 = \alpha_{0,0} x_0 + \beta_0,$$

also die gewünschte Beziehung zwischen x_0 und y_0, die jedenfalls nicht identisch erfüllt ist, da ja α_0 nach Voraussetzung von Null verschieden ist. Indem wir die Betrachtung für den Fall von $n-m$ Gleichungen zwischen $x_0 \cdots x_m$ zusammenfassen, erkennen wir: Entweder läßt sich die Behauptung direkt erweisen oder aber der Beweis ist für den Fall von $n-m+1$ Gleichungen zu erbringen. Schließen wir nun für diesen Fall in der obigen Weise und fahren so fort, so folgt entweder direkt, daß die Behauptung richtig ist, oder daß wir unsere Behauptung für den Fall von n Gleichungen zwischen $x_0 \cdots x_n$ zu prüfen haben. Diesen Fall aber haben wir direkt erledigt, so daß der Satz 2) bewiesen ist.

Beispiele.

Mittels dieses allgemeinen Satzes läßt sich leicht eine ganze Reihe von Beispielen erledigen. Wir wollen nur zwei kurz behandeln:

a) Als erstes Beispiel wählen wir das im Eingang dieses Paragraphen erwähnte und beweisen den Satz:

Ein Rechteck läßt sich durch Hinzufügen von Quadraten nur dann zu einem Quadrate ergänzen, wenn seine Seiten kommensurabel sind.

Angenommen, ein Rechteck x_1, y_1 würde durch Hinzufügen anderer Rechtecke $x_2, y_2; \cdots; x_n, y_n$ zu einem Rechteck x_0, y_0 ergänzt. Sind die Rechtecke x_0, y_0; x_1, y_1; $\cdots$; x_n, y_n Quadrate, so lautet das Gleichungssystem (C′):

$$(C') \quad \begin{cases} x_0 = y_0, \\ x_2 = y_2, \\ \cdot \quad \cdot \quad \cdot \\ \cdot \quad \cdot \quad \cdot \\ x_n = x_n. \end{cases}$$

Gemäß Satz 2 folgt daraus vermöge der Systeme S_x und S_y (siehe § 1), die an Stelle von (A) und (B) treten:

$$a_1 x_1 + b_1 y_1 + c_1 = 0.$$

Da aber die sämtlichen Gleichungen S_x und S_y sowie (C′) homogen sind und ganzzahlige Koeffizienten haben, so muss diese Gleichung von der Form:

$$n x_1 = m y_1$$

sein, wo n und m ganze positive oder negative Zahlen und eine von beiden auch gleich Null sein kann. Also ist der Satz bewiesen. Wir wollen noch hinzufügen, daß wir diese Gleichung auch geometrisch interpretieren, wenn m oder n negativ ist. Dies bedeutet natürlich, daß das Rechteck mit den Seiten x_1 und y_1 wegzunehmen (herauszuschneiden) ist aus dem Gefüge der Rechtecke $x_2, y_2; \cdots; x_n, y_n$.

b) Welche Bedingung besteht für die Seiten x_0, y_0 eines Rechtecks, damit es aus Rechtecken mit einer vorgegebenen Seite g zusammengesetzt werden kann? Dabei soll von einem Rechteck x_i, y_i entweder x_i oder y_i gleich g sein. Nehmen wir an, es sei

$$x_1 = x_2 = \cdots = x_m = y_{m+1} = y_{m+2} = \cdots = y_n = g.$$

Dann lautet das Gleichungssystem (C):

$$(C') \quad \begin{cases} x_1 & = g, \\ \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot \\ x_m & = g, \\ y_{m+1} & = g, \\ \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot \\ y_n & = g. \end{cases}$$

Nach Satz 2 folgt aus diesen Gleichungen und den Gleichungen der Systeme S_x und S_y:

$$a_0 x_0 + b_0 y_0 + c_0 = 0.$$

Aber da die Gleichungen (C'), wie die Gleichungen von S_x und S_y nur Beziehungen zwischen den Größen x_i allein und zwischen Größen y_i allein enthalten, so folgt, daß entweder a_0 oder b_0 gleich Null zu setzen ist. Da nun ferner S_x und S_y ganzzahlige Koeffizienten haben, so muß mindestens eine von den beiden Gleichungen:

$$l x_0 = m g; \quad n y_0 = p g$$

bestehen, wo l, m, n, p ganze Zahlen und m und p auch gleich Null sein können. Wir haben deswegen den Satz:

Ist ein Rechteck x_0, y_0 aus Rechtecken mit einer vorgegebenen Seite g zusammensetzbar, so ist mindestens eine von den Größen x_0, y_0 mit g kommensurabel.

Mittels ganz analoger Betrachtungen erhalten wir ferner den Satz:

Ist das Rechteck x_0, y_0 aus den Rechtecken $x_1, y_1; \cdots; x_n, y_n$ zusammensetzbar und teilen wir die Teilrechtecke in zwei Gruppen, etwa: $x_1, y_1; \cdots; x_m y_m$ und $x_{m+1}, y_{m+1}; \cdots; x_n, y_n$ so besteht von jedem der beiden Paare von homogenen linearen ganzzahligen Gleichungen

$$l_1^x(x_0, x_1 \quad , \cdots, x_m) = 0,$$
$$l_1^y(y_0, y_{m+1}, \cdots, y_n) = 0$$

und

$$l_2^x(x_0, x_{m+1}, \cdots, x_n) = 0,$$
$$l_2^y(y_0, y_1 \quad , \cdots, y_n) = 0$$

mindestens eine Gleichung.

4.

Das allgemeine Problem.

Wir wollen eine Kurve in der (x, y)-Ebene eine gewöhnliche Kurve nennen, wenn sie aus einer abzählbaren Anzahl von Punkten und ganz im Endlichen gelegenen Kurvenstücken

$$y = \varphi(x) \quad \text{oder} \quad x = \psi(y)$$

zusammengesetzt werden kann, wo φ und ψ stetige Funktionen sind, die einen stetigen monotonen ersten Differentialquotienten besitzen.

Satz 3: Sei

$$\text{(A)} \quad \begin{cases} l_1^x(x_0, x_1, \cdots, x_n) = 0, \\ l_2^x(x_0, x_1, \cdots, x_n) = 0, \\ \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \\ \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \end{cases} \qquad \text{(B)} \quad \begin{cases} l_1^y(y_0, y_1, \cdots, y_n) = 0, \\ l_2^y(y_0, y_1, \cdots, y_n) = 0, \\ \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \\ \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \end{cases}$$

eine lineare Mannigfaltigkeit auf der quadratischen:

$$\text{(1)} \qquad \alpha_0 x_0 y_0 + \alpha_1 x_1 y_1 + \cdots + \alpha_n x_n y_n = 0.$$

Beschränkt man dann n Punktepaare unter den $n+1$ Punktepaaren $x_0, y_0;\ x_1, y_1;\ \cdots;\ x_n, y_n$, etwa $x_1, y_1;\ \cdots;\ x_n, y_n$, auf gewöhnliche Kurven der (x_1, y_1)-, $\cdots$, (x_n, y_n)-Ebene, so ist bei Erfüllung von (A) und (B) auch das $n+1^{\text{te}}$ Punktepaar x_0, y_0 auf eine gewöhnliche Kurve der (x_0, y_0)-Ebene beschränkt.

Hierbei sind die Koeffizienten in den Gleichungen (A), (B) und (1) als reell vorausgesetzt; $\alpha_0 \cdots \alpha_n$ müssen sämtlich von Null verschieden sein.

Seien nun $x_0, y_0;\ x_1, y_1;\ \cdots;\ x_n, y_n$ ein System von Wertepaaren, welche die Gleichungen (A) und (B) befriedigen, indem gleichzeitig $x_1, y_1;\ \cdots;\ x_n, y_n$ auf den ihnen zugeordneten Kurven der (x_1, y_1)-, $\cdots$, (x_n, y_n)-Ebene liegen. Und zwar mögen die betreffenden „Stücke" dieser Kurve durch die Gleichungen gegeben sein:

$$(D)\quad \begin{cases} y_1 = \varphi_1(x_1), \\ \cdots\cdots\cdots \\ y_n = \varphi_n(x_n), \\ x_{n+1} = \varphi_{n+1}(y_{n+1}), \\ \cdots\cdots\cdots \\ x_n = \varphi_n(y_n). \end{cases}$$

wo $\varphi_1 \cdots \varphi_n, \varphi_{n+1} \cdots \varphi_n$ nach Voraussetzung einen stetigen ersten Differentialquotienten besitzen. Dann bilden wir für die Funktionaldeterminanten die Matrix:

$$(E)\quad \begin{vmatrix} \frac{\partial l_1^x}{\partial x_0} & \cdots & \frac{\partial l_1^x}{\partial x_n} & 0 & \cdots & 0 \\ \frac{\partial l_2^x}{\partial x_0} & \cdots & \frac{\partial l_2^x}{\partial x_n} & 0 & \cdots & 0 \\ \cdots & & & & & \\ 0 & \cdots & 0 & \frac{\partial l_1^y}{\partial y_0} & \cdots & \frac{\partial l_1^y}{\partial y_n} \\ 0 & \cdots & 0 & \frac{\partial l_2^y}{\partial y_0} & \cdots & \frac{\partial l_2^y}{\partial y_n} \\ \cdots & & & & & \\ 0 & \frac{\partial \varphi_1}{\partial x_1} \cdots & 0 & 0 & 1 \cdots & 0 \\ \cdots & & & & & \end{vmatrix}$$

und die entsprechenden linearen Gleichungen:

$$(F)\quad \begin{cases} \frac{\partial l_1^x}{\partial x_0}(X_0 - x_0) + \cdots\cdots = 0, \\ \cdots\cdots \\ \frac{\partial l_1^y}{\partial y_0}(Y_0 - y_0) + \cdots\cdots = 0, \\ \cdots\cdots \\ \frac{d\varphi_1}{dx_1}(X_1 - x_1) - (Y_1 - y_1) = 0. \\ \cdots\cdots \end{cases}$$

Da nach Voraussetzung $x_0, y_0; \cdots; x_n, y_n$ die Gleichungen (A) und (B) befriedigen, so können die ersten Gleichungen in (F) auch geschrieben werden:

$$(A') \quad \begin{cases} l_1^x(X_0, X_1, \cdots, X_n) = 0, \\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \end{cases} \qquad (B') \quad \begin{cases} l_1^y(Y_0, Y_1, \cdots, Y_n) = 0. \\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \end{cases}$$

Die übrigen Gleichungen (F) sind von der Form der Gleichungen (C') in Satz 2. Es ergibt sich deshalb durch Anwendung dieses Satzes, daß die Gleichungen (F) die Gleichung

$$a_0 X_0 + b_0 Y_0 + c_0 = 0$$

zur Folge haben, wo a_0 und b_0 nicht beide gleich Null sind. Damit nun im System (F) alle Größen $X_1, \cdots, X_n$; $Y_1, \cdots, Y_n$ eliminiert werden können, müssen gewisse Unterdeterminanten der Matrix (E) von Null verschieden, andere gleich Null sein. Es gibt eine endliche Anzahl verschiedener Kombinationen von verschwindenden und von Null verschiedenen Unterdeterminanten der Matrix (E), die diese Elimination ermöglichen. Lassen wir nun $x_0, y_0; x_1, y_1; \cdots$ so variieren, daß sie nicht aufhören die Gleichungen (A), (B) und (D) zu befriedigen, so wird zu jedem Wertesystem eine solche Kombination von Unterdeterminanten gehören. Da diese aber nach Voraussetzung stetige Funktionen sind, so wird in einem ganzen Intervall der Variation dieselbe Kombination von verschwindenden und nichtverschwindenden Unterdeterminanten bestehen bleiben. Dann folgt aber gemäß des Fundamentaltheorems der Elimination*), demzufolge die Möglichkeit der Elimination der Größen $x_i, x_k, \cdots, y_i, y_k, \cdots$ aus den Gleichungen (A), (B) und (D) identisch ist mit der Möglichkeit, aus den Gleichungen (F) in einem ganzen Intervalle die Variabelen $X_i, X_k, \cdots, Y_i, Y_k, \cdots$ zu eliminieren, daß in einem ganzen Intervalle der Variation zwischen x_0 und y_0 eine Beziehung von der Form

$$f_0(x_0, y_0) = 0$$

besteht, welche sich für das ganze Intervall auf eine von den beiden Formen:

$$y_0 = \varphi_0(x_0), \qquad x_0 = \psi_0(y_0)$$

bringen läßt. Wegen der Voraussetzungen über die Funktionen $\varphi_1 \cdots \psi_1 \cdots \psi_n$ muß ferner der ganze durch die Gleichungen (A), (B) und (D) definierte Variationsbereich der Variabelen $x_1, y_1; \cdots; x_n, y_n$ auf den Kurvenstücken der betreffenden Ebenen sich in eine endliche Anzahl von Bereichen zerlegen lassen, derart, daß in jedem von ihnen dieselbe Kombination von verschwindenden und nichtverschwindenden Unterdeterminanten von (E) existiert, welche die Elimination von $x_1, \cdots, y_1, \cdots, y_n$ aus (A), (B) und (D) ermöglicht. Der Beweis hierfür kann ohne erhebliche Schwierig-

*) Siehe z. Bsp. C. Jordan, Cours d'Analyse, II$^{\text{ième}}$ éd. Nr. 92—95.

keiten mit den Methoden, die in der Theorie reeller Funktionen üblich sind, geführt werden.

Für diesen ganzen Variationsbereich ist also das Variabelnpaar x_0, y_0 abgesehen von isolierten Punkten auf eine endliche Anzahl von Kurvenstücken beschränkt, die entweder von der Form

$$y_0 = \varphi_0(x_0)$$

oder von der Form

$$x_0 = \psi_0(y_0)$$

sind, wo φ_0 und ψ_0 wieder stetige monotone erste Differentialquotienten besitzen. Nun gibt es aber nur eine abzählbar-unendliche Anzahl Kombinationen, bestehend aus je einem der Kurvenstücke, welche die vorgegebenen (gewöhnlichen) Kurven respektive in der (x_1, y_1)-, $\cdots$, (x_n, y_n)-Ebene zusammensetzen. So ist also auch der Punkt, der durch das Wertepaar x_0, y_0 in der (x_0, y_0)-Ebene dargestellt wird, wie zu beweisen war, gezwungen auf einer gewöhnlichen Kurve zu verbleiben. Es liegt darin natürlich eine Beschränkung des möglichen Wertevorrates von Größenpaaren x_0, y_0, weil eine gewöhnliche Kurve die Ebene nirgendwo vollständig überdecken kann.

Es folgt nun weiter leicht der Satz:

Liegen die Punkte $x_1, y_1; \cdots; x_n, y_n$ auf je einer gewöhnlichen Kurve der (x_1, y_1)-, $\cdots$, (x_n, y_n)-Ebene so kann man aus Rechtecken mit den Seiten $x_1, y_1; \cdots; x_n, y_n$ nur dann das Rechteck mit den Seiten x_0, y_0 zusammensetzen, wenn der Punkt x_0, y_0 in der (x_0, y_0)-Ebene auf einer bestimmten gewöhnlichen Kurve liegt.

Zunächst müssen die Größen $x_0, y_0; \cdots, x_n, y_n$ nach Satz 1 auf einer solchen linearen Mannigfaltigkeit der quadratischen Mannigfaltigkeit

$$x_0 y_0 = x_1 y_1 + \cdots + x_n y_n$$

liegen, die dargestellt werden kann durch eine Anzahl linearer homogener ganzzahliger Gleichungen zwischen $x_0, \cdots, x_n; y_0, \cdots, y_n$. Solcher Gleichungen aber gibt es nur eine abzählbar-unendliche Anzahl, etwa $L_1, L_2, \cdots$ Liegen nun $x_0, y_0; \cdots; x_n, y_n$ auf einer bestimmten solchen linearen Mannigfaltigkeit, etwa L_1, so folgt nach Satz 4, daß der Punkt x_0, y_0 in der (x_0, y_0)-Ebene auf einer gewöhnlichen Kurve liegen muß, ebenso, wenn $x_0, y_0; \cdots; x_n, y_n$ auf $L_2, \cdots$ liegen. Also muß der Punkt x_0, y_0 in der (x_0, y_0)-Ebene auf einer abzählbaren Anzahl von gewöhnlichen Kurven, d. h. wieder auf einer gewöhnlichen Kurve liegen.

Lassen wir jetzt n unendlich werden, so erhalten wir den

Satz 4. Liegen die Punkte $x_1, y_1; \cdots; x_m, y_m; \cdots$ auf je einer gewöhnlichen Kurve der (x_1, y_1)-, $\cdots$, (x_m, y_m)-, $\cdots$, -Ebene, so kann man aus einer endlichen Anzahl von Rechtecken mit den Seiten $x_1, y_1; \cdots, x_m, y_m; \cdots$ nur dann das Rechteck mit den Seiten x_0, y_0

zusammensetzen, wenn der Punkt x_0, y_0 in der (x_0, y_0)-Ebene auf einer bestimmten gewöhnlichen Kurve liegt.

Denn es gibt nur eine abzählbar-unendliche Anzahl von Gruppen mit einer endlichen Anzahl von Gliedern, von denen jedes eines der Variabelnpaare $x_0, y_0; \cdots; x_m, y_m; \cdots$ ist.

Für jede solche Gruppe gilt der eben bewiesene Satz, also ist auch der Satz 4 bewiesen.

Wir wollen nun kurz eine solche Schar von Rechtecken, deren Seiten x, y einen Punkt in der (x, y)-Ebene repräsentieren, der stets auf einer bestimmten gewöhnlichen Kurve liegt, eine eingliedrige Schar nennen. Dann ergibt sich endlich als Spezialfall von Satz 4, wenn wir die Rechtecke $x_1, y_1; \cdots; x_m, y_m; \cdots$ alle derselben Schar angehören lassen, der am Anfang dieser Arbeit aufgestellte

Satz 5. Aus einer endlichen Anzahl Repräsentanten einer eingliedrigen Schar von Rechtecken, läßt sich nur eine eingliedrige Schar von Rechtecken zusammensetzen.

Indem wir bedenken, daß wir, nicht nur wie in den bisherigen Anwendungen von Satz 3 α_0 gleich -1, $\alpha_1 = \alpha_2 = \cdots = \alpha_n = 1$, sondern beliebig $\alpha_i = +1$ oder $= -1$ setzen können, ergibt sich, daß wir dem Satz 5 hinzusetzen können: Die „Zusammensetzung" darf nicht nur mittels bloßem „Hinzufügen zu dem Vorhandenen" sondern auch mittels „Wegnehmen von dem Vorhandenen" geschehen.

On the partial differential equations of mathematical physics.

By

E. T. Whittaker in Cambridge.

§ 1.

Introduction.

The object of this paper is the solution of Laplace's potential equation

$$\frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial z^2} = 0,$$

and of the general differential equation of wave-motions

$$\frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial z^2} = k^2 \frac{\partial^2 V}{\partial t^2},$$

and of other equations derived from these.

In § 2, the general solution of the potential equation is found.

In § 3, a number of results are deduced from this, chiefly relating to particular solutions of the equation, and expansions of the general solution in terms of them.

In § 4, the general solution of the differential equation of wave-motions is given.

In § 5, a number of deductions from this general solution is given, including a theorem to the effect that any solution of this equation can be compounded from simple uniform plane waves, and an undulatory explanation of the propagation of gravitation.

§ 2.

The general solution of the potential equation.

We shall first consider the equation

$$\frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial z^2} = 0,$$

which was originally given by Laplace*).

*) *Mémoire sur la theorie de l'anneau de Saturne*, 1787.

This equation is satisfied by the potential of any distribution of matter which attracts according to the Newtonian Law. We shall first obtain a general form for potential-functions, and then shall shew that this form constitutes the general solution of Laplace's equation. From the identity

$$\frac{1}{\sqrt{\{(x-a)^2+(y-b)^2+(z-c)^2\}}} = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \frac{du}{(z-c)+i(x-a)\cos u+i(y-b)\sin u},$$

we see that the potential at any point (x, y, z) of a particle of mass m, situated at the point (a, b, c), is

$$\frac{m}{2\pi}\int_0^{2\pi} \frac{du}{(z+ix\cos u+iy\sin u)-(c+ia\cos u+ib\sin u)}$$

which, considered as a function of x, y, z, is an expression of the type

$$\int_0^{2\pi} f(z+ix\cos u+iy\sin u, u)du,$$

where f denotes some function of the two arguments

$$z+ix\cos u+iy\sin u \quad \text{and} \quad u.$$

It follows that the potential of any number of particles $m_1, m_2, \cdots, m_k$, situated at the points $(a_1b_1c_1)$, $(a_2b_2c_2)$, $(a_3b_3c_3)$, $\cdots$, $a_kb_kc_k)$, is an expression of the type

$$\int_0^{2\pi} \{f_1(z+ix\cos u+iy\sin u, u)+f_2(z+ix\cos u+iy\sin u, u) + f_k(z+ix\cos u+iy\sin u, u)\}du$$

or

$$\int_0^{2\pi} f(z+ix\cos u+iy\sin u, u)du,$$

where f is a new function of the two arguments

$$z+ix\cos u+iy\sin u \quad \text{and} \quad u.$$

In this way we see that *the potential of any distribution of matter which attracts according to the Newtonian Law can be represented by an expression of the type*

$$\int_0^{2\pi} f(z+ix\cos u+iy\sin u, u)du.$$

The question now naturally suggests itself, whether the most general solution of Laplace's equation can be represented by an expression of this type. We shall shew that the answer to this is in the affirmative.

For let $V(x, y, z)$ be any solution (single-valued or many-valued) of the equation

$$\frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V}{dy^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial z^2} = 0.$$

Let (x_0, y_0, z_0) be some point at which some branch of the function $V(x, y, z)$ is regular. Then if we write

$$x = x_0 + X, \quad y = y_0 + Y, \quad z = z_0 + Z$$

it follows that for all points situated within a finite domain surrounding the point (x_0, y_0, z_0), this branch of the function $V(x, y, z)$ can be expanded in an absolutely and uniformly convergent series of the form

$$V = a_0 + a_1 X + b_1 Y + c_1 Z + a_2 X^2 + b_2 Y^2 + c_2 Z^2 + d_2 YZ + e_2 ZX + f_2 XY + a_3 X^3 + \cdots.$$

Substituting this expansion in Laplace's equation, which can be written

$$\frac{\partial^2 V}{\partial X^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial Y^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial Z^2} = 0,$$

and equating to zero the coefficients of the various powers of X, Y and Z, we obtain an infinite number of linear relations, namely

$$a_2 + b_2 + c_2 = 0, \text{ etc.}$$

between the constants in the expansion.

There are $\frac{1}{2} n(n-1)$ of these relations between the $\frac{1}{2}(n+1)(n+2)$ coefficients of the terms of any degree n in the expansion of V; so that only $\left\{\frac{1}{2}(n+1)(n+2) - \frac{1}{2} n(n-1)\right\}$ or $(2n+1)$ of the coefficients of terms of degree n in the expansion of V are really independent. It follows that the terms of degree n in V must be a linear combination of $(2n+1)$ linearly independent particular solutions of Laplace's equation, which are of degree n in X, Y, Z.

To find these solutions, consider the expansion of the quantity

$$(Z + iX\cos u + iY\sin u)^n$$

as a sum of sines and cosines of multiples of u, in the form

$$\begin{aligned}(Z + iX\cos u + iY\sin u)^n = {} & g_0(X, Y, Z) + g_1(X, Y, Z)\cos u \\ & + g_2(X, Y, Z)\cos 2u + \cdots + g_n(X, Y, Z)\cos nu \\ & + h_1(X, Y, Z)\sin u + h_2(X, Y, Z)\sin 2u + \cdots \\ & + h_n(X, Y, Z)\sin nu.\end{aligned}$$

Now $g_m(X, Y, Z)$ and $h_m(X, Y, Z)$ are together characterised by the fact that the highest power of Z contained in them is Z^{n-m}; moreover $g_m(X, Y, Z)$ is an even function of Y, whereas $h_m(X, Y, Z)$ is an odd function of Y; and hence the $(2n+1)$ quantities

$$g_0(X, Y, Z),\ g_1(X, Y, Z), \cdots, h_n(X, Y, Z)$$

are linearly independent of each other; and they are clearly homogeneous polynomials of degree n in X, Y, Z; and each of them satisfies Laplace's equation, since the quantity $(Z+iX\cos u+iY\sin u)^n$ does so. They may therefore be taken as the $(2n+1)$ linearly independent solutions of degree n of Laplace's equation.

Now since by Fourier's Theorem we have the relations

$$g_m(X, Y, Z) = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}(Z+iX\cos u+iY\sin u)^n\cos mu\,du,$$

$$h_m(X, Y, Z) = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}(Z+iX\cos u+iY\sin u)^n\sin mu\,du,$$

it follows that each of these $(2n+1)$ solutions can be expressed in the form

$$\int_0^{2\pi} f(Z+iX\cos u+iY\sin u,\ u)\,du$$

and therefore any linear combination of these $(2n+1)$ solutions can be expressed in this form. That is, the terms of any degree n in the expansion of V can be expressed in this form; and therefore V itself can be expressed in the form

$$\int_0^{2\pi} F(Z+iX\cos u+iY\sin u, u)\,du,$$

or

$$\int_0^{2\pi} F(z+ix\cos u+iy\sin u-z_0-ix_0\cos u-iy_0\sin u,\ u)\,du,$$

or

$$\int_0^{2\pi} f(z+ix\cos u+iy\sin u,\ u)\,du,$$

since the $z_0+ix_0\cos u+iy\sin u$ can be absorbed into the second argument u.

Now V was taken to be any solution of Laplace's equation, with no restriction beyond the assumption that some branch of it was at some

point a regular function — an assumption which is always tacitly made in the solution of differential equations; and thus we have the result, that *the general solution of Laplace's equation*

$$\frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial z^2} = 0$$

is

$$V = \int_0^{2\pi} f(z + ix\cos u + iy\sin u, u)\, du,$$

where f is an arbitrary function of the two arguments

$$z + ix\cos u + iy\sin u \quad \textit{and} \quad u.$$

Moreover, it is clear from the proof that no generality is lost by supposing that f is a periodic function of u.

This Theorem is the three-dimensional analogue of the theorem that the general solution of the equation

$$\frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} = 0$$

is

$$V = f(x+iy) + g(x-iy).$$

§ 3.

Deductions from the Theorem of § 2; Particular Solutions; Expansions of the General Solution.

1°. *Interpretation of the solution.* We may give to the general solution just obtained a concrete interpretation, as follows.

Since a definite integral can be regarded as the limit of a sum, we can regard V as the sum of an infinite number of terms, each of the type

$$V_r = f_r(z + ix\cos u_r + iy\sin u_r)$$

each term corresponding to some value of u_r.

But this term is a solution of the equation

$$\frac{\partial^2 V_r}{\partial X_r^2} + \frac{\partial^2 V_r}{\partial Z_r^2} = 0,$$

where

$$\begin{aligned} X_r &= \quad x\cos u_r + y\sin u_r, \\ Y_r &= -x\sin u_r + y\cos u_r, \\ Z_r &= z, \end{aligned}$$

so that (X_r, Y_r, Z_r) represent coordinates derived from (x, y, z) by a rotation of the axes through an angle u_r round the axis of z.

Thus we see that *the general solution of Laplace's equation can be regarded as the sum of an infinite number of elementary constituents V_r, each constituent being the solution of an equation*

$$\frac{\partial^2 V_r}{\partial X_r^2} + \frac{\partial^2 V_r}{\partial Z_r^2} = 0,$$

and the axes (X_r, Y_r, Z_r) being derived from the axes (x, y, z) by a simple rotation round the axis of z.

2°. *The particular solutions in terms of Legendre functions.* It is interesting to see how the well-known particular solutions of Laplace's equation in terms of Legendre functions can be obtained as a case of the solution given in § 2.

The particular solutions in question are of the form

$$r^n P_n^m(\cos\theta)\cos m\varphi \quad \text{and} \quad r^n P_n^m(\cos\theta)\sin m\varphi$$
$$(n = 0, 1, 2, \cdots, \infty;\ m = 0, 1, 2, \cdots, n),$$

where (r, θ, φ) are the polar coordinates corresponding to the rectangular coordinates (x, y, z), and where

$$P_n^m(\cos\theta) = \frac{(-1)^m \sin^m\theta}{2^n n!} \frac{d^{n+m}(\sin^{2n}\theta)}{d(\cos\theta)^{n+m}}.$$

Now the function $P_n^m(\cos\theta)$ can be expressed by the integral

$$P_n^m(\cos\theta) = \frac{(n+m)(n+m-1)\cdots(n+1)}{\pi}(-1)^{\frac{m}{2}}\int_0^{2\pi}(\cos\theta + i\sin\theta\cos\psi)^n \cos m\psi\, d\psi,$$

and thus we have

$$r^n P_n^m(\cos\theta)\cos m\varphi = \frac{(n+m)(n+m-1)\cdots(n+1)}{\pi}(-1)^{\frac{m}{2}}\int_0^{\pi}(z + i\sqrt{(x^2+y^2)}\cos\psi)^n \cos m\psi \cos m\varphi\, d\psi$$

$$= \frac{(n+m)(n+m-1)\cdots(n+1)}{2\pi}(-1)^{\frac{m}{2}}\int_0^{2\pi}(z + i\sqrt{x'^2+y^2}\cos\psi)^n \cos m(\psi-\varphi)\, d\psi$$

$$= \frac{(n+m)(n+m-1)\cdots(n+1)}{2\pi}(-1)^{\frac{m}{2}}\int_0^{2\pi}(z + ix\cos u + iy\sin u)^n \cos mu\, du.$$

We see therefore that *the solution $r^n P_n^m(\cos\theta)\cos m\varphi$ is a numerical multiple of*

$$\int_0^{2\pi}(z + ix\cos u + iy\sin u)^n \cos mu\, du.$$

Similarly the solution $r^n P_n^m(\cos\theta)\sin m\varphi$ is a numerical multiple of

$$\int_0^{2\pi}(z+ix\cos u+iy\sin u)^n \sin mu\,du.$$

From this it is clear that *in order to express any solution*

$$\int_0^{2\pi} f(z+ix\cos u+iy\sin u,\ u)\,du$$

of Laplace's equation, as a series of harmonic terms of the form

$$r^n P_n^m(\cos\theta)\cos m\varphi \quad \textit{and} \quad r^n P_n^m(\cos\theta)\sin m\varphi,$$

it is only necessary to expand the function f as a Taylor series with respect to the first argument $z+ix\cos u+iy\sin u$, *and as a Fourier series with respect to the second argument* u.

As an example of this procedure, we shall suppose it required to find the potential of a prolate spheroid in the form

$$\int_0^{2\pi} f(z+ix\cos u+iy\sin u,\ u)\,du,$$

and to expand this potential as a series of harmonics. Let

$$\frac{x^2+y^2}{a^2}+\frac{z^2}{c^2}=0$$

be the equation of the surface of the spheroid; and suppose that it is a homogeneous attracting body of mass M. To find its potential, we can make use of the theorem that the potential at external points is the same as that of a rod joining the foci, of line-density $\frac{3M(c^2-a^2-z^2)}{4(c^2-a^2)^{\frac{3}{2}}}$; that is, it is

$$\frac{3M}{8\pi(c^2-a^2)^{\frac{3}{2}}}\int_0^{2\pi}du\int_{-\sqrt{c^2-a^2}}^{\sqrt{c^2-a^2}}\frac{(c^2-a^2-\zeta^2)\,d\zeta}{z-\zeta+ix\cos u+iy\sin u}$$

or

$$\frac{3M}{8\pi(c-a)^{\frac{3}{2}}}\int_0^{2\pi}\left\{(c^2-a^2-B^2)\log\frac{B+\sqrt{c^2-a^2}}{B-\sqrt{c^2-a^2}}+2\sqrt{c^2-a^2}\,B\right\}du,$$

where B is written for $z+ix\cos u+iy\sin u$.

Expanding the integrand in ascending powers of $\frac{1}{B}$, we have the potential in the form

$$\frac{3M}{2\pi}\int_0^{2\pi}\left\{\frac{1}{1\cdot3\cdot B}+\frac{c^2-a^2}{3\cdot5\cdot B^3}+\frac{(c^2-a^2)^2}{5\cdot7\cdot B^5}+\cdots\right\}du.$$

Since

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\frac{du}{B^{n+1}} = \frac{P_n(\cos\theta)}{r^{n+1}},$$

this gives *the required expansion of the potential* of the spheroid in Legendre functions, namely the series

$$3M\left\{\frac{1}{1\cdot 3r} + \frac{(c^2-a^2)P_2(\cos\theta)}{3\cdot 5\cdot r^3} + \frac{(c^2-a^2)^2P_4(\cos\theta)}{5\cdot 7\cdot r^5} + \cdots\right\}.$$

This result may be extended to the case of the potential of an ellipsoid with three unequal axes, by using a formula for the potential of an ellipsoid given by Laguerre*)

3°. *The particular solutions of Laplace's equation which involve Bessel functions.* We shall next shew how the well-known particular solutions of Laplace's equation in terms of Bessel functions can be obtained as a case of the general solution. The particular solutions in question are of the form

$$e^{kz}J_m(k\varrho)\cos m\varphi \quad \text{and} \quad e^{kz}J_m(k\varrho)\sin m\varphi,$$

where k and m are constants, and z, ϱ, φ are the cylindrical co-ordinates corresponding to the rectangular co-ordinates x, y, z, so that

$$x = \varrho\cos\varphi, \qquad y = \varrho\sin\varphi.$$

Now if in the solution

$$e^{kz}J_m(k\varrho)\cos m\varphi$$

we replace $J_m(k\varrho)$ by its value

$$J_m(k\varrho) = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}\cos(m\theta - k\varrho\sin\theta)\,d\theta,$$

we find after a few simple transformations that

$$e^{kz}J_m(k\varrho)\cos m\varphi = \frac{(-1)^{\frac{m}{2}}}{2\pi}\int_0^{2\pi} e^{k(z+ix\cos u+iy\sin u)}\cos mu\,du.$$

The other solutions which involve $\sin m\varphi$, can be similarly expressed: we see therefore that *the solutions*

$$e^{kz}J_m(k\varrho)\cos m\varphi \quad \textit{and} \quad e^{kz}J_m(k\varrho)\sin m\varphi$$

*) C. R., 1878.

are numerical multiples of

$$\int_0^{2\pi} e^{k(z+ix\cos u+iy\sin u)}\cos mu\,du$$

and

$$\int_0^{2\pi} e^{k(z+ix\cos u+iy\sin u)}\sin mu\,du$$

respectively. It follows from this that *in order to express any solution*

$$\int_0^{2\pi} f(z+ix\cos u+iy\sin u,\,u)\,du$$

of Laplace's equation as a sum of terms of the form

$$e^{kz}J_m(k\rho)\cos m\varphi \quad \textit{and} \quad e^{kz}J_m(k\rho)\sin m\varphi,$$

it is only necessary to expand the function f in terms of exponentials of its first argument $z+ix\cos u+iy\sin u$, *and as a Fourier series with respect to its second argument* u.

As an example of the use which may be made of these results, we shall suppose it required to express the potential-function

$$V=1+e^{-z}J_0(\rho)+e^{-2z}J_0(2\rho)+e^{-3z}J_0(3\rho)+\cdots$$

(where z is supposed positive) as a series of harmonic terms of the type involving Legendre functions: and also to find a distribution of attracting matter of which this in the potential. This can be done in the following way. We have

$$\begin{aligned} V&=1+e^{-z}J_0(\rho)+e^{-2z}J_0(2\rho)+e^{-3z}J_0(3\rho)+\cdots\\ &=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\{1+e^{-z-ix\cos u-iy\sin u}+e^{-2(z+ix\cos u+iy\sin u)}+\cdots\}\,du\\ &=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\frac{du}{1-e^{-(z+ix\cos u+iy\sin u)}}. \end{aligned}$$

But if t be any variable different from zero, and such that $|t|<2\pi$, we have

$$\frac{1}{1-e^t}=-\frac{1}{t}+\frac{1}{2}-B_1\frac{t}{2!}+B_2\frac{t^3}{4!}-B_3\frac{t^5}{6!}+\cdots,$$

where B_1, B_2, are Bernoulli's numbers. Therefore, so long as z is positive and $|z+ix\cos u+iy\sin u|<2\pi$ i. e., so long as z is positive and $x^2+y^2+z^2<4\pi^2$ we have

$$V=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\left\{\frac{1}{z+ix\cos u+iy\sin u}+\frac{1}{2}+\frac{B_1}{2!}(z+ix\cos u+iy\sin u)+\cdots\right\}du$$

or

$$V=\frac{1}{r}+\frac{1}{2}-\frac{B_1}{2!}rP_1(\cos\vartheta)-\frac{B_2}{4!}r^3P_2(\cos\theta)+\frac{B_3}{6!}r^5P_5(\cos\theta)+\cdots$$

and *this is the required expansion of V as a series of harmonics involving Legendre functions.*

Next, since

$$\frac{1}{1-e^{-z}}=\frac{1}{2}+\frac{1}{z}+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{z+2ni\pi}+\frac{1}{z-2ni\pi},$$

we have

$$V=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}du\left[\frac{1}{2}+\frac{1}{z+ix\cos u+iy\sin u}+\sum_{n=1}^{\infty}\left\{\frac{1}{z+ix\cos u+iy\sin u+2ni\pi}\right.\right.$$
$$\left.\left.+\frac{1}{z+ix\cos u+iy\sin u-2ni\pi}\right\}\right],$$

or

$$V=\frac{1}{2}+\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}+\sum_{n=1}^{\infty}\left\{\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2+(z+2ni\pi)^2}}+\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2+(z-2ni\pi)^2}}\right\},$$

and therefore V *can be regarded as the potential due to a set of attracting masses placed at equal imaginary intervals $2i\pi$ along the axis of z.*

§ 4.

The differential equation $\frac{\partial^2V}{\partial x^2}+\frac{\partial^2V}{\partial y^2}+\frac{\partial^2V}{\partial z^2}=k^2\frac{\partial^2V}{\partial t^2}$.

We shall next consider the general differential equation of wave-motions,

$$\frac{\partial^2V}{\partial x^2}+\frac{\partial^2V}{\partial y^2}+\frac{\partial^2V}{\partial z^2}=k^2\frac{\partial^2V}{\partial t^2},$$

where k is a constant.

Writing kt for t, this becomes

$$\frac{\partial^2V}{\partial x^2}+\frac{\partial^2V}{\partial y^2}+\frac{\partial^2V}{\partial z^2}=\frac{\partial^2V}{\partial t^2},$$

which we shall take for the present as the standard form of the equation.

In order to find the general solution of this equation, we follow a procedure analogous to that of § 2. Let $V(x, y, z, t)$ be any solution (single-valued or many-valued) of the equation; and let (x_0, y_0, z_0, t_0) be a

place at which some branch of the function V is regular. Then if we write $x = x_0 + X$, $y = y_0 + Y$, $z = z_0 + Z$, $t = t_0 + T$, it will be possible to expand this branch of the function V as a power-series of the form

$$V = a_0 + a_1 X + b_1 Y + c_1 Z + d_1 T + a_2 X^2 + b_2 Y^2 + c_2 Z^2 + d_2 T^2 + e_2 XY + f_2 XZ + g_2 XT + h_2 YZ + k_2 YT + l_2 ZT + a_3 X^3 + \cdots,$$

which will be absolutely and uniformly convergent for a certain finite domain of values of X, Y, Z, T. Substituting this expansion in the differential equation, which may be written

$$\frac{\partial^2 V}{\partial X^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial Y^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial Z^2} = \frac{\partial^2 V}{\partial T^2},$$

and equating to zero the coefficients of various powers of X, Y and Z, we obtain an infinite number of linear relations, namely

$$a_2 + b_2 + c_2 = d_2, \text{ etc.},$$

between the constants in the expansion. There are $\frac{1}{6}(n-1)\,n(n+1)$ of these relations between the $\frac{1}{6}(n+1)(n+2)(n+3)$ coefficients of terms of any degree n in the expansion of V; so that only

$$\frac{1}{6}\{(n+1)(n+2)(n+3) - (n-1)\,n(n+1)\}$$

or

$$(n+1)^2$$

of the coefficients of terms of degree n in the expansion of V are really independent. It follows that the terms of degree n in V must be a linear combination of $(n+1)^2$ linearly independent particular solutions of degree n in X, Y, Z, T.

To find these solutions, consider the expansion of the quantity

$$(X \sin u \cos v + Y \sin u \sin v + Z \cos u + T)^n.$$

If we first take the expansion in the form

$$g_0 + g_1 \cos v + g_2 \cos 2v + \cdots + g_n \cos nv + h_1 \sin v + h_2 \sin 2v + \cdots + h_n \sin nv,$$

we have seen in § 2 that $g_0, g_1, \cdots, g_n, h_1, \cdots, h_n$, are linearly independent functions of X, Y, Z and T. Moreover, g_m and h_m are of the form $\sin^m u \times$ a polynomial of degree $(n-m)$ in $\cos u$, and therefore each of them contains $(n-m+1)$ independent polynomials in X, Y, Z, T. Thus the total number of independent polynomials in X, Y, Z, T, in the expansion of

$$(X \sin u \cos v + Y \sin u \sin v + Z \cos u + T)^n$$

in sines and cosines of multiples of u and v, is

$$(n+1) + 2n + 2(n-1) + 2(n-2) + \cdots + 2$$

or

$$(n+1)^2.$$

Now each of these polynomials must satisfy the equation

$$\frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial z^2} = \frac{\partial^2 V}{\partial t^2},$$

since the quantity

$$(X \sin u \cos v + Y \sin u \sin v + Z \cos u + T)^n$$

does so: and therefore they may be taken as the $(n+1)^2$ linearly independent solutions of the equation

$$\frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial z^2} = \frac{\partial^2 V}{\partial t^2}$$

which are homogeneous of degree n in X, Y, Z, T. Now by Fourier's theorem we have

$$g_m = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} (X \sin u \cos v + Y \sin u \sin v + Z \cos u + T)^n \cos mv \, dv;$$

and since g_m is of the form

$$\sum_{r=0}^{n-m} u_r \sin^m u \cos^r u,$$

where u_r is one of the polynomials in question, it is clear that g_m can be expressed as a sum of sines or cosines of multiples of u, according as m is even or odd; and the coefficient of one of these sines or cosines, say of $\cos su$, is

$$\frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} g_m \cos su \, du.$$

It follows that each of the polynomials u_r can be expressed in the form

$$\int_0^{\pi} g_m f(u) \, du,$$

where $f(u)$ denotes some periodic function of u; that is, it can be expressed in the form

$$\int_0^{2\pi} \int_0^{\pi} (X \sin u \cos v + Y \sin u \sin v + Z \cos u + T)^n f(u) \cos mv \, du \, dv.$$

It follows from this that each of the $(n+1)^2$ polynomial solutions of degree n can be expressed in the form

$$\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi}(X\sin u\cos v + Y\sin u\sin v + Z\cos u + T)^n f(u,v)\,du\,dv,$$

where $f(u,v)$ denotes some periodic function of u and v; and therefore the terms of degree n in V can be expressed in this form.

The function V itself can therefore be expressed in the form

$$\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi} f(X\sin u\cos v + Y\sin u\sin v + Z\cos u + T, u, v)\,du\,dv,$$

where f denotes some function of the three arguments

$$X\sin u\cos v + Y\sin u\sin v + Z\cos u + T,\ u,\ \text{and}\ v;$$

and f may without loss of generality be supposed to be periodic in u and v.

Now

$$\begin{aligned} &X\sin u\cos v + Y\sin u\sin v + Z\cos u + T \\ &= (x\sin u\cos v + y\sin u\sin v + z\cos u + t) \\ &\quad - (x_0\sin u\cos v + y_0\sin u\sin v + z_0\cos u + t_0); \end{aligned}$$

and the termo

$$(x_0\sin u\cos v + y_0\sin u\sin v + z_0\cos u + t_0)$$

can be absorbed into the arguments u and v; moreover V was taken to be any solution of the partial differential equation; we have, therefore, on writing $\frac{t}{k}$ for t, the result that *the general solution of the partial differential equation of wave-motions,*

$$\frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial z^2} = k^2\frac{\partial^2 V}{\partial t^2},$$

is

$$V = \int_0^{2\pi}\int_0^{\pi} f\left(x\sin u\cos v + y\sin u\sin v + z\cos u + \frac{t}{k},\ u,\ v\right)du\,dv,$$

where f is an arbitrary function of the three arguments

$$x\sin u\cos v + y\sin u\sin v + z\cos u + \frac{t}{k},\ u\ \text{and}\ v.$$

§ 5.

Deductions from the general solution of § 4.

1°. *The analysis of wave-motions.* We shall now deduce from the general solution thus obtained a result relating to the analysis of those phenomena which are represented by solutions of the equation

$$\frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial z^2} = k^2 \frac{\partial^2 V}{\partial t^2}.$$

If we revert to the fundamental idea of the definite integral as the limit of a sum of an infinite number of terms, we see that the general solution

$$V = \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi} f\left(\sin u \cos v + y \sin u \sin v + z \cos u + \frac{t}{k},\ u,\ v\right) du\, dv$$

can be interpreted as meaning that V is the sum of an infinite number of terms of the type

$$f\left(x \sin u \cos v + y \sin u \sin v + z \cos u + \frac{t}{k},\ u,\ v\right),$$

there being one of these terms corresponding to every direction in space given by the direction-cosines

$$\sin u \cos v, \quad \sin u \sin v, \quad \cos u.$$

The solution V can therefore be regarded as the sum of constituent solutions, each of the type

$$F\left(x \sin u \cos v + y \sin u \sin v + z \cos u + \frac{t}{k}\right)$$

where the function F varies from one direction (u, v) to another.

Now let us fix our attention on one of these constituent solutions F. If for some range of values of the quantity

$$x \sin u \cos v + y \sin u \sin v + z \cos u + \frac{t}{k},$$

the function F is finite and continuous, we can for this range of values express F by Fourier's integral formula in the form

$$\frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} d\lambda \int_a^b F(\alpha) \cos\left\{\lambda\left(x \sin u \cos v + y \sin u \sin v + z \cos u + \frac{t}{k}\right) - \lambda\alpha\right\} d\lambda\, d\alpha,$$

where a and b are the terminals of this range of values; or supposing the integration with respect to α to be performed,

$$\int_0^{\infty} g(\lambda) \begin{matrix}\cos \\ \sin\end{matrix} \left\{\lambda\left(x \sin u \cos v + y \sin u \sin v + z \cos u + \frac{t}{k}\right)\right\} d\lambda,$$

where $g(\lambda)$ denotes some function of λ.

Now let us again revert to the idea of the definite integral as the limit of a sum. Then this latter integral can be regarded as the sum of an infinite number of terms of the type

$$\begin{matrix}\cos\\ \sin\end{matrix}\left\{\lambda\left(x\sin u\cos v+y\sin u\sin v+z\cos u+\frac{t}{k}\right)\right\},$$

each term being multiplied by some factor depending on λ.

The solution V can therefore be regarded as constituted by the superposition of terms of this last type. But a term of this type represents a *simple uniform plane wave;* for on transforming the axes so that the new axis of x is the line whose direction-cosines are

$$\sin u\cos v,\quad \sin u\sin v,\quad \cos u,$$

the term becomes

$$\begin{matrix}\cos\\ \sin\end{matrix}\lambda\left(x+\frac{t}{k}\right),$$

which represents a simple plane wave whose direction of propagation is the new axis of x. We see therefore that *the general finite solution of the differential equation of wave-motions,*

$$\frac{\partial^2 V}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 V}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 V}{\partial z^2}=k^2\frac{\partial^2 V}{\partial t^2}$$

can be analysed into simple plane waves, represented by terms of the type

$$F(\lambda,u,v)\begin{matrix}\cos\\ \sin\end{matrix}\left\{\lambda\left(x\sin u\cos v+y\sin u\sin v+z\cos u+\frac{t}{k}\right)\right\}.$$

It is interesting to observe that Dr. Johnstone Stoney in 1897*) shewed by physical reasoning, and without any reference to the equation

$$\frac{\partial^2 V}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 V}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 V}{\partial z^2}=k^2\frac{\partial^2 V}{\partial t^2}$$

that all the disturbances of the luminiferous ether arising from sources of certain kinds can be resolved into trains of plane waves.

2°. *Solution of the equation*

$$\frac{\partial^2 V}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 V}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 V}{\partial z^2}+V=0.$$

If a solution W of the equation

$$\frac{\partial^2 W}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 W}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 W}{\partial z^2}=\frac{\partial^2 W}{\partial t^2}$$

be of the form Ve^{it}, where V is a function of x, y, z only, which does not involve t, then V clearly satisfies the equation

$$\frac{\partial^2 V}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 V}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 V}{\partial z^2}+V=0,$$

*) *Philosoph. Magazine,* (V) XLIII.

and therefore, on reference to the general solution of the wave-motion equation found in § 4, we see that *the general solution of the equation*

$$\frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial z^2} + V = 0$$

is

$$V = \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi} e^{i(x \sin u \cos v + y \sin u \sin v + z \cos u)} f(u, v)\, du\, dv.$$

3°. *Deduction of the known particular solutions of the equation*

$$\frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial z^2} + V = 0.$$

It is known that particular solutions of the equation

$$\frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial z^2} + V = 0$$

exist, which are of the form

$$V = r^{-\frac{1}{2}} J_{n+\frac{1}{2}}(r)\ P_n^m(\cos\theta) \begin{matrix}\cos \\ \sin\end{matrix} m\varphi$$

$$(n = 0, 1, 2, \cdots;\ m = 0, 1, 2, \cdots, n),$$

where r, θ, φ are the polar coordinates corresponding to x, y, z. We shall now shew how these may be derived from the general solution of the equation which has just been found.

For let the general solution be written in the form

$$V = \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi} e^{i(x \sin u \cos v + y \sin u \sin v + z \cos u)} f(u, v) \sin u\, du\, dv,$$

where $f(u, v)$ is an arbitrary function of the two arguments u and v, which may without loss of generality be taken to be periodic in u and v.

Now let the function $f(u, v)$ be expanded in surface-harmonics of u and v, so that

$$V = \sum_{n=0}^{\infty} \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi} e^{i(x \sin u \cos v + y \sin u \sin v + z \cos u)} Y_n(u, v) \sin u\, du\, dv$$

where Y_n is a surface-harmonic of order n, i. e., if

$$\xi = \rho \sin u \cos v, \quad \eta = \rho \sin u \sin v, \quad \zeta = \rho \cos u,$$

are regarded as the co-ordinates of a point in space, then $\rho^n Y_n(u, v)$ is a homogeneous polynomial of degree n in ξ, η, ζ, satisfying Laplace's equation

$$\frac{\partial^2 V}{\partial \xi^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial \eta^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial \zeta^2} = 0.$$

Next, let the variables be changed by the substitution

$$\cos u = \cos\theta\cos\omega + \sin\theta\sin\omega\cos v',$$
$$\sin u\sin(\varphi - v) = \sin\omega\sin v',$$
$$\sin u\cos(\varphi - v) = \cos\omega\sin\theta - \sin\omega\cos v'\cos\theta,$$

so that $(\varrho\sin\omega\cos v', \varrho\sin\omega\sin v', \varrho\cos\omega)$ are the co-ordinates of the point (ξ, η, ζ) referred to new axes, the line whose direction-cosines are $(\sin\theta\cos\varphi, \sin\theta\sin\varphi, \cos\theta)$ being taken as the new axis of z.

Thus

$$V = \sum_{n=0}^{\infty}\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi} e^{ir\cos\omega}\, Y_n(u, v)\sin\omega\, d\omega\, dv'.$$

But a surface-harmonic of any order n remains a surface-harmonic of order n under any transformation of axes in which the origin is unchanged: and therefore $Y_n(u, v)$ is a surface harmonic of order n in ω and v'; and consequently it can be expanded in the form

$$A_n(\theta,\varphi)P_n(\cos\omega) + A_n^1(\theta,\varphi)P_n^1(\cos\omega)\cos v' + A_n^2(\theta,\varphi)P_n^2(\cos\omega)\cos 2v' + \cdots + A_n^n(\theta,\varphi)P_n^n(\cos\omega)\cos nv' + B_n'(\theta,\varphi)P_n'(\cos\omega)\sin v' + \cdots + B_n^n(\theta,\varphi)P_n^n(\cos\omega)\sin nv',$$

where $A_n(\theta,\varphi), \cdots, B_n^n(\theta,\varphi)$ are functions of θ and φ. Substituting this value for $Y_n(u, v)$ in the integral, and performing the integration with respect to v', we have

$$V = \sum_{n=0}^{\infty} A_n(\theta,\varphi)\int_0^{\pi} e^{ir\cos\omega}P_n(\cos\omega)\sin\omega\, d\omega;$$

and in virtue of the relation*)

$$\int_0^{\pi} e^{ir\cos\omega}P_n(\cos\omega)\sin\omega\, d\omega = \left(\frac{\pi}{2}\right)^{\frac{1}{2}}\frac{i^n J_{n+\frac{1}{2}}(r)}{\sqrt{r}},$$

this can be written in the form

$$V = \sum_{n=0}^{\infty} r^{-\frac{1}{2}}J_{n+\frac{1}{2}}(r)f_n(\theta,\varphi)$$

where $f_n(\theta,\varphi)$ denotes some function of θ and φ.

*) A proof of this and several related results will be found in a paper shortly to be published by the author.

Since the surface-harmonics $Y_n(\theta, \varphi)$ were independent of each other, the functions $f_n(\theta, \varphi)$, will be independent of each other and therefore each of the quantities

$$r^{-\frac{1}{2}} J_{n+\frac{1}{2}}(r) f_n(\theta, \varphi)$$

will be a solution of the equation

$$\frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial z^2} + V = 0.$$

But on transforming this equation to polar co-ordinates, and substituting the expression

$$r^{-\frac{1}{2}} J_{n+\frac{1}{2}}(r) f_n(\theta, \varphi)$$

for V, we find that the function $f_n(\theta, \varphi)$ must satisfy the differential equation for a surface-harmonic in θ and φ of order n. It follows that $f_n(\theta, \varphi)$ can be expanded in the form

$$f_n(\theta, \varphi) = A_n P_n(\cos\theta) + A_n^1 \cos\varphi P_n^1(\cos\theta) + \cdots + A_n \cos n\varphi P_n^n(\cos\theta) + B_n^1 \sin\varphi P_n^1(\cos\theta) + \cdots + B_n^n \sin n\varphi P_n^n(\cos\theta),$$

and thus *the particular solutions*

$$r^{-\frac{1}{2}} J_{n+\frac{1}{2}}(r) P_n^m(\cos\theta) \begin{matrix}\cos \\ \sin\end{matrix} m\varphi$$

are obtained.

Moreover, it is clear from the above proof that *in order to expand any solution*

$$V = \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi} e^{i(x \sin u \cos v + y \sin u \sin v + z \cos u)} f(u, v) \sin u \, du \, dv$$

of the equation

$$\frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial z^2} + V = 0$$

as a series of the form

$$\sum_{n=0}^{\infty} r^{-\frac{1}{2}} J_{n+\frac{1}{2}}(r) Y_n(\theta, \varphi),$$

where Y_n is a surface-harmonic of order n in θ and φ, it is only necessary to expand the function $f(u, v)$ in surface-harmonics of u and v.

4°. *Expression of the solution of the equation*

$$\frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial z^2} + V = 0$$

as a series of generalised Bessel functions.

Another analysis of the solutions of the equation

$$\frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial z^2} + V = 0,$$

entirely different from that given in 3°, can be found in the following way.

Consider the expression

$$e^{\frac{1}{4}x\left(s-\frac{1}{s}\right)\left(t+\frac{1}{t}\right) - \frac{i}{4}y\left(s-\frac{1}{s}\right)\left(t-\frac{1}{t}\right) + \frac{i}{2}z\left(s+\frac{1}{s}\right)};$$

if this expression be regarded as a function of s and t, it can for finite non-zero values of s and t be expanded as a series of (positive and negative) integral powers of s and t, the coefficients in this series being functions of x, y and z. Let the coefficient of the term in $s^m t^n$ be denoted by $J_{m,n}(x, y, z)$: so that we have the relation

$$e^{\frac{1}{4}x\left(s-\frac{1}{s}\right)\left(t+\frac{1}{t}\right) - \frac{i}{4}y\left(s-\frac{1}{s}\right)\left(t-\frac{1}{t}\right) + \frac{i}{2}z\left(s+\frac{1}{s}\right)} = \sum_{m=-\infty}^{\infty}\sum_{n=-\infty}^{\infty} J_{m,n}(x, y, z)\, s^m t^n.$$

This equation can be regarded as a generalisation of the equation

$$e^{\frac{1}{2}z\left(t-\frac{1}{t}\right)} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} J_n(z)\, t^n,$$

which defines the ordinary Bessel functions; and we shall consequently call the functions $J_{m,n}(x, y, z)$ *generalised Bessel functions.*

We now proceed to establish some properties of the functions $J_{m,n}(x, y, z)$; it will be seen that they are very similar to those of the ordinary Bessel functions.

In the first place, since the expression

$$V = e^{\frac{1}{4}x\left(s-\frac{1}{s}\right)\left(t+\frac{1}{t}\right) - \frac{i}{4}y\left(s-\frac{1}{s}\right)\left(t-\frac{1}{t}\right) + \frac{i}{2}z\left(s+\frac{1}{s}\right)}$$

satisfies the equation

$$\frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial z^2} + V = 0,$$

it follows that *each of the functions* $J_{m,n}(x, y, z)$ *satisfies the equation*

$$\frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial z^2} + V = 0.$$

In the second place, we shall obtain an expression for $J_{m,n}(x, y, z)$ as a definite integral. By Laurent's theorem, we know that the coefficient of s^m in the expansion of

$$e^{\frac{1}{4}x\left(s-\frac{1}{s}\right)\left(t+\frac{1}{t}\right) - \frac{i}{4}y\left(s-\frac{1}{s}\right)\left(t-\frac{1}{t}\right) + \frac{i}{2}z\left(s+\frac{1}{s}\right)}$$

is

$$\frac{1}{2\pi i}\int_C s^{-m-1}e^{\frac{1}{4}x\left(s-\frac{1}{s}\right)\left(t+\frac{1}{t}\right)-\frac{i}{4}y\left(s-\frac{1}{s}\right)\left(t-\frac{1}{t}\right)+\frac{i}{2}z\left(s+\frac{1}{s}\right)}ds,$$

where C is any simple contour in the s-plane surrounding the origin; and again applying Laurent's theorem, the coefficient of t^n in this expression is seen to be

$$\frac{1}{4\pi^2}\int_C\int_D s^{-m-1}t^{-n-1}e^{\frac{1}{4}x\left(s-\frac{1}{s}\right)\left(t+\frac{1}{t}\right)-\frac{i}{4}y\left(s-\frac{1}{s}\right)\left(t+\frac{1}{t}\right)+\frac{i}{2}z\left(s+\frac{1}{s}\right)}ds\,dt,$$

where D is any simple contour in the t-plane surrounding the origin.

Now write $s=e^{iu}$, $t=e^{iv}$. Thus *we have the result*

$$J_{m,n}(x,y,z)=\frac{1}{4\pi}\int_0^{2\pi}\int_0^{2\pi}e^{-miu-niv+ix\sin u\cos v+iy\sin u\sin v+iz\cos u}du\,dv,$$

which may be regarded as the analogue of Bessel's integral

$$J_n(z)=\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}\cos(nu-z\sin u)\,du.$$

The functions $J_{m,n}(x,y,z)$ likewise possess an additiontheorem: for we have

$$\begin{aligned}&e^{\frac{1}{4}(x+a)\left(s-\frac{1}{s}\right)\left(t+\frac{1}{t}\right)-\frac{i}{4}(y+b)\left(s-\frac{1}{s}\right)\left(t-\frac{1}{t}\right)+\frac{i}{2}(z+c)\left(s+\frac{1}{s}\right)}\\ &=e^{\frac{1}{4}x\left(s-\frac{1}{s}\right)\left(t+\frac{1}{t}\right)-\frac{i}{4}y\left(s-\frac{1}{s}\right)\left(t-\frac{1}{t}\right)+\frac{i}{2}z\left(s+\frac{1}{s}\right)}\\ &\times e^{\frac{1}{4}a\left(s-\frac{1}{s}\right)\left(t+\frac{1}{t}\right)-\frac{i}{4}b\left(s-\frac{1}{s}\right)\left(t-\frac{1}{t}\right)+\frac{i}{2}c\left(s+\frac{1}{s}\right)}\end{aligned}$$

and so

$$\begin{aligned}&\sum_{m,n}J_{m,n}(x+a,\ y+b,\ z+c)\,s^m t^n\\ &=\sum_{m,n}J_{m,n}(x,y,z)\,s^m t^n\times\sum_{m,n}J_{m,n}(a,b,c)\,s^m t^n.\end{aligned}$$

Equating coefficients on both sides of this equation, *we have the result*

$$J_{m,n}(x+a,y+b,z+c)=\sum_{p=-\infty}^{\infty}\sum_{q=-\infty}^{\infty}J_{p,q}(x,y,z)\,J_{m-p,n-q}(a,b,c),$$

which is the addition-theorem for the generalised Bessel functions, and is the analogue of the well-known result

$$J_n(z+c)=\sum_{p=-\infty}^{\infty}J_p(z)\,J_{n-p}(c).$$

We shall now shew how the generalised Bessel functions furnish an analysis of the general solution of the equation

$$\frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial z^2} + V = 0.$$

For the general solution is, by 2°,

$$V = \int_0^{\pi} \int_0^{2\pi} e^{i(x \sin u \cos v + y \sin u \sin v + z \cos u)} f(u, v)\, du\, dv,$$

where $f(u, v)$ can without loss of generality be taken to be a periodic function of u and v.

Now let the function $f(u, v)$ be expanded by the extended form of Fourier's theorem, in the form

$$f(u, v) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_{m,n} e^{imu + inv}.$$

Then we have

$$V = \sum_{m=-\infty}^{\infty} \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_{m,n} \int_0^{\pi} \int_0^{2\pi} e^{i(x \sin u \cos v + y \sin u \sin v + z \cos u + mu + nv)}\, du\, dv.$$

Comparing this with the form just found for the generalised Bessel functions, we see that *the general solution of the equation*

$$\frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial z^2} + V = 0$$

can be written

$$V = \sum_{m=-\infty}^{\infty} \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_{m,n} J_{m,n}(x, y, z),$$

where the quantities $a_{m,n}$ are arbitrary constants. This furnishes an alternative analysis of the solution to that given in 2°.

5°. *Gravitation and Electrostatic Attraction explained as modes of Wave-disturbance.*

The result of 1°, namely that any solution of the equation

$$\frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial z^2} = k^2 \frac{\partial^2 V}{\partial t^2}$$

can be analysed into simple plane waves, throws a new light on the nature of those forces, such as gravitation and electrostatic attraction, which vary as the inverse square of the distance. For if a system of forces of this character be considered, their potential (or their component in any given direction) satisfies the equation

$$\frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial z^2} = 0.$$

and therefore *à fortiori* it satisfies the equation

$$\frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial z^2} = k^2 \frac{\partial^2 V}{\partial t^2}$$

where k is any constant. It follows from 1° that this potential (or force-component) can be analysed into simple plane waves in various directions, each wave being propagated with constant velocity. These waves interfere with each other in such a way that, when the action has once been set up, the disturbance at any point does not vary with the time, and depends only on the coordinates (x, y, z) of the point.

It is not difficult to construct, synthetically, systems of coexistent simple waves, having this property that the total disturbance at any point (due to the sum of all the waves) varies from point to point, but does not vary with the time. A simple example of such a system in the following.

Suppose that a particle is emitting spherical waves, such that the disturbance at a distance r from the origin, at time t, due to those waves whose wave-length lies between $\frac{2\pi}{\mu}$ and $\frac{2\pi}{\mu + d\mu}$, is represented by

$$\frac{2\,d\mu}{\pi\mu} \frac{\sin(\mu V t - \mu r)}{r}$$

where V is the velocity of propagation of the waves. Then after the waves have reached the point r, so that $(Vt - r)$ is positive, the total disturbance at this point (due to the sum of all the waves) is

$$\int_0^\infty \frac{2\,d\mu}{\pi\mu} \frac{\sin(\mu V t - \mu r)}{r}.$$

Take $\mu V t - \mu r = y$, where y is a new variable. Then this disturbance is

$$\frac{2}{\pi r} \int_0^\infty \frac{\sin y}{y}\, dy;$$

or, since

$$\int_0^\infty \frac{\sin y}{y}\, dy = \frac{\pi}{2},$$

it is

$$\frac{1}{r}.$$

The total disturbance at any point, due to this system of waves, is therefore independent of the time, and is everywhere proportional to the gravitational potential due to the particle at the point.

It is clear from the foregoing that the field of force due to a gravitating body can be analysed, by a "spectrum analysis" as it were, into an infinite number of constituent fields; and although the whole field of force does not vary with the time, yet *each of the constituent fields is of an undulatory character, consisting of a simple wave-disturbance propagated with uniform velocity.* This analysis of the field into constituent fields can most easily be accomplished by analysing the potential $\frac{1}{r}$ of each attracting particle into terms of the type

$$\frac{\sin(\mu V t - \mu r)}{r}$$

as in the example already given. To each of these terms will correspond one of the constituent fields. In each of these constituent fields the potential will be constant along each wave-front, and consequently the gravitational force in each constituent field will be perpendicular to the wave-front, i. e. *the waves will be longitudinal.*

But these results assimilate the propagation of gravity to that of light: for the undulatory phenomena just described, in which the varying vector is a gravitational force perpendicular to the wave-front, may be compared with the undulatory phenomena made familiar by the electromagnetic theory of light, in which the varying vectors consist of electric and magnetic forces parallel to the wave-front. The waves are in other respects exactly similar, and it seems probable that an identical property of the medium ensures their transmission through space.

This undulatory theory of gravity would require that gravity should be propagated with a finite velocity, which however need not be the same as that of light, and may be enormously greater.

Of course, this investigation does not explain the *cause* of gravity; all that is done is to shew that in order to account for the propagation across space of forces which vary as the inverse square of the distance, we have only to suppose that the medium is capable of transmitting, with a definite though large velocity, simple periodic undulatory disturbances, similar to those whose propagation by the medium constitutes, according to the electromagnetic theory, the transmission of light.

Zum Eliminationsproblem bei analytischen Funktionen mehrerer Veränderlicher.

Von

OTTO BLUMENTHAL in Göttingen.

Wenn eine analytische Funktion einer Veränderlichen sich innerhalb und auf dem Rande eines Gebietes wie eine rationale Funktion verhält, so hat sie innerhalb dieses Gebietes nur eine endliche Anzahl von Nullstellen.

Dieser Satz besitzt sein Analogon im Gebiete der Funktionen von n Veränderlichen. Eine analytische Funktion $r(x, x', \cdots, x^{(n-1)}) = r(x)$ von n Veränderlichen verhält sich innerhalb eines Gebietes wie eine rationale Funktion, wenn sie sich um jeden Punkt dieses Gebietes herum als Potenzreihe in den n Veränderlichen oder als Quotient von zwei Potenzreihen darstellen läßt. Betrachte ich nun m Funktionen

$$r_1(\!(x)\!),\ r_2(\!(x)\!), \cdots, r_m(\!(x)\!)$$

der Veränderlichen (x), welche innerhalb und auf dem Rande eines Gebietes D sich wie rationale Funktionen verhalten, so erhalte ich das gesuchte Analogon, wenn ich die *gemeinsamen Nullstellen* der Funktionen r innerhalb D betrachte. Das entscheidende Moment liegt abermals darin, daß sich die gemeinsamen Nullstellen zu einer *endlichen* Anzahl von Gebilden verschiedener Dimensionen zusammenfassen lassen.

Dieser Satz stellt das erste und grundlegende Resultat der Eliminationstheorie dar. Er wird daher bei Untersuchungen über Systeme von Funktionen mehrerer Veränderlicher vielfach vorausgesetzt und benutzt. Beweise aber sind mir nicht bekannt geworden*); ich möchte daher in vorliegender Note diese Lücke ausfüllen. Einige Anwendungen des Satzes finden sich im 2. Teile meiner Habilitationsschrift**).

Wir wollen dem Satze zunächst seine präzise Formulierung geben.

*) Herr Poincaré hat unterdessen in Acta 26 (p. 55—56) einige kurze Ausführungen zu diesem Satze gegeben. Da er sich auf die nämlichen Hülfssätze stützt, welche auch in dieser Arbeit gebraucht werden, so sind die Unterschiede zwischen seiner Behandlung und der unsrigen leicht ersichtlich.

**) Erscheint in diesen Annalen.

Wir gehen zu diesem Zwecke aus von der bekannten Weierstraßschen Definition des analytischen Gebildes ν^{ter} Stufe im n-dimensionalen Raume. Verstehen wir unter $z, \cdots, z^{(\nu-1)}$ unbeschränkt veränderliche Parameter, so definieren n innerhalb eines gewissen Gebietes um den Nullpunkt herum gleichzeitig konvergente Potenzreihen

$$x = \mathfrak{P}(\!(z)\!),\ x' = \mathfrak{P}'(\!(z)\!),\ \cdots,\ x^{(n-1)} = \mathfrak{P}^{(n-1)}(\!(z)\!) \tag{2}$$

ein *Element eines analytischen Gebildes ν^{ter} Stufe*, und ein *irreduzibeles analytisches Gebilde ν^{ter} Stufe* ist definiert als *Gesamtheit eines Elementes und seiner sämtlichen analytischen Fortsetzungen und Grenzstellen*. Dabei verstehen wir unter „Grenzstelle" einen Punkt $(\!(\xi)\!)$, um welchen keine Entwicklung der Form (2) statt hat, in dessen beliebiger Nähe aber noch Punkte liegen, um welche Fortsetzungen des Elementes möglich sind*).

Auf Grund dieser Definition läßt sich folgender Satz („Endlichkeitssatz") formulieren:

Die Gesamtheit der Stellen innerhalb des Bereiches D, an welchen die Gleichungen

$$r_1 = 0,\ r_2 = 0, \cdots, r_m = 0 \tag{a}$$

gleichzeitig erfüllt sind, besteht 1) *aus einer endlichen Anzahl isolierter Punkte,* 2) *aus analytischen Mannigfaltigkeiten verschiedener Dimensionen, und zwar gibt es von jeder Dimension nur eine endliche Anzahl von Mannigfaltigkeiten.*

Zu dem Endlichkeitssatze tritt aber noch eine bedeutsame Ergänzung hinzu, welche sich auf die analytische Natur der Grenzstellen bezieht. Die sämtlichen innerhalb des Gebietes D auftretenden Grenzstellen haben nämlich einen besonders einfachen Charakter:

An den Grenzstellen der analytischen Gebilde haben die Koordinaten (x) den Charakter algebraischer Funktionen der Parameter (z) („Grenzstellensatz").

Der Beweis der beiden Sätze geht Hand in Hand, wir beginnen mit dem Endlichkeitssatze.

1. Nehmen wir nämlich an, Mannigfaltigkeiten irgend einer bestimmten Dimension kämen in unendlicher Anzahl vor, so gibt es im Inneren oder auf dem Rande von D einen Punkt $(\!(\xi)\!)$, in dessen Nachbarschaft gleichfalls noch unendlich viele solche Mannigfaltigkeiten liegen. In der Umgebung von $(\!(\xi)\!)$ ist aber

$$r_1 = \frac{\mathfrak{P}_1(x-\xi)}{\mathfrak{Q}_1(x-\xi)},\ r_2 = \frac{\mathfrak{P}_2(x-\xi)}{\mathfrak{Q}_2(x-\xi)}, \cdots, r_m = \frac{\mathfrak{P}_m(x-\xi)}{\mathfrak{Q}_m(x-\xi)}, \tag{a'}$$

wo die $\mathfrak{P}_1, \cdots, \mathfrak{P}_m$ in $(\!(\xi)\!)$ verschwindende Potenzreihen sind. Denn wenn die Funktionen $r_1, \cdots, r_m$ in beliebiger Nähe von $(\!(\xi)\!)$ verschwinden, so

*) Diese Definition der Grenzstellen ist weiter gefaßt als die Weierstraßsche.

verschwinden sie auch in $(\!(\xi)\!)$ selbst. Die Gesamtheit aller Punkte in einer gewissen Umgebung von $(\!(\xi)\!)$, für welche die Gleichungen (a) bestehen, ist also gegeben durch

$$\mathfrak{P}_1(\!(x)\!) = 0, \cdots, \mathfrak{P}_m(\!(x)\!) = 0, \tag{b}$$

wobei wir der Kürze halber $x - \xi, \cdots$ durch $x, \cdots$ ersetzt haben, so daß für $(\!(\xi)\!)$ der Nullpunkt eintritt; und es bleibt nur zu zeigen, daß diese Gleichungen nur eine endliche Anzahl von Punkten und Mannigfaltigkeiten der verschiedenen Dimensionen definieren.

2. Wir schicken der Vollständigkeit halber einen einfachen Hülfssatz voraus:

Eine Potenzreihe

$$P(\!(x)\!) = 0 \tag{b'}$$

definiert in einer gewissen Umgebung des Nullpunktes eine endliche Anzahl $(n-1)$*-dimensionaler analytischer Mannigfaltigkeiten, deren Grenzstellen den verlangten Charakter haben.*

Der Beweis beruht auf dem sog. *„Weierstraßschen Vorbereitungssatz"**). Wir können nämlich durch eine lineare Substitution mit nicht verschwindender Determinante an Stelle der Koordinaten (x) immer neue Koordinaten (t) einführen, in welchen die Identität besteht

$$\mathfrak{P}(\!(x)\!) = \bar{\mathfrak{P}}(t, t', \cdots, t^{(n-1)}) = [t^{\mu} + \mathfrak{P}_1(t', \cdots, t^{(n-1)})\, t^{\mu-1} + \cdots + \mathfrak{P}_{\mu}(t', \cdots, t^{(n-1)})]\, K(\!(t)\!)$$
$$= G(t; t', \cdots, t^{(n-1)})\, K(\!(t)\!),$$

wo K eine am Nullpunkte nicht verschwindende Potenzreihe ist, und die $\mathfrak{P}$ Potenzreihen in den Variabelen $t', \cdots, t^{(n-1)}$ bedeuten, welche in einer gewissen Umgebung des Nullpunktes konvergieren und am Nullpunkte selbst verschwinden. Auf Grund dieses Satzes sind also in einer gewissen Umgebung des Nullpunktes *alle Verschwindungspunkte von* $\mathfrak{P}(\!(x)\!)$ *gegeben durch die in* t *algebraische Gleichung*

$$G(t; t', \cdots, t^{(n-1)}) = 0.$$

Ich nenne ein derartiges Polynom G *irreduzibel*, wenn es sich nicht in Faktoren niedrigeren Grades in t zerlegen läßt, deren Koeffizienten abermals Potenzreihen in $t', \cdots, t^{(n-1)}$ sind. Man beweist dann nach dem Euclidischen Verfahren die *Eindeutigkeit* der Zerlegung eines beliebigen Polynoms in irreduzibele Faktoren. Die Koeffizienten eines irreduzibelen Faktors haben außerdem die Eigenschaft, am Nullpunkte sämtlich zu verschwinden. Jedes Polynom zerfällt in eine *endliche Anzahl* irreduzibeler Faktoren.

Wir zeigen jetzt, daß jeder irreduzibele Faktor $g(t; t', \cdots, t^{(n-1)}) = 0$ ein einziges $(n-1)$-dimensionales analytisches Gebilde definiert. In der

*) Weierstraß, Werke, II, pg. 135 ff. S. a. Poincaré, Thèse (1879), pg. 6—12.

Tat besteht ein Element eines solchen Gebildes um jeden Punkt $g = 0$, an welchem $g' = \frac{dg}{dt}$ von 0 verschieden ist*). Derartige Punkte existieren aber in beliebiger Nähe des Nullpunktes. Denn aus der Irreduzibilität von g folgt das Bestehen einer Identität der Form

$$fg + f'g' = \Delta(t', t'', \cdots, t^{(n-1)}),$$

wo f und f' Funktionen der gleichen Form wie g und g' sind, und Δ eine nicht identisch verschwindende Funktion von $n-1$ Variabelen bedeutet. An einem Punkte $\Delta \neq 0$, $g = 0$ aber kann g' nicht verschwinden.

Das so konstruierte Element mit seinen sämtlichen analytischen Fortsetzungen und Grenzstellen definiert ein $(n-1)$-dimensionales analytisches Gebilde, auf welchem $g = 0$ ist. Umgekehrt aber kann ich durch analytische Fortsetzung des einen Elementes alle regulären Stellen $g = 0$ erreichen: diese Tatsache beweist man genau nach dem bei algebraischen Funktionen üblichen Verfahren. *Der irreduzibele Faktor $g = 0$ definiert also in der Tat ein einziges analytisches Gebilde $(n-1)^{ter}$ Stufe.*

Damit ist der Hülfssatz bewiesen. Ich kann mir übrigens zum Zwecke der Aufsuchung der analytischen Gebilde das Polynom G von mehrfachen Faktoren befreit denken, was immer auf rationalem Wege möglich ist.

Der Grenzstellensatz schließlich folgt unmittelbar aus dem Vorbereitungssatz durch Resultantenbildung, wenn ich die (x) als lineare Funktionen der (t) ausdrücke: man erhält dann für jede einzelne Koordinate eine Gleichung der Form

$$G(x; t', \cdots, t^{(n-1)}) = 0.$$

3. Der Beweis des Endlichkeitssatzes geschieht hiernach mit Hülfe der vollständigen Induktion. Wir setzen ihn für $m-1$ Gleichungen als bewiesen voraus und zeigen, daß er für m Gleichungen ungeändert besteht. Sei nämlich nach Voraussetzung eine ν-fache Mannigfaltigkeit der Form (2) gegeben, welche den Gleichungen

$$\text{(b')} \qquad \mathfrak{P}_1(\!(x)\!) = 0, \cdots, \mathfrak{P}_{m-1}(\!(x)\!) = 0$$

genügt, so zeigen wir, daß bei Hinzufügung einer weiteren Gleichung

$$\mathfrak{P}_m(\!(x)\!) = P(\!(x)\!) = 0$$

einer der beiden folgenden Fälle eintreten kann:

entweder das ganze Gebilde ν^{ter} Dimension genügt auch der Gleichung $P = 0$;

oder es werden durch diese neue Bedingung aus dem Gebilde in der Umgebung von $(\!(0)\!)$ eine endliche Anzahl von Mannigfaltigkeiten geringerer Dimension ausgeschnitten.

---

*) S. z. B. Picard, Traité d'Analyse, II, pg. 245.

Der Beweis ist evident, wenn $(\!(0)\!)$ selbst ein regulärer Punkt des ν-dimensionalen analytischen Gebildes ist. Alsdann bestehen nämlich um den Punkt $(\!(0)\!)$ die Gleichungen (2), d. h. die (x) sind als Potenzreihen in den Parametern darstellbar. Setze ich diese Potenzreihen in P ein, so wird P eine Potenzreihe in den (z), und die Gleichung $P=0$ geht über in

$$\overline{P}(z, z', \cdots, z^{(\nu-1)}) = 0.$$

Nun verschwindet entweder die linke Seite identisch: in diesem Falle genügt das ganze Gebilde (2) auch der Gleichung $P=0$. Oder sie verschwindet nicht identisch: dann definiert sie nach dem Hülfssatze eine endliche Anzahl analytischer $(\nu-1)$-facher Mannigfaltigkeiten, deren jede sich um einen geeignet gewählten Punkt innerhalb des Konvergenzbereichs von (2) entwickeln läßt in der Form

$$(2') \qquad z = \mathfrak{P}(s, s', \cdots, s^{(\nu-2)}),\ z' = \mathfrak{P}'(\!(s)\!), \cdots, z^{(\nu-1)} = \mathfrak{P}^{(\nu-1)}(\!(s)\!).$$

Setze ich diese Entwicklung in (2) ein, so erhalte ich den Ausdruck des Elementes einer $(\nu-1)$-dimensionalen Mannigfaltigkeit in den (x).

Jeder Mannigfaltigkeit in den (z) entspricht eine Mannigfaltigkeit in den (x), und diese sind sonach nur in endlicher Anzahl vorhanden. Der verlangte Beweis ist also in diesem einfachsten Falle geliefert*).

4. Ist $(\!(0)\!)$ ein Grenzpunkt des Gebildes (2), so ist der Beweis bedeutend komplizierter. Wir stützen uns dabei auf ein Korollar, welches Herr Poincaré aus dem Weierstraßschen Vorbereitungssatze gezogen hat**). Das Korollar spricht sich folgendermaßen aus:

Ist $P(\!(x)\!)$ eine um den Punkt $(\!(0)\!)$ herum konvergente Potenzreihe in den (x), und sind diese Variablen ihrerseits um den Punkt $(\!(0)\!)$ herum als Funktionen von ν Variabeln $z, z', \cdots, z^{(\nu-1)}$ definiert durch die Gleichungen

$$(3) \qquad \begin{aligned} G_1(x) &\equiv x^{m_1} + \mathfrak{P}_1^{(1)}(\!(z)\!)x_1^{m_1-1} + \cdots + \mathfrak{P}_{m_1}^{(1)}(\!(z)\!) = 0, \\ &\vdots \\ G_n(x^{(n-1)}) &\equiv x^{(n-1)m_n} + \mathfrak{P}_1^{(n)}(\!(z)\!)x^{(n-1)m_n-1} + \cdots + \mathfrak{P}_{m_n}^{(n)}(\!(z)\!) = 0, \end{aligned}$$

wo die $\mathfrak{P}$ konvergente Potenzreihen in den (z) sind, so genügt um den Nullpunkt herum P, als Funktion $\overline{P}(\!(z)\!)$ der (z) betrachtet, einer Gleichung vom Grade $M = m_1 m_2 \cdots m_n$

*) Falls das Gebilde (2) eindimensional, also eine Kurve, war, sind die Gebilde (2') Punkte, welche nur in endlicher Zahl vorhanden sein können. — Falls den Gleichungen (b'') durch eine endliche Anzahl isolierter Punkte genügt wird, so setze man diese Punkte in $P=0$ ein: diejenigen Punkte, welche auch der neuen Gleichung genügen, sind natürlich erst recht nur in endlicher Zahl vorhanden.

**) Poincaré, Thèse, pg. 14.

$$g(\overline{P}) \equiv \overline{P}^M + \mathfrak{p}_1(\!(z)\!)\,\overline{P}^{M-1} + \cdots + \mathfrak{p}_M(\!(z)\!) = 0,$$

wo die $\mathfrak{p}$ *abermals konvergente Potenzreihen bezeichnen.*

Mit Hülfe dieses Korollars leiten wir nämlich den folgenden Satz ab:

Hat das durch die Gleichungen (b) *definierte* ν*-dimensionale analytische Gebilde* (2) *am Punkte* $(\!(0)\!)$ *einen Grenzpunkt, so genügen um den Punkt* $(\!(0)\!)$ *herum die Variabelen* (x) *einem System von Gleichungen von der in dem Poincaréschen Korollar betrachteten Form* (3)*, wobei die Potenzreihen gerade von* ν *Veränderlichen abhängen und am Punkte*

$$z = z' = \cdots = z^{(\nu-1)} = 0$$

sämtlich verschwinden. Die Gleichungen werden außerdem als frei von mehrfachen Faktoren angenommen.

Dieser Satz ist nichts anderes als die *analytische Formulierung des Grenzstellensatzes.* Sein Beweis geht Hand in Hand mit dem des Endlichkeitssatzes. Der Satz wird zunächst für das System (b′) von $m-1$ Gleichungen als richtig vorausgesetzt, hieraus der Endlichkeitssatz für den Fall von m Gleichungen bewiesen und schließlich der Grenzstellensatz selbst für diesen höheren Fall verifiziert.

Man erkennt übrigens nach der bei dem Hülfssatz angewandten Methode mit Leichtigkeit, daß ein Gleichungssystem der Form (3) eine *endliche Anzahl von* ν*-dimensionalen analytischen Gebilden* definiert.

5. Es ist notwendig, eine Bemerkung über das Verhältnis des analytischen Gebildes (2) zu den Gleichungen (3) vorauszuschicken. Um einen regulären Punkt $(\!(z_0)\!)$ des analytischen Gebildes (2) bestehen im allgemeinen eine Anzahl von Elementen dieses Gebildes, welche sich durch analytische Fortsetzung aus einander ableiten lassen. Der Satz besagt dann, daß die durch jedes dieser Elemente definierten Koordinaten (x) sich als Wurzeln von Gleichungen (3) ergeben, *nicht aber auch das Umgekehrte, daß nämlich jede Zusammenfassung von beliebigen Wurzeln* $(x_0, \cdots, x_0^{(n-1)})$*, welche dem Punkte* $(\!(z_0)\!)$ *entsprechen, auch einen Punkt des analytischen Gebildes liefert.* Um die zum Gebilde gehörigen Zusammenfassungen zu erhalten, ist der einzige Weg der der analytischen Fortsetzung, ausgehend von einem bestimmten Elemente.

Wir wollen dieses Element in folgender Weise fixieren. Auf Grund unserer Voraussetzung besteht für die Funktion P eine Gleichung in (z)

$$g(\overline{P}) = \overline{P}^M + \cdots + \mathfrak{p}_M(\!(z)\!) = 0$$

welche alle Werte der Funktion P auf dem durch die Gleichungen (3), und a fortiori also auf dem durch (2) definierten Gebilde liefert. Das Polynom $g(P)$ kann reduzibel sein. Wir denken es uns zunächst von mehrfachen Faktoren befreit, was ja stets auf rationalem Wege möglich ist. Sei $g'(\overline{P})$ das so erhaltene Polynom. Es gibt dann (wie aus dem Vorhergehenden

leicht folgt) in beliebiger Nähe von $(\!(0)\!)$ noch unendlich viele reguläre Punkte des Gebildes (2), an welchen $g'(\overline{P})$ lauter verschiedene Wurzeln hat*). Um einen solchen Punkt $(\!(z_0)\!)$ wählen wir das Ausgangselement ε_0 unseres analytischen Gebildes (2).

Setze ich in $P(\!(x)\!)$ die aus ε_0 folgenden Werte $x_0, x_0', \cdots, x_0^{(n-1)}$ ein, so ergibt sich ein bestimmter Wert P_0, welcher Wurzel von $g'(\overline{P})_{((z_0))} = 0$ ist. Wir bezeichnen mit $g_1(\overline{P})$ den irreduzibelen Faktor von $g'(\overline{P})$, welcher diese Wurzel P_0 liefert und betrachten von nun an immer die Gleichung

$$g_1(\overline{P}) = 0.$$

Wir behaupten:

Jeder Wert, welchen P auf dem Gebilde (2) *annimmt, ist Wurzel von* $g_1(\overline{P}) = 0$; *und umgekehrt, jede Wurzel* $\overline{P}$ *von* $g_1(\overline{P}) = 0$ *ist ein Wert, welchen P auf dem Gebilde annimmt.*

In der Tat folgen um den Punkt $(\!(z_0)\!)$ aus dem Element ε_0 einerseits, aus der Gleichung $g_1 = 0$ andererseits für P zwei unter einander identische Potenzreihen-Entwickelungen P' und P''. Durch Fortsetzung dieser Potenzreihen auf allen möglichen Wegen erhalte ich aber einerseits alle Werte, welche P auf dem Gebilde (2) annimmt, andererseits, wegen der Irreduzibilität von $g_1(\overline{P})$, alle Wurzeln von $g_1 = 0$. Daraus ergibt sich die behauptete Übereinstimmung zunächst an allen regulären Stellen, und, daraus folgend, dann auch an allen Grenzstellen.

Der zweite Teil des Satzes werde noch einmal ausführlich in der folgenden Form ausgesprochen:

Folgt für einen Punkt $(\!(z)\!)$ einer gewissen Umgebung des Nullpunktes im Raume der (z) aus $g_1 = 0$ ein Wurzelwert $\overline{P}$, so gehört zu dem Wertesystem $(\!(z)\!)$ ein Wertesystem $(\!(x)\!)$ des analytischen Gebildes (2), *an welchem $P(\!(x)\!)$ den Wert $\overline{P}$ annimmt.*

Eine für das Folgende wichtige Anwendung der irreduzibelen Faktoren ist die folgende: Ich kann nach dem Poincaréschen Verfahren, ebenso wie für die Funktion $P(\!(x)\!)$, auch für jede der Funktionen (b″) eine Gleichung der Form $\gamma(\overline{\mathfrak{P}}) = 0$ aufstellen, deren Koeffizienten Potenzreihen in (z) sind. Da aber nach Voraussetzung $\mathfrak{P}(\!(x)\!)$ längs des analytischen Gebildes (2) verschwindet, so enthält das Polynom $\gamma(\overline{\mathfrak{P}})$ den irreduzibelen Faktor $\overline{\mathfrak{P}}$ und dieser irreduzibele Faktor ist gerade dem Gebilde (2) zugeordnet.

6. Wir suchen jetzt die Stellen $(\!(z)\!)$, an welchen $g_1(\overline{P}) = 0$ eine verschwindende Wurzel hat. Es sind hier zwei Fälle zu unterscheiden:

a. Der letzte Koeffizient $\mathfrak{p}_M(\!(z)\!)$ von $g(\overline{P})$ verschwindet identisch und am Punkte $(\!(z_0)\!)$ ist $P_0 = 0$. In diesem Falle ist $g_1(\overline{P}) = \overline{P}$. P ver-

*) In der Tat sind solche Punkte sicher diejenigen, an welchen sowohl g als auch die Polynome (3) von 0 verschiedene Discriminanten besitzen.

schwindet also identisch längs des ganzen Gebildes (2), die Gleichung $P = 0$ liefert keine neue Bedingung.

In diesem speziellen Falle definiert das System der m Gleichungen (b) *die ganze v-dimensionale Mannigfaltigkeit* (2).

b) Im allgemeinen Falle hat $g_1(\overline{P})$ ein nicht identisch verschwindendes von $\overline{P}$ freies Glied $\mathfrak{p}'(\!(z)\!)$. Die Bedingung dafür, daß $g_1 = 0$ eine verschwindende Wurzel besitze, ist dann

$$\mathfrak{p}'(\!(z)\!) = 0.$$

Diese Gleichung definiert im Raume der (z) *um den Nullpunkt herum eine endliche Anzahl* $(\nu-1)$*-dimensionaler analytischer Mannigfaltigkeiten.* Es handelt sich nun darum, zu untersuchen, was diesen Mannigfaltigkeiten im Raume der (x) entspricht. Diese Untersuchung kann nicht nach der in 3. angewandten einfachen Methode geführt werden, da möglicherweise den sämtlichen durch $\mathfrak{p}' = 0$ definierten Punkten $(\!(z)\!)$ Grenzpunkte der Mannigfaltigkeit (2) entsprechen*).

Wir bezeichnen, wie vorher, mit $s, s', \cdots, s^{(\nu-2)}$ die unabhängigen Variabelen, durch welche wir die $(\nu-1)$-dimensionalen Gebilde im Raume der (z) darstellen. Beachten wir zunächst, daß die entsprechenden *Gebilde im Raume der* (x) *gleichfalls* $(\nu-1)$*-dimensional* sein müssen. In der Tat entsprechen ja nach den Gleichungen (3) stetigen Mannigfaltigkeiten (z) auch stetige Mannigfaltigkeiten (x). Gehöre also zu dem Punkte $(\!(s_0)\!)$ ein Punkt $(\!(z_0)\!)$ und ein entsprechender Punkt $(\!(x_0)\!)$ hinzu, so kann ich um den Punkt $(\!(s_0)\!)$ eine gewisse Umgebung abgrenzen: lasse ich innerhalb derselben den Punkt $(\!(s)\!)$ variieren, so variieren $(\!(z)\!)$ und $(\!(x)\!)$ stetig mit. Jedem stetigen Gebiete im Raume der (s) entspricht also ein stetiges Gebilde im Raume der (x). Dieses Gebilde aber muß $(\nu-1)$-dimensional sein. Denn als Variabele (s) kann ich ja immer lineare Transformierte der Variabelen (z) wählen, und hieraus schließt man durch vollständige Induktion, daß die Variabelen (s) auch lineare Transformierte der (x) sind. Ich kann also durch Koordinatendrehung an Stelle der (x) ein neues Variabelen-System $(\bar{x})$ ableiten, in welchem die (s) figurieren. Da aber diese $\nu - 1$ Größen unbeschränkt veränderlich sind, so ist das oben betrachtete stetige Gebilde $(\nu-1)$-dimensional. Dieses Gebilde hat dann die Eigenschaft, daß auf ihm überall

$$\text{(c)} \qquad \mathfrak{P}_1(\!(x)\!) = 0, \cdots, \mathfrak{P}_{m-1}(\!(x)\!) = 0, \quad \mathfrak{p}'(\!(z)\!) = \pi(\!(x)\!) = 0.$$

*) War das Gebilde (2) eindimensional, so daß nur eine einzige Variable z auftritt, so definiert die Gleichung $\mathfrak{p}'(z) = 0$, (da wir ja nur die Wurzeln in einer gewissen Umgebung des Nullpunktes betrachten) allein den Punkt $z = 0$, welchem nach den Gleichungen (3) nur der Nullpunkt des (x)-Raumes entspricht. Der Punkt $(x) = 0$ ist also nicht Häufungspunkt von gemeinsamen Punkten der Gleichungen (b) und *gemeinsame Punkte sind also nur in endlicher Zahl vorhanden.*

Die letztere Gleichung ist dadurch erhalten, daß für die (z) ihre Werte als lineare Funktionen der (x) eingesetzt sind.

Wir beweisen weiter: *Das definierte Gebilde im Raume der (x) besteht aus einer endlichen Anzahl $(\nu-1)$-dimensionaler analytischer Mannigfaltigkeiten.*

Dies geschieht mit Hülfe des Poincaréschen Verfahrens. Es soll dabei der Einfachheit halber angenommen werden, daß als Größen (s) die Koordinaten $z, z', \cdots, z^{(n-2)}$ genommen worden sind, worin nach dem Vorausgehenden keine besondere Einschränkung liegt. Betrachten wir jetzt die Gleichungen (3), greifen innerhalb des Konvergenzgebietes der Koeffizienten einen Punkt $(z, z', \cdots, z^{(n-2)})$ heraus, bezeichnen mit $z_1^{(n-1)}, \cdots, z_\varrho^{(n-1)}$ die nach $\mathfrak{p}'(\!(z)\!) = 0$ hinzugehörigen Werte von $z^{(n-1)}$ und bilden das Produkt

$$G_1(x; z; z_1^{(n-1)})\, G_1(x; z; z_2^{(n-1)}) \cdots G_1(x; z; z_\varrho^{(n-1)}),$$

so ist dies ein Polynom in x, dessen Koeffizienten Potenzreihen in $z, \cdots, z^{(n-2)}$ und symmetrisch in $z_1^{(n-1)}, \cdots, z_\varrho^{(n-1)}$ sind. Daraus folgt, daß die gebildete Funktion ein Polynom $\Gamma_1(x)$ in x ist, dessen Koeffizienten Potenzreihen in $z, \cdots, z^{(n-2)}$ sind*). Indem wir das gleiche Verfahren auf die Polynome $G_2, \cdots, G_n$ anwenden, kommen wir zu einem *Gleichungssystem*

$$\Gamma_1(x) = 0, \cdots, \Gamma_n(x^{(n-1)}) = 0, \tag{4}$$

dessen Koeffizienten Potenzreihen in den neuen Variabelen $z, \cdots, z^{(n-2)}$ — oder allgemeiner (s) — *sind.* Die Koordinaten aller Punkte $(\!(x)\!)$ unseres betrachteten Gebildes sind Wurzeln dieses Gleichungssystems. Die Koeffizienten haben außerdem die Eigenschaft, am Punkte $(s) = 0$ sämtlich zu verschwinden. Wir nehmen übrigens an, daß die Γ von doppelten Faktoren bereits befreit sind.

Die Gleichungen (4) definieren dann eine endliche Anzahl $(\nu-1)$-dimensionaler analytischer Mannigfaltigkeiten. Unter diesen müssen sich diejenigen $(\nu-1)$-dimensionalen Gebilde vorfinden, welche den Gleichungen (c) genügen. Man findet sie auf folgende Weise. Irgend eines der Polynome (c) genügt in Bezug auf (s) einer von Doppelfaktoren befreiten Gleichung $\eta(\overline{\mathfrak{P}}) = 0$, welche den irreduzibelen Faktor $\overline{\mathfrak{P}}$ besitzt. Ich wähle jetzt einen Punkt $(\!(s)\!)$, welcher für die sämtlichen analytischen Gebilde regulär ist, und an welchem außerdem die Discriminante von $\eta(\overline{\mathfrak{P}})$ nicht verschwindet. Diesem Punkt $(\!(s)\!)$ entspricht auf mindestens einem der Gebilde ein Punkt $(\!(x)\!)$, an welchem $\mathfrak{P} = 0$, und es folgt dann, wie oben, daß längs dieses ganzen Gebildes identisch $\mathfrak{P} = 0$. Auf diese Weise finde ich die sämtlichen $(\nu-1)$-dimensionalen Gebilde, auf welchen $\mathfrak{P}$ verschwindet, und sehe, daß es analytische Mannigfaltigkeiten sind.

*) Poincaré, l. c.

Von den durch (4) definierten analytischen Mannigfaltigkeiten kommen dann also nur diejenigen in Betracht, auf welchen die sämtlichen Funktionen (c) verschwinden. Daß es solche Mannigfaltigkeiten gibt, folgt aus den Betrachtungen von pg. 363. Wir wollen sie mit

$$M_1, \cdots, M_k$$

bezeichnen.

Wir haben schließlich diejenigen Punkte der Mannigfaltigkeiten M zu suchen, an welchen ausser den Funktionen (c) auch die Funktion $P(\!(x)\!)$ verschwindet. Die Gesamtheit dieser Punkte muß dann nach unserer Behauptung eine endliche Anzahl analytischer Mannigfaltigkeiten bilden.

Die Funktion $P(\!(x)\!)$ genügt, wie aus dem identischen Verschwinden von $\mathfrak{p}'(\!(s)\!)$ in (s) folgt, als Funktion der (s) betrachtet, einer von mehrfachen Faktoren befreiten Gleichung der Form

$$\overline{P}\,\gamma(\overline{P}) = 0, \quad \gamma(\overline{P}) = \overline{P}^{\mu} + \cdots + \mathfrak{p}''(\!(s)\!). \tag{5}$$

Jeder der Mannigfaltigkeiten M ist in dem in 5. erwähnten Sinne ein irreduzibeler Faktor dieser Gleichung zugeordnet.

Es sind jetzt wieder zwei Fälle zu unterscheiden:

α) P verschwindet in einem regulären Punkt des Gebildes M an einer Stelle $(\!(s)\!)$, an welcher $\mathfrak{p}''(\!(s)\!) \neq 0$. Der zu M zugehörige irreduzibele Faktor ist dann der Faktor $\overline{P}$, d. h. P verschwindet längs des ganzen $(\nu-1)$-dimensionalen Gebildes M. Derselbe Schluß gilt auch noch, wenn der Verschwindungspunkt ein Grenzpunkt von M ist, vorausgesetzt nur, daß an ihm $\mathfrak{p}''(\!(s)\!)$ nicht verschwindet.

Nun läßt sich der Schlußsatz von 5. für den Raum der (s) in folgender Form aussprechen:

Jedem Werte $(\!(s)\!)$ entspricht auf mindestens einer der Mannigfaltigkeiten $M_1, \cdots, M_k$ ein Punkt, an welchem P verschwindet.

Wenden wir diesen Satz auf einen Punkt $(\!(s)\!)$ an, an welchem $\mathfrak{p}''(\!(s)\!)$ nicht verschwindet, so erhalten wir das erste fundamentale Resultat:

In der Umgebung des Nullpunktes des (x)-Raumes gibt es eine endliche Anzahl $(\nu-1)$-dimensionaler analytischer Mannigfaltigkeiten, längs welcher die Gleichungen (b) *erfüllt sind.*

β) P verschwindet auf einem Gebilde M nur in solchen Punkten, in welchen gleichzeitig auch $\mathfrak{p}''(\!(s)\!)$ verschwindet. Ich habe dann also die Gesamtheit der Verschwindungspunkte von P innerhalb M zu bestimmen. Ich behandele hierzu die Mannigfaltigkeit M in der gleichen Weise wie bisher die Mannigfaltigkeit (2), indem ich mich der Gleichungen (4) ebenso bediene wie vorher der Gleichungen (3), und finde auf ihr eine endliche Anzahl von analytischen Mannigfaltigkeiten $(\nu-2)^{\text{ter}}$ Dimension, längs welcher die Gleichungen (b) sämtlich erfüllt sind, daneben

möglicherweise noch Mannigfaltigkeiten geringerer Dimension, welche ganz einer analytischen Mannigfaltigkeit $(\nu-2)^{\text{ter}}$ Dimension angehören. Auf diese Weise weiterschließend*), finde ich, daß *von jeder Dimension nur eine endliche Anzahl von Mannigfaltigkeiten vorhanden sein können.* Der Beweisgang liefert das gleiche Resultat für gemeinsame Punkte.

7. Hiermit ist die vollständige Induktion in ihrer Hauptsache erledigt. Es ist nur noch der Beweis nachzutragen, daß um jeden Grenzpunkt eine Entwicklung der Form (3) besteht, was ja gleichfalls durch vollständige Induktion abgeleitet werden sollte. Auch dieser Beweis aber ist schon geführt: in der Tat sind wir von den Gleichungen (3) zu den Gleichungen (4) übergegangen, welche von der gleichen Form sind und hinsichtlich der $(\nu-1)$-dimensionalen Gebilde die nämliche Rolle spielen, wie (3) hinsichtlich des ν-dimensionalen Grundgebildes. In der gleichen Weise lassen sich die Gleichungen für die unter β) betrachteten Gebilde geringerer Dimension aufstellen.

Hiermit ist also die vollständige Induktion erledigt und unsere beiden Sätze, Endlichkeitssatz und Grenzstellensatz, bewiesen.

8. Der Endlichkeitssatz bedarf aber noch einer wesentlichen Ergänzung. In der Tat besteht nach dem bisher gezeigten noch die Möglichkeit, daß aus einem Gebilde ν^{ter} Dimension durch Hinzufügung einer einzigen Gleichung Gebilde von geringerer als $(\nu-1)^{\text{ter}}$ Dimension ausgeschnitten werden. Demgegenüber zeigen wir jetzt:

Definieren die im Nullpunkt verschwindenden Potenzreihen

$$\mathfrak{P}_1(\!(x)\!) = 0, \cdots, \mathfrak{P}_{m-1}(\!(x)\!) = 0$$

um den Nullpunkt herum ein analytisches Gebilde ν^{ter} Dimension, so schneidet die gleichfalls im Nullpunkte verschwindende Potenzreihe

$$\mathfrak{P}_m(\!(x)\!) = 0$$

aus diesem Gebilde keine Mannigfaltigkeiten von geringerer als $(\nu-1)^{\text{ter}}$ Dimension aus.

Die unter β) betrachteten Mannigfaltigkeiten geringerer Dimension müssen also vollständig in einer den Gleichungen (b) genügenden Mannigfaltigkeit von der Dimension $(\nu-1)$ enthalten sein. Sie sind in der Tat einfach die Schnittgebilde einer solchen Mannigfaltigkeit mit einer Mannigfaltigkeit M.

Wir beweisen den Satz zuerst für den Fall, daß das analytische Gebilde 2-dimensional (eine Fläche) ist, und zeigen, daß dann die Gleichung $\mathfrak{P}_m = P = 0$ nur 1-dimensionale Gebilde (Kurven) ausschneidet.

In der Tat können ja gemeinsame Gebilde geringerer Dimension (Punkte) nur dort auftreten, wo die Gleichung $\mathfrak{p}''(s) = 0$ besteht. Dies

*) indem ich immer zu Mannigfaltigkeiten geringerer Dimension übergehe.

ist eine Potenzreihe in der einzigen Variabelen s und verschwindet in einer gewissen Umgebung des Nullpunktes nur für den Punkt $s = 0$ selbst. Dem Punkte $s = 0$ aber entspricht nach den Gleichungen (4) allein der Punkt $(x) = 0$, durch welchen ja, wie bewiesen, eine 1-dimensionale gemeinsame Mannigfaltigkeit hindurchgeht. Es gibt also in einer gewissen Umgebung des Nullpunktes keine isolierten Schnittpunkte des 2-dimensionalen Gebildes und des Gebildes $P = 0$. Da sich aber derselbe Beweis für jeden solchen Schnittpunkt führen läßt, um welchen die Funktionen sich in der Form von Potenzreihen oder Quotienten von Potenzreihen darstellen, so ist er für unser ganzes Gebiet D allgemein bewiesen.

Den allgemeinen Satz beweist man dann durch vollständige Induktion, indem man ihn für den Fall von $n-1$ Variabelen und geringerer Dimension des zu schneidenden Gebildes als bereits bewiesen voraussetzt. Es habe in der Tat im n-dimensionalen Raume der (x) das ν-dimensionale Gebilde, dessen unabhängige Koordinaten mit $z, z', \cdots, z^{(\nu-1)}$ bezeichnet werden, mit $\mathfrak{P}_m(\!(x)\!) = 0$ ein $(\nu-k)$-dimensionales Schnittgebilde $(k>1)$. Ein Element des Schnittgebildes schreibt sich in der Form

$$x = \mathfrak{P}(s, s', \cdots, s^{(\nu-k-1)}), \cdots, x^{(n-1)} = \mathfrak{P}^{(n-1)}(\!(s)\!). \tag{5}$$

Die (s) können nun, wie bereits hervorgehoben, immer als lineare Funktionen der (z) betrachtet, und daher durch eine Koordinatendrehung neue Variable $(\bar{z})$ eingeführt werden, unter welchen die (s) figurieren. Ebenso lassen sich weiter Koordinaten $(\bar{x})$ einführen, welche die $(\bar{z})$ und daher auch die (s) enthalten.

Setze ich nun die Variabele $s^{(\nu-k-1)}$ konstant, so geht das Gebilde (5) in ein $(\nu-k-1)$-dimensionales über, das ν-dimensionale Gebilde in ein $(\nu-1)$-dimensionales, und der Raum in einen $(n-1)$-dimensionalen. $\mathfrak{P}_m(\!(x)\!)$ ferner geht über in eine Potenzreihe $\pi(\bar{x}, \bar{x}', \cdots, \bar{x}^{(n-2)})$*)

In dem $(n-1)$-dimensionalen Raume müßte sich also ein $(\nu-1)$-dimensionales Gebilde mit $\pi = 0$ in einem $(\nu-k-1)$-dimensionalen Gebilde schneiden, und zwar kann ich durch geeignete Wahl des konstanten Wertes $s^{(\nu-k-1)}$ stets erreichen, daß dieses Gebilde nicht ganz einem Schnittgebilde höherer Dimension angehört. Dies ist aber nach Voraussetzung nicht möglich: daher können auch in dem n-dimensionalen Raume Schnittgebilde von geringerer als $(\nu-1)^{\text{ter}}$ Dimension nicht auftreten, was zu beweisen war.

Durch Hinzufügung einer Gleichung bleibt also die Dimension eines Gebildes entweder erhalten oder sie erniedrigt sich um 1.

9. Die Resultate, zu denen wir gelangt sind, können wir noch kurz in der Form zusammenfassen:

*) Der Fall, daß π identisch verschwinden könnte, hat keine Ausnahmestellung.

Seien $r_1(\!(x)\!), \cdots, r_m(\!(x)\!)$ m Funktionen der n Variabelen (x), welche innerhalb und auf dem Rande eines Gebietes D sich wie rationale Funktionen verhalten, so bilden innerhalb dieses Gebietes die gemeinsamen Nullstellen dieser Funktionen eine endliche Anzahl analytischer Mannigfaltigkeiten verschiedener Dimensionen, (wozu auch Punkte gerechnet werden sollen).

Ist außerdem $m < n$, so treten keine Mannigfaltigkeiten von geringerer als der $(n-m)^{ten}$ Dimension auf.

Dazu tritt noch der Grenzstellensatz in der präzisen Fassung von 4. (pg. 361).

10. Unter den gemeinsamen Nullstellen der Funktionen r befinden sich übrigens auch solche „uneigentliche", an welchen eine oder mehrere der Funktionen unbestimmt werden. Dies sind nämlich diejenigen Stellen $(\!(z)\!)$, an welchen in den Gleichungen (a') einige der Nenner $\mathfrak{Q}$ verschwinden*). Wir schließen dann aus unserem Hauptsatze betreffs dieser uneigentlichen gemeinsamen Nullstellen sofort das Resultat:

Eine gemeinsame Nullmannigfaltigkeit der Funktionen r umfaßt entweder *nur* uneigentliche Nullstellen, oder die auf ihr gelegenen uneigentlichen Nullstellen bilden eine endliche Anzahl analytischer Mannigfaltigkeiten geringerer Dimension.

Die in 9. ausgesprochenen Resultate sind ferner einer Ausdehnung auf allgemeinere, mehrdeutige Funktionen fähig. Ich betrachte eine Funktion f, welche innerhalb und auf dem Rande eines Gebietes D um jeden Punkt einer irreduzibelen Gleichung folgender Form genügt

$$\mathfrak{P}_0(\!(x)\!) f^\mu + \mathfrak{P}_1(\!(x)\!) f^{\mu-1} + \cdots + \mathfrak{P}_\mu(\!(x)\!) = 0,$$

wo die $\mathfrak{P}$ Potenzreihen in den (x) sind, und μ eine ganze Zahl ist, die für alle Punkte unseres Gebietes unterhalb einer endlichen Grenze bleibt. Eine solche Funktion nennt Herr Poincaré innerhalb D „*algebroid*"**), insbesondere gehören die algebraischen Funktionen dieser Klasse an.

Mit Hülfe der dargelegten Methoden beweist man, daß auch die gemeinsamen Nullstellen algebroider Funktionen innerhalb D eine endliche Anzahl analytischer Mannigfaltigkeiten verschiedener Dimensionen bilden.

*) Weierstraß, Werke, II, 156—157.

**) Poincaré, l. c.

Über die Fortsetzbarkeit gewisser Taylorscher Reihen.

Von

GEORG FABER in München.

Während einerseits eine Potenzreihe mit endlichem Konvergenzradius, aber mit im übrigen willkürlichen Koeffizienten ihren Konvergenzkreis im allgemeinen zur natürlichen Grenze hat*), weisen andrerseits Potenzreihen, deren Koeffizienten a_ν in bestimmter noch sehr allgemeiner Weise von dem Index ν abhängen, nur ganz bestimmte vereinzelte Singularitäten auf, und es ist z. B. die Mächtigkeit der nicht fortsetzbaren Reihen keine größere als diejenige der Taylorschen Reihen, welche den Einheitskreis als Konvergenzgrenze und auf demselben nur die eine singuläre Stelle $x = 1$ besitzen; denn die Mächtigkeit dieser Reihen ist schon die gleiche wie die aller analytischen Funktionen überhaupt. Es folgt dies ohne weiteres aus schon bekannten Untersuchungen, wie auch aus den im folgenden mitzuteilenden (cf. Theorem I, p. 371).

Es soll hier nämlich die Fortsetzbarkeit spezieller Taylorscher Reihen untersucht werden, nämlich solcher, wo der Koeffizient a_ν das eine Mal eine Potenzreihe von $\frac{1}{\nu}$ ist, das andre Mal, wo a_ν eine ganze Funktion $G(\nu)$ von ν ist, die schwächer unendlich wird als $e^{\varepsilon r}$ (d. h.

$$\lim_{r=\infty} |G(re^{i\varphi})|\, e^{-\varepsilon r} = 0 \text{ für jedes positive } \varepsilon).$$

Über die zuerst erwähnte Klasse von Reihen hat schon Herr Leau**) auf kompliziertere Weise einen Satz bewiesen, der mit dem unten stehenden Theorem I übereinstimmt; auch bezüglich der oben genannten Reihen $\sum G(\nu)x^\nu$ gelangt Herr Leau zu einem ähnlich lautenden Satze; dagegen glaube ich, daß die viel präzisere Aussage, eine solche Reihe habe nur die eine wesentliche singuläre Stelle $x = 1$, sowie die Umkehrung dieses Satzes neu sind.

*) Pringsheim, Math. Ann. 44 (1894); Borel, acta math. 21 (1897); Fabry, acta math. 22 (1899).

**) Journ. de Math. 5 (1899).

Im dritten Paragraphen gebe ich dann einen elementaren Beweis eines zuerst von Herrn Hadamard auf Grundlage des Cauchyschen Funktionsbegriffs bewiesenen Satzes über die Abhängigkeit der Singularitäten der Funktion $\sum a_\nu \int_0^1 V(t)\, t^\nu\, dt \cdot x^\nu$ von denjenigen der Funktion $\sum a_\nu x^\nu$.

Es dürfte nicht ohne Interesse sein, daß sich alle diese Beweise — und noch andere ähnliche mehr — aus einer einzigen Quelle ableiten lassen, als welche sich der Weierstraßsche Doppelreihensatz erweist. Ich stelle denselben daher hier an die Spitze, indem ich ihn zugleich in verallgemeinerter Form ausspreche:

Gegeben sei eine unendliche Folge von analytischen Funktionen:

$$f_0(x), f_1(x), f_2(x), \cdots,$$

die sämtlich regulär sind in einem einfach zusammenhängenden endlichen Gebiete S, das vermöge der Funktion $x' = \psi(x)$ auf das Innere eines mit dem Radius R um den Nullpunkt der x'-Ebene beschriebenen Kreises abgebildet wird. In S gelten daher nach bekannten Sätzen*) Entwickelungen der Form:

$$f_\mu(x) = \sum_0^\infty{}_\nu\, a_\nu^{(\mu)} (\psi(x))^\nu.$$

Ferner werde vorausgesetzt, daß $\sum_0^\infty{}_\mu f_\mu(x)$ konvergiert im Gebiete $|\psi(x)| < R$ und gleichmäßig auf der Kurve $|\psi(x)| = r$ $(< R)$.

Dann ist im Gebiete $|\psi(x)| < r$

$$F(x) = \sum_0^\infty{}_\mu f_\mu(x)$$

eine analytische Funktion von x:

$$F(x) = \sum_0^\infty{}_\nu A_\nu (\psi(x))^\nu,$$

wobei

$$A_\nu = \sum_0^\infty{}_\mu a_\nu^\mu \text{**}).$$

Mit Hilfe dieses Satzes beweise ich nun das

*) S. Königsberger, Vorl. über d. Theor. d. ellipt. Funct. Th. I (1874), p. 93ff.

**) Bei Weierstraß (Werke II, p. 205) ist $\psi(x) = x - x_1$; in allen folgenden Anwendungen steht von vornherein die gleichmäßige Konvergenz der Reihe $\sum f_\mu(x)$ im ganzen zweifach ausgedehnten Gebiete fest; in diesem Falle genügt auch der Weierstraßsche Satz in seiner speziellen Fassung zum Nachweis, daß $\sum f_\mu(x)$ eine in S reguläre analytische Funktion darstellt.

Theorem I: *Wenn*

$$a_\nu = \mathfrak{P}\left(\frac{1}{\nu}\right) \qquad (\nu \geqq n) \tag{1}$$

ist, wo

$$\mathfrak{P}(x) = c_0 + c_1 x + c_2 x^2 + \cdots \tag{2}$$

eine für $|x| \leqq \frac{1}{n}$ *konvergente Potenzreihe bedeutet, so hat die Funktion*

$$F(x) = \sum\nolimits_\nu a_\nu x^\nu \tag{3}$$

in der längs der reellen Achse $1 \cdots \infty$ *aufgeschnittenen Ebene keine singuläre Stelle.*

Ferner werde ich zeigen: *der Einschnitt* $1 \cdots \infty$ *ist ein „künstlicher"*, d. h. auf demselben sind nur 1 und ∞ singuläre Punkte. Dies wird sich aus dem Umstande ergeben, daß man statt des geradlinigen Einschnitts einen andern wählen darf, der von einer beliebigen logarithmischen Spirale mit dem Nullpunkte als Pol gebildet wird. Es steht zu vermuten, daß die im allgemeinen unendlich vieldeutige Funktion $F(x)$ auch in ihren anderen Zweigen keine weiteren singulären Punkte hat als die Punkte 1, ∞ und den Nullpunkt; doch folgt dies aus unserer Analyse nicht, da man stets nur den Einheitskreis des obersten Blattes behält, wenn man den Schnitt längs einer der obigen logarithmischen Spiralen führt, man also über das, was innerhalb des Einheitskreises der übrigen Blätter geschieht, keine Aussage machen kann.

Statt für

$$F(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots$$

genügt es offenbar den Beweis zu führen für

$$a_m + a_{m+1} x + a_{m+2} x^2 + \cdots = \frac{F(x) - \sum_0^{m-1} a_\nu x^\nu}{x^m},$$

welche Funktion wieder $F(x)$ heißen möge.

Ich betrachte folgende Reihe von Funktionen:

$$\begin{aligned}
f_0(x) &= \frac{1}{1-x} && = 1 + x + x^2 + \cdots, \\
f_1(x) &= \frac{\int_0^x f_0(x)\, x^{m-1}\, dx}{x^m} && = \frac{1}{m} + \frac{x}{m+1} + \frac{x^2}{m+2} + \cdots, \\
&\cdots\cdots\cdots

Die erste dieser Funktionen hat die eine singuläre Stelle $x = 1$; bei der zweiten sind infolge der Integration der Punkt $x = \infty$ und infolge der Division mit x^m der Punkt $x = 0$ in den übrigen Zweigen der Funktion als singuläre hinzugetreten. Weitere Singularitäten können auch bei den übrigen Funktionen $f_k(x)$ nicht auftreten; wäre nämlich α ein von $0, 1, \infty$ verschiedener singulärer Punkt, der zum ersten Male bei $f_k(x)$ auftrete, so würde man schließen, daß α auch ein singulärer Punkt von $x^m f_k(x)$ und von $\frac{1}{x^{m-1}} \frac{dx^m \cdot f_k(x)}{dx} = f_{k-1}(x)$ wäre gegen die Voraussetzung.

Ich mache nun zunächst den Einschnitt auf der reellen Achse vom Punkte 1 bis ∞ und erweitere diesen Einschnitt, indem ich vom Nullpunkte aus zwei Gerade ziehe, die mit der positiven reellen Achse die Winkel $\pm \varepsilon$ bilden, ferner einen Kreisbogen mit dem Radius $1 - \varepsilon$, und eliminiere das unendliche Stück der Ebene, das von den zwei Geraden und dem Kreisstückchen begrenzt ist, und den Punkt 1 enthält. Außerdem schließe ich die Umgebung des Punktes ∞ durch einen beliebig großen Kreis mit dem Radius R aus.

Da in dem übrig bleibenden Stücke S der Ebene alle vorkommenden Funktionen regulär und eindeutig sind, sind die Integrationen unabhängig vom Wege; dieselben werden im folgenden längs der Geraden $0 - x$ ausgeführt gedacht.

Sei G das Maximum von $\left|\frac{1}{1-x}\right|$ in S; ich behaupte das Maximum von $|f_k(x)|$ ist kleiner als $\frac{G}{n^k}$.

Es ist nämlich, wenn $x = re^{i\varphi}$ gesetzt wird:

$$|f_1(x)| < G \cdot \frac{\int_0^{|x|} |x^{m-1}|\,|dx|}{|x^m|} = G \frac{\int_0^r r^{m-1} dr}{r^m},$$

$$< \frac{G}{m}$$

und allgemein, wenn

$$|f_{k-1}(x)| < \frac{G}{m^{k-1}}$$

ist (für alle x in S), so folgt

$$|f_k(x)| < \frac{G}{m^{k-1}} \cdot \frac{\int_0^r r^{m-1} dr}{r^m} = \frac{G}{m^k}, \tag{5}$$

und für $m > n$:

$$< \frac{G}{n^k}$$

für jedes, x in S, q. e. d.

Daher ist

$$\Phi(x) = \sum_0^\infty{}_\nu c_\nu f_\nu(x) - \sum_0^l{}_\nu c_\nu f_\nu(x) + R_l(x) \tag{6}$$

(die c sind die Koeffizienten der Potenzreihe (2)) für alle Punkte x von S gleichmäßig konvergent; denn

$$|R_l(x)| < G \sum_l^\infty{}_\nu \frac{|c_\nu|}{m^\nu} < \varepsilon, \tag{7}$$

wenn l genügend groß gewählt ist. $\Phi(x)$ stellt demnach in S eine reguläre analytische Funktion $F(x)$ dar; die Entwickelung derselben um den Nullpunkt lautet:

$$\begin{aligned} F(x) = &\sum_0^\infty{}_\nu \frac{c_\nu}{m^\nu} + x \sum_0^\infty{}_\nu \frac{c_\nu}{(m+1)^\nu} + x^2 \sum_0^\infty{}_\nu \frac{c_\nu}{(m+2)^\nu} + \cdots \\ &- \mathfrak{P}\left(\frac{1}{m}\right) + x\,\mathfrak{P}\left(\frac{1}{m+1}\right) + x^2\,\mathfrak{P}\left(\frac{1}{m+2}\right) + \cdots \end{aligned} \tag{8}$$

und diese Potenzreihe läßt sich nach dem eben bewiesenen analytisch fortsetzen über das ganze Gebiet S.

Wir haben nun den gleichen Satz zu beweisen unter der Voraussetzung, daß der Einschnitt nicht von einer Geraden, sondern von einer logarithmischen Spirale gebildet wird. Es soll also jetzt statt des Gebietes, das von den Geraden $y = \pm \operatorname{tg} \varepsilon \cdot x$ und von Bögen der Kreise mit den Radien R und $1 - \varepsilon$ begrenzt wurde, das folgendermaßen definierte endliche Gebiet S betrachtet werden: wenn die logarithmische Spirale mit der Gleichung $r = \gamma e^{\beta\varphi}$ durch den Punkt 1 geht, so sei S begrenzt von zwei logarithmischen Spiralen mit den Gleichungen: $r = (\gamma \pm \varepsilon) e^{\beta\varphi}$, ferner von einem Stückchen der zu diesen senkrechten logarithmischen Spirale, die durch den Punkt $1 - \varepsilon$ geht, und endlich von einem Bogenstück des Kreises mit dem Radius R. Die Integrationskurven seien jetzt unter einander ähnliche logarithmische Spiralen mit den Gleichungen $r = \alpha e^{\beta\varphi}$ (α Parameter, β fest).

Da wir oben bei geradlinigem Schnitt die Richtigkeit des zu beweisenden Satzes einzig aus der Ungleichung (5) erschlossen haben, so ist nur noch das Fortbestehen dieser Ungleichung unter den geänderten Verhältnissen zu beweisen. Dies geschieht wieder durch den Schluß von n auf $n + 1$. Sei also wieder G das Maximum von $|f_0(x)|$ in dem jetzigen Bereiche S und sei schon bewiesen, daß

$$|f_{k-1}(x)| < \frac{G}{n^{k-1}},$$

so bleibt zu zeigen, daß

$$|f_k(x)| < \frac{G}{n^k}$$

für jedes x in S. Es ist aber

$$|f_k(x)| < \frac{\int_0^x |f_{k-1}(x)|\,|x^{m-1}|\,|dx|}{|x^m|} < \frac{G}{n^{k-1}} \cdot \frac{\int_0^x r^{m-1}|dx|}{r^m};$$

$|dx|$ ist hier nicht mehr $= dr$, sondern $= \sqrt{dr^2 + r^2 d\varphi^2}$, $d\varphi$ ist $= \frac{dr}{r \cdot \beta}$, also

$$|dx| = dr \sqrt{1 + \frac{1}{\beta^2}} = dr \cdot c,$$

wo c für alle Spiralen die gleiche Konstante ist. Es folgt

$$|f_k(x)| < \frac{G}{n^{k-1}} \cdot \frac{c}{m} < \frac{G}{n^k},$$

wenn nur $m > cn$ gewählt ist. Das Fortbestehen dieser Umkehrung war aber das einzige, was noch zu beweisen war zur vollständigen Erledigung des obigen Satzes über die singulären Stellen von

$$F(x) = \sum \mathfrak{P}\left(\frac{1}{\nu}\right) x^\nu.$$

§ 2.

Während wir soeben a_ν in der Form $a_\nu = \mathfrak{P}\left(\frac{1}{\nu}\right)$ voraussetzten, nehmen wir jetzt an, daß a_ν gleich einer ganzen Funktion von ν ist:

$$a_\nu = G(\nu) = c_0 + c_1\nu + c_2\nu^2 + \cdots \qquad (\nu = 1, 2, \cdots). \tag{1}$$

Da man leicht ganze Funktionen konstruieren kann, die an den Stellen $1, 2, \cdots$ willkürlich vorgegebene Werte $a_1, a_2, \cdots$ annehmen, so müssen wir $G(x)$ noch einer Einschränkung unterwerfen*):

Wir setzen voraus, daß wenn $\varepsilon\,(>0)$ beliebig klein vorgegeben ist, eine Zahl r' existiert, sodaß für $r > r'$ die Ungleichung gilt:

$$|G(re^{i\varphi})| < e^{\varepsilon r}. \tag{2}$$

Dies vorausgesetzt, beweise ich das

Theorem II: *Die Potenzreihe* $\sum_1^\infty G(\nu)x^\nu$ *ist das Element einer eindeutigen Funktion, die sich in der ganzen Ebene regulär verhält außer im Punkte* $x = 1$, *der ein wesentlich singulärer für die Funktion ist.*

Zuvörderst erwähne ich folgenden von Herrn Poincaré**) herrührenden Hilfssatz, der das Abnehmen der Koeffizienten c_ν von $G(x)$ beleuchtet:

*) cf. Hadamard, La série de Taylor, p. 29.

**) Bull. soc. math. F. T. 11, 1883 p. 138; s. a. Borel, Leçons sur les Fonct. entières, Paris 1900, p. 54.

Die Funktion $\sum_0^\infty {}_\nu c_\nu \nu!\, x^\nu$ ist eine ganze Funktion von x. Zum Beweise, den ich nur andeute, betrachte man das Integral

$$J(x) = \int_0^\infty e^{-t} G(tx)\, dt. \tag{3}$$

Vermöge der Ungleichung (2) hat dieses Integral für jeden endlichen Wert von x einen Sinn und stellt eine ganze Funktion dar*), die Entwickelung derselben nach steigenden Potenzen von x lautet:

$$J(x) = \sum_0^\infty {}_\nu c_\nu \nu!\, x^\nu, \tag{4}$$

und daher

$$\lim \sqrt[\nu]{|c_\nu|\nu!} = 0. \tag{5}$$

Nach dieser Vorbemerkung betrachte ich folgende Reihe von Funktionen:

$$\begin{aligned} f_0(x) &= \frac{x}{1-x} &&= x + x^2 + x^3 + \cdots, \\ f_1(x) &= x \cdot f_0'(x) &&= x + 2x^2 + 3x^3 + \cdots, \\ &\cdots\cdots\cdots

Ferner behaupte ich

$$b_\nu^{(\varkappa)} < \frac{2^\varkappa(\varkappa-1)!}{\nu!} \tag{9}$$

und beweise diese Ungleichung wieder durch den offenbar zulässigen Schluß von $\varkappa - 1$ auf $\varkappa$:

$$b_\nu^{(\varkappa)} < \nu\,\frac{2^{\varkappa-1}(\varkappa-2)!}{\nu!} + \frac{2^{\varkappa-1}(\varkappa-2)!}{(\nu-1)!} = \frac{2^\varkappa(\varkappa-2)!}{(\nu-1)!} \leqq \frac{2^\varkappa(\varkappa-1)!}{\nu!}$$

zunächst für $\nu \leqq \varkappa - 1$, aber nach (8b) auch für $\nu = \varkappa$, sodaß Ungleichung (9) allgemein gilt; daraus folgt nun

$$\begin{aligned} |f_\varkappa(x)| &< 2^\varkappa(\varkappa-1)! \sum_1^\varkappa{}_\nu \frac{1}{\nu!} \left| \frac{x^\nu d^\nu f_0(x)}{dx^\nu} \right| \\ &< 2^\varkappa(\varkappa-1)! \sum_1^\varkappa{}_\nu \frac{|x^\nu|}{|1-x|^{\nu+1}}. \end{aligned} \tag{10}$$

Um den Punkt $x = 1$ schlage ich einen beliebig kleinen Kreis mit dem Radius ϱ; in dem ganzen unendlichen Gebiete außerhalb dieses Kreises bleibt der Ausdruck $\frac{|x|}{|1-x|}$ unter einer endlichen Grenze $G(>1)$; daher

$$\sum_1^\varkappa{}_\nu \frac{|x|^\nu}{|1-x|^{\nu+1}} < \frac{\varkappa G^\varkappa}{|1-x|}; \tag{11}$$

setzt man noch $\frac{2^\varkappa G^\varkappa}{|1-x|} = H'^\varkappa$, so bleibt H' für alle x in S und für alle Exponenten unter einer endlichen Grenze H und man hat nach (10) und (11):

$$|f_\varkappa(x)| < H^\varkappa k!. \tag{12}$$

Bildet man mit den Koeffizienten c_ν der ganzen Funktion $G(x)$ (1) die Reihe:

$$\sum_0^\infty{}_\nu c_\nu f_\nu(x), \tag{13}$$

so konvergiert dieselbe zufolge der Ungleichungen (5) und (12) im ganzen Gebiete S gleichmäßig, stellt also daselbst eine analytische Funktion $F(x)$ dar; die Entwickelung von $F(x)$ in eine Potenzreihe um den Nullpunkt lautet:

$$\begin{aligned} F(x) &= x \sum_0^\infty{}_\nu c_\nu + x^2 \sum_0^\infty{}_\nu c_\nu 2^\nu + x^3 \sum_0^\infty{}_\nu c_\nu 3^\nu + \cdots \\ &= \sum_1^\infty{}_\nu G(\nu) x^\nu. \end{aligned}$$

Diese Taylorsche Reihe ist also das Element einer in der ganzen ene eindeutigen und mit Ausnahme des Punktes $x = 1$ regulären nktion; das ist aber gerade, was unser Theorem behauptet.

Dasselbe läßt sich unmittelbar zu folgender Fassung verallgemeinern:

Sind $G_1, G_2, \cdots, G_l$ l ganze Funktionen, die sämtlich der Bedingung) genügen:

$$|G(re^{i\varphi})| < e^{\varepsilon r} \qquad (r > r'),$$

stellt die Reihe $\sum_1^\infty a_\nu x^\nu$, wo

5) $$a_\nu = \frac{1}{x_1^\nu} G_1(\nu) + \frac{1}{x_2^\nu} G_2(\nu) + \cdots + \frac{1}{x_l^\nu} G_l(\nu)$$

, eine Funktion dar, die in der ganzen Ebene eindeutig ist und die wesentlich singuläre Stellen $x_1, x_2, \cdots, x_l$, sonst aber keine Singularitäten besitzt.

Hat man es mit unendlich vielen singulären Stellen

$$x_1, x_2, \cdots, |x_1| \leqq |x_2| \leqq \cdots, \lim x_\nu = \infty$$

ıd entsprechenden ganzen Funktionen $G_1, G_2, \cdots$, die alle der Bedingung) genügen, zu tun und verlangt man eine Taylorsche Reihe, deren alytische Fortsetzung sich an der Stelle x_i verhält wie die analytische ortsetzung der Reihe $\sum_1^\infty \frac{1}{x_i^\nu} G_i(\nu) x^\nu$, so wird nur in den allerseltensten illen der Anzatz

$$a_\nu = \sum_1^\infty \frac{1}{x_\mu^\nu} G_\mu(x)$$

ım Ziele führen. (Hinreichende Bedingungen, damit dieser Fall eintrete, nd leicht anzugeben.) Doch kann man sich stets folgendermaßen helfen: an setze

6) $$a_\nu = \frac{1}{x_1^\nu} G_1(\nu) + \frac{1}{x_2^\nu} G_2(\nu) + \cdots + \frac{1}{x_{l_\nu}^\nu} G_{l_\nu}(x),$$

obei außer (2) folgende stets mögliche Bedingungen erfüllt seien:

7) a) $\lim l_\nu = \infty$,

b) $\lim \sqrt[\nu]{l_\nu} = 1$,

c) $\sqrt[\nu]{|G_x(\nu)|} < (1 + \varepsilon_\nu)$ für $x \leqq l_\nu$ mit $\lim \varepsilon_\nu = 0$.

Unter diesen Bedingungen ist nämlich $\overline{\lim} \sqrt[\nu]{|a_\nu|} = \frac{1}{|x_1|}$, und wenn nter $a_\nu^{(x)}$ das verstanden wird, was aus a_ν entsteht, wenn

$$G_1 = G_2 = \cdots = G_{x-1} = 0$$

gesetzt wird, so ist

$$\overline{\lim}\sqrt[\nu]{|a_\nu^{(\varkappa)}|} = \frac{1}{|x_\varkappa|}; \quad \text{d. h.} \quad F_\varkappa(x) = \sum_1^\infty a_\nu^{(\varkappa)} x^\nu$$

ist regulär in einem Kreise mit dem Radius $|x_\varkappa|$; $F(x)$ hat also in diesem Kreise keine anderen Singularitäten wie $F(x) - F_\varkappa(x)$; das letztere ist aber nach dem vorigen Satze eine eindeutige Funktion mit den wesentlich singulären Stellen $x_1, x_2, \cdots x_{\varkappa-1}$ und zwar verhält sich $F(x) - F_\varkappa(x)$ an der Stelle x_i $(i \leqq \varkappa - 1)$ wie die analytische Fortsetzung der Reihe

$$\sum_1^\infty \left(\frac{1}{x_i}\right)^\nu G_i(\nu)\, x^\nu.$$

Die im Vorhergehenden mitgeteilten Sätze stehen im engsten Zusammenhange mit der Frage nach den singulären Stellen einer vorgegebenen Taylorschen Reihe. Man kann bei der Untersuchung dieser Frage nach Herrn Hadamard*) zwei völlig verschiedene Gruppen von Methoden unterscheiden:

„Die einen beschränken in keiner Weise die Allgemeinheit der Reihe $\sum a_\nu x^\nu$. Gerade dieser Umstand verleiht den so erhaltenen Resultaten eine große Bedeutung; doch ist zu fürchten, daß diese Resultate stets zu gering an Zahl bleiben.

Andere Methoden dagegen beziehen sich ausschließlich auf verhältnismäßig einfache Singularitäten und ermangeln daher der Allgemeinheit."

Herr Hadamard hat sich im zweiten Teile seiner Thèse**) auf den letzteren Standpunkt gestellt und den Fall vollständig erledigt, wo alle auftretenden Singularitäten Pole sind.

Auch wir sind durch die voraufgehenden Sätze zu einer ähnlichen einschränkenden Voraussetzung geführt, nämlich nur wesentlich singuläre Stellen zuzulassen, und haben sehr allgemeine Ausdrücke konstruiert, die an vorgegebenen Stellen wesentlich singuläre Punkte besitzen. Die wichtige Frage, die sich nun erhebt ist die folgende:

Sind durch unsere Ausdrücke sämtliche Funktionen der bezeichneten Art erschöpft? oder m. a. W.: Lassen sich die obigen Sätze umkehren?

Ich werde durch den Beweis des folgenden Satzes zeigen, daß dies in der Tat der Fall ist.

Theorem III: *Hat man eine eindeutige Funktion $F(x)$ mit der einen wesentlich singulären Stelle $x = 1$, und lautet die Entwickelung von $F(x)$ nach steigenden Potenzen von x:*

*) La série de Taylor, p. 13.

**) Journ. de Math. 8 (1892).

(1) $$F(x) = a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 + \cdots,$$

so läßt sich a_ν immer in der Form darstellen:

(2) $$a_\nu = G(\nu),$$

wo $G(x)$ eine ganze Funktion mit folgender Eigenschaft bedeutet:

Wenn $\varepsilon\,(>0)$ beliebig klein vorgegeben ist, so läßt sich stets ein r' so bestimmen, daß für $r > r'$

(3) $$|G(re^{i\varphi})| < e^{\varepsilon r}$$

*ist**).

$F(x)$ kann man sich als eine beständig konvergente Potenzreihe von $\frac{1}{1-x}$ gegeben denken; etwas bequemer für das folgende ist es $F(x)$ als ganze Funktion von $\frac{x}{1-x}\left(= \frac{1}{1-x} - 1\right)$ vorauszusetzen:

(4) $$F(x) = e_1 \frac{x}{1-x} + e_2 \left(\frac{x}{1-x}\right)^2 + \cdots \quad \left(\lim \sqrt[\nu]{|e_\nu|} = 0\right).$$

Die Koeffizienten a_ν der Entwickelung (1) um den Nullpunkt berechnen sich folgendermaßen aus den e_i:

(5) $$a_\nu = e_1 + \binom{\nu-1}{1} e_2 + \binom{\nu-1}{2} e_3 + \cdots + \binom{\nu-1}{\nu-1} e_\nu$$**).

Ich betrachte nun folgenden Ausdruck:

(6) $$\Phi(x) = e_1 + \frac{x-1}{1} e_2 + \frac{(x-1)(x-2)}{1\cdot 2} e_3 + \frac{(x-1)(x-2)(x-3)}{1\cdot 2\cdot 3} e_4 + \cdots$$

und behaupte $\Phi(x)$ ist die durch unser Theorem verlangte ganze Funktion; dazu sind folgende drei Punkte zu beweisen:

1) $\Phi(x)$ ist eine ganze Funktion: $\Phi(x) = G(x)$;
2) $G(\nu) = a_\nu$;
3) $|G(re^{i\varphi})| < e^{\varepsilon r}$ (für beliebiges ε und $r > r'$).

Bezüglich des ersten Punktes beweise ich, das $\Phi(x)$ für $|x| < R$ (R beliebig groß) gleichmäßig konvergiert. Zu dem Zwecke schreibe ich

$$\Phi(x) = e_1 + \frac{x-1}{1} e_2 + \cdots + \frac{(x-1)(x-2)\cdots(x-n+1)}{(n-1)!} e_n + \Phi_n(x)$$

---

*) Falls $x = 1$ eine *außerwesentlich* singuläre Stelle n^{ter} Ordnung ist, reduziert sich $G(\nu)$ bekanntlich auf ein Polynom $(n-1)^{\text{ten}}$ Grades, und umgekehrt.

**) Umgekehrt ist $e_{i+1} = \Delta^i a_1 = a_{i+1} - \binom{i}{1} a_{i-1} + \cdots + (-1)^i a_1$. Daraus und aus dem Theorem I folgt ganz beiläufig, daß $\lim \sqrt[\nu]{|\Delta^\nu a_1|} = 0$ ist, falls $a_\nu = G(\nu)$ und $|G(re^{i\varphi})| < e^{\varepsilon r}$ ist. Mit dem Beweise des reziproken Satzes sind wir oben gerade beschäftigt.

und zeige, daß $|\Phi_n(x)|$ für $|x| < R$ beliebig klein wird, wenn nur n groß genug gewählt ist. Zunächst bestimme ich eine Zahl m' so, daß für $m > m'$, wenn $\varepsilon \begin{pmatrix} > 0 \\ < 1 \end{pmatrix}$ gegeben ist,

$$|e_m| < \varepsilon^m$$

wird. Dann ist, falls $n > m'$,

$$|\Phi_n(x)| < \frac{(R+1)(R+2)\cdots(R+n)}{n!}\varepsilon^n + \frac{(R+1)(R+2)\cdots(R+n+1)}{(n+1)!}\varepsilon^{n+1} + \cdots.$$

Was hier auf der rechten Seite steht, ist der Rest vom n^{ten} Gliede ab der konvergenten Entwickelung von $\left(\frac{1}{1-\varepsilon}\right)^{R+1}$ nach Potenzen von ε, kann also durch Wahl von n beliebig klein gemacht werden, womit der erste Punkt erledigt ist.

Der zweite ist evident, wie ein Blick auf die unter einander stehenden Formeln (5) und (6) lehrt.

Der dritte Punkt ergibt sich folgendermaßen:

$$\begin{aligned}
|\Phi(re^{i\varphi})| &< |e_1| + \frac{r+1}{1}|e_2| + \frac{(r+1)(r+2)}{1\cdot 2}|e_3| + \cdots \\
&< |e_1| + \frac{r+1}{1}|e_2| + \cdots + \frac{(r+1)(r+2)\cdots(r+m-1)}{(m-1)!}|e_m| + \\
&+ \frac{(r+1)(r+2)\cdots(r+m)}{m!}\varepsilon^m + \frac{(r+1)(r+2)\cdots(r+m+1)}{(m-1)!}\varepsilon^{m+1} + \cdots \\
&\quad \text{(wenn wieder } |e_m| < \varepsilon^m \text{ für } m > m') \\
&< \frac{1}{(1-\varepsilon)^{r+1}} + P(r), \text{ wo } P(r) \text{ ein Polynom } (m-1)^{\text{ten}} \text{ Grades in } r \text{ bedeutet,} \\
&= e^{-(r+1)\lg(1-\varepsilon)} + P(r), \\
&< e^{(r+1)\varepsilon'} + P(r), \text{ wo } \varepsilon', \text{ wie auch nachher } \varepsilon'' \text{ mit } \varepsilon \text{ beliebig klein wird, diese Ungleichung gilt noch für jedes } r; \\
&< e^{\varepsilon'' r}, \text{ wenn } r \text{ genügend groß gewählt ist.}
\end{aligned}$$

Hiermit ist aber der in Rede stehende Satz völlig bewiesen.

Auf die anderen obigen Sätze, bei denen es sich um Funktionen mit mehreren oder unendlich vielen singulären Stellen handelte, angewandt, besagt das letzte Theorem, daß die dort in den Koeffizienten a_ν auftretenden ganzen Funktionen $G_1, G_2, \cdots$ die allgemeinsten sind, welche zu wesentlich singulären Stellen Veranlassung geben. Man hat also beispielsweise den Satz:

Sind unendlich viele ganz beliebige ganze Funktionen $g_1, g_2, \cdots$ gegeben und unendlich viele Stellen $x_1, x_2, \cdots$ ($\lim x_\nu = \infty$), so existiert stets eine eindeutige mit Ausnahme der Punkte x_i und des Punktes ∞

reguläre analytische Funktionen $F(x)$ von der Eigenschaft, daß die Differenz

$$F(x) - g_i\left(\frac{1}{x - x_i}\right)$$

sich auch an der Stelle x_i regulär verhält. Lautet die Entwickelung dieser Funktion um den Nullpunkt $F(x) = \sum a_\nu x^\nu$, so kann man setzen:

$$a_\nu = \frac{1}{x_1^\nu} G_1(\nu) + \frac{1}{x_2^\nu} G_2(\nu) + \cdots + \frac{1}{x_{l_\nu}^\nu} G_{l_\nu}(\nu) + a_\nu'.$$

Es bestehen dabei die Bedingungen (17) p. 377 und (2) p. 374, und es ist $\lim \sqrt[\nu]{|a_\nu'|} = 0$. (Eine in der ganzen Ebene mit Ausnahme der Punkte x_i giltige Darstellung von $F(x)$ gestattet bekanntlich das Mittag-Lefflersche Theorem.)

Beispiele: Die ganzen Funktionen von x

$$\frac{\sin \pi \sqrt{x}}{\pi \sqrt{x}} \quad \text{und} \quad (\sin \pi \sqrt{x})^2$$

erfüllen die Bedingung (2) p. 374; daher stellen die Reihen

$$\sum_0^\infty \frac{\sin \pi \sqrt{\nu}}{\pi \sqrt{\nu}} x^\nu \quad \text{und} \quad \sum_0^\infty (\sin \pi \sqrt{\nu})^2 x^\nu$$

Funktionen dar, die auf dem Konvergenzkreise und überhaupt nur die eine singuläre Stelle $x = 1$ besitzen. Dieselben sind wegen ihrer Einfachheit besonders geeignet zur Illustrierung der zuerst von Herrn Hadamard*) gegenüber gegenteiligen Vermutungen durch Konstruktion eines komplizierteren Beispiels gezeigten Tatsache, daß ein $\lim \frac{a_{\nu+1}}{a_\nu}$ nicht zu existieren braucht, selbst wenn die Reihe $\sum a_\nu x^\nu$ nur eine einzige singuläre Stelle auf dem Konvergenzkreise hat. Da in den obigen Beispielen unendlich viele der a_ν gleich Null sind, existiert nicht einmal ein $\lim \sqrt[\nu]{|a_\nu|}$.

§ 3.

Ich wende mich nunmehr zu dem oben angekündigten elementaren Beweise des Hadamardschen Satzes über die *Abhängigkeit der Singularitäten der Funktion*

$$F_1(x) = \sum a_\nu \int_0^1 V(t)\, t^\nu\, dt\, x^\nu \tag{1}$$

*) Journ. de Math. (4) 8 (1892) p. 163, la série de Taylor p. 65.

von denjenigen der Funktion

$$F(x) = \sum a_\nu x^\nu \text{ *).} \tag{2}$$

Von jedem singulären Punkte α_i dieser letzteren Funktion denke ich mir eine Gerade ins Unendliche gezogen, deren Verlängerung durch den Nullpunkt gehen würde. Die sämtlichen Punkte dieser Strahlen werden aus dem Bereiche der Variablen x ausgeschieden. In dem übrig bleibenden „Sterne" (nach der Bezeichnungsweise des Herrn Mittag-Leffler) ist $F(x)$ regulär und eindeutig. Es ist zu beweisen, daß das gleiche auch von $F_1(x)$ gilt.

Genauer gesagt, führe ich den Beweis nicht für den Stern, sondern was auf dasselbe hinausläuft für ein folgendermaßen definiertes Gebiet S:

Von dem Sterne werde zuerst das unendliche Gebiet außerhalb eines um den Nullpunkt beschriebenen Kreises mit dem beliebig großen Radius R ausgeschlossen; ferner möge jeder der von den singulären Punkten α_i ausgehenden Strahlen um die Strecke ε über α_i hinaus gegen den Nullpunkt verlängert und dann vom Nullpunkt als Scheitel aus um den Winkel ε nach beiden Seiten gedreht werden. Das so von den Halbstrahlen überstrichene Gebiet werde ebenfalls eliminiert; was danach vom Sterne noch übrig bleibt, möge unser Gebiet S sein.

Es soll gezeigt werden, daß in diesem Gebiete die Taylorsche Reihe

$$F_1(x) = \sum a_\nu' x^\nu, \quad \text{wo} \quad a_\nu' = a_\nu \int_0^1 V(t)\, t^\nu\, dt \tag{1}$$

ist, sich eindeutig fortsetzen läßt.

Vorausgesetzt wird nur, daß $\int_0^1 V(t)\, dt$ absolut konvergiert (falls $a_0 = a_1 = \cdots = a_{\varkappa-1} = 0$ ist, genügt die absolute Konvergenz von $\int_0^1 V(t)\, t^\varkappa\, dt$); auch wird der Einfachheit halber zunächst angenommen, daß $V(t)$ $(0 \leqq t \leqq 1)$ unter einer endlichen Grenze G bleibt.

Ich definiere nun folgende Reihe von Funktionen:

$$\begin{aligned} h_0 &= V(0)\, F(0), \\ h_1(x) &= \frac{1}{2}\left(V(0)\, F(0) + V\left(\frac{1}{2}\right) F\left(\frac{x}{2}\right)\right), \quad \text{allgemein} \\ h_i(x) &= \frac{1}{2^i} \sum_0^{2^i-1} V\left(\frac{\nu}{2^i}\right) F\left(\frac{\nu x}{2^i}\right) \end{aligned} \tag{3}$$

*) Hadamard, Journ. de Math. (8) 1892, p. 163.

und sodann:

$$f_0 = h_0,$$
$$f_i(x) = h_i(x) - h_{i-1}(x) \qquad (i>0). \tag{4}$$

Jedes einzelne f ist ersichtlich eine in S reguläre analytische Funktion, ich behaupte, daß das gleiche von

$$\sum_0^\infty f_\nu(x) \tag{5}$$

gilt und beweise zu dem Zwecke, daß diese Reihe (5) für alle in S gelegenen x gleichmäßig konvergiert. Es ist

$$\begin{aligned}
\sum_{n+1}^{n+r} f_\nu(x) &= h_{n+r}(x) - h_n(x) \\
&= \frac{1}{2^{n+r}} \sum_0^{2^{n+r}-1} V\left(\frac{\nu}{2^{n+r}}\right) F\left(\frac{\nu x}{2^{n+r}}\right) - \frac{1}{2^n} \sum_0^{2^n-1} V\left(\frac{\mu}{2^n}\right) F\left(\frac{\mu x}{2^n}\right) \\
&= \frac{1}{2^{n+r}} \sum_0^{2^n-1} \left\{ \sum_0^{2^r-1} \left(V\left(\frac{\mu 2^r+\nu}{2^{n+r}}\right) F\left(\frac{\mu 2^r+\nu}{2^{n+r}} x\right) - V\left(\frac{\mu 2^r}{2^{n+r}}\right) F\left(\frac{\mu 2^r x}{2^{n+r}}\right)\right)\right\} \qquad (6) \\
&= \frac{1}{2^{n+r}} \sum_0^{2^n-1} \sum_0^{2^r-1} V\left(\frac{\mu 2^r+\nu}{2^{n+r}}\right)\left[F\left(\frac{\mu 2^r+\nu}{2^{n+r}} x\right) - F\left(\frac{\mu 2^r x}{2^{n+r}}\right)\right] \\
&\quad + \frac{1}{2^{n+r}} \sum_0^{2^n-1} \sum_0^{2^r-1} F\left(\frac{\mu 2^r x}{2^{n+r}}\right)\left[V\left(\frac{\mu 2^r+\nu}{2^{n+r}}\right) - V\left(\frac{\mu 2^r}{2^{n+r}}\right)\right]
\end{aligned}$$

$\sum_{n+1}^{n+r} f_\nu(x)$ ist somit in zwei Doppelsummen zerlegt, von denen jede einzeln, wie gezeigt werden soll, durch Wahl von n beliebig klein gemacht werden kann, und zwar gleichmäßig für alle x von S und für $r = 1, 2, \cdots$ in inf.

Die erste Doppelsumme ist ihrem absoluten Betrage nach kleiner als

$$\frac{G}{2^{n+r}} \sum_0^{2^n-1} \sum_0^{2^r-1} \left(F\left(\frac{\mu 2^r+\nu}{2^{n+r}} x\right) - F\left(\frac{\mu 2^r}{2^{n+r}} x\right)\right). \tag{7}$$

Setzt man

$$\frac{\mu 2^r+\nu}{2^{n+r}} x = y_{\mu\nu} \quad \text{und} \quad \frac{\mu 2^r}{2^{n+r}} x = y_\mu,$$

so liegen sämtliche Punkte $y_{\mu\nu}$ und y_μ in S und es ist für alle in Betracht kommenden Werte von μ und ν

$$|y_{\mu\nu} - y_\mu| < \frac{|x|}{2^n} < \frac{R}{2^n} < \delta \tag{8}$$

d. h. beliebig klein bei passender Wahl von n: dann kann aber auch wegen der gleichmäßigen Stetigkeit von F in S

$$(9) \qquad |F(y_{\mu,\nu}) - F(y_\mu)| \quad - 0 \leqq \mu < 2^n;\ 0 \leqq \nu < 2^n -,$$

also auch

$$(10) \qquad G\ F(y_{\mu,\nu} - F(y_\mu)),$$

mithin der Ausdruck (7) durch Wahl von n unter jede Grenze herabgedrückt werden.

Somit ist die Behauptung, was die erste Doppelsumme betrifft, erwiesen.

Was die zweite betrifft, so bedeute $D(t_1, t_2)$ die Schwankung von $V(t)$ im Intervalle (t_1, t_2) und G_1 das Maximum von $|F(x)|$ in S, dann wird die zweite Summe kleiner als

$$(11) \qquad \frac{G_1}{2^n} \sum_0^{2^n-1} D\left(\frac{\nu}{2^n}, \frac{\nu+1}{2^n}\right).$$

Dieser Ausdruck kann aber wegen der vorausgesetzten Existenz von $\int_0^1 V(t)\,dt$ durch Wahl von n beliebig klein gemacht werden.

Somit ist bewiesen, daß $\sum_0^\infty f_\nu(x)$ in S gleichmäßig konvergiert, also daselbst eine reguläre analytische Funktion darstellt, und daß jeder Koeffizient der Entwickelung dieser Funktion um den Nullpunkt gleich der Summe der entsprechenden Koeffizienten der Funktionen $f_\nu(x)$ ist.

Der Koeffizient a'_m von x^m wird z. B.:

$$(12) \qquad a'_m = \lim_{n=\infty} \frac{a_m}{2^n} \sum_0^{2^n-1} V\left(\frac{\nu}{2^n}\right)\left(\frac{\nu}{2^n}\right)^m;$$

dies ist der Definition nach $a_m \int_0^1 V(t)\,t^m\,dt$, falls dieses Integral existiert; dies tritt aber immer ein, wenn, wie vorausgesetzt, $\int_0^1 V(t)\,dt$ existiert.

Wir haben somit gesehen:

Die in S reguläre analytische Funktion

$$\sum_0^\infty f_\nu(x)$$

hat um den Nullpunkt die Entwickelung:

$$\sum_0^\infty a_\nu' x^\nu \quad - \quad a_\nu' = a_\nu \int_0^1 V(t)\,t^\nu\,dt \quad -,$$

und diese Taylorsche Reihe läßt sich also über das ganze Gebiet S, mithin über den ganzen Mittag-Lefflerschen Stern analytisch fortsetzen.

Statt die Teilstrecken $\left(\frac{\nu}{2^n}, \frac{\nu+1}{2^n}\right)$ — $\lim n = \infty$ — auf der Strecke (0, 1) auszuzeichnen, hätte man natürlich unendlich viele andre das gleiche leistende Teilungen vornehmen können. Man hätte dann entsprechend den Funktionen $f_0, f_1, \cdots$ andre Funktionen $\varphi_0, \varphi_1, \cdots$ einzuführen gehabt; $\sum_0^\infty \varphi_\nu(x)$ wäre auch eine in S reguläre analytische Funktion gewesen, die mit $\sum_0^\infty f_\nu(x)$ identisch gewesen wäre, da die beiderseitigen Entwickelungen um den Nullpunkt übereinstimmen. Daraus schließt man

$$\sum_0^\infty f_\nu(x) = \int_0^1 V(t)\, F(tx)\, dt$$

(unabhängig von der benutzten Einteilung).

Nachträglich lassen sich nun folgende zwei Erweiterungen an dem Satze anbringen:

1) unter geeigneten Voraussetzungen über den analytischen Charakter von $V(t)$ können die geradlinigen Einschnitte durch andere ersetzt werden; man beweist dies, indem man die Integration von 0 bis 1 auf komplexem Wege ausführt; s. darüber Hadamard a. a. O.

2) $V(t)$ braucht nicht unter einer endlichen Grenze zu bleiben.

Um den letzteren Punkt zu beweisen gehen wir wieder auf die Definition des bestimmten Integrals zurück und nehmen sogleich den allgemeinsten Fall an, daß die singulären Stellen von $V(t)$, d. h. diejenigen, über die direkt nicht integriert werden kann, eine abgeschlossene Menge bilden.

Man betrachtet dann Bereiche $D_0, D_1, D_2, \cdots$, von denen jeder aus einer Summe von Teilstrecken der Strecke $\overline{01}$ besteht und keiner einen singulären Punkt von $V(t)$ enthält; dagegen soll D_ν die sämtlichen Bereiche $D_0, D_1, \cdots, D_{\nu-1}$ umfassen, und irgend ein nicht singulärer Punkt t soll schließlich einem D_n, also auch $D_{n+1}, D_{n+2}, \cdots$ angehören.

Wenn n genügend groß gewählt ist, wird also der Inhalt der Menge $\delta_{n,n+r}$ derjenigen Punkte, die zu D_{n+r}, nicht aber zu D_n gehören, so klein als man nur will, und die notwendige und hinreichende Bedingung für die absolute Konvergenz von $\int_0^1 V(t)\, dt$ ist, daß man zu jedem ε ein n bestimmen kann, daß

$$\int_{D_{n+r}} |V(t)|\,dt - \int_{D_n} |V(t)|\,dt < \varepsilon, \tag{13}$$

oder anders geschrieben

$$\int_{\delta_{n,n+r}} |V(t)\,dt < \varepsilon \tag{14}$$

wird (für $r = 1, 2, \cdots$ und wie auch die den obigen Bedingungen genügenden Bereiche D im übrigen gewählt sein mögen).

Dies vorausgeschickt betrachten wir die Reihe von Ausdrücken:

$$F_i(x) = \int_{D_i} V(t)\,F(tx)\,dt \qquad (i = 0, 1, \cdots), \tag{15}$$

von denen jeder, wie vorhin (p. 381 ff.) gezeigt wurde, eine in S reguläre analytische Funktion darstellt. Setzt man

$$\begin{aligned} &\psi_0(x) = F_0(x), \\ &\psi_i(x) = F_i(x) - F_{i-1}(x) \qquad (i>0), \end{aligned} \tag{16}$$

so ist, wenn wieder G_1 das Maximum von $|F(x)|$ in S bedeutet:

$$\begin{aligned} \left|\sum_{n+1}^{n+r} \psi_\nu(x)\right| &= |F_{n+r}(x) - F_\nu(x)| = \left|\int_{\delta_{n,n+r}} V(t)\,F(tx)\,dt\right| \\ &< G_1 \int_{\delta_{n,n+r}} |V(t)|\,dt, \end{aligned} \tag{17}$$

also nach (14)

$$\left|\sum_{n+1}^{n+r} \psi_\nu(x)\right| < G_1\,\varepsilon, \tag{18}$$

d. h. beliebig klein mit wachsendem n für alle x in S.

Aus der so bewiesenen gleichmäßigen Konvergenz von $\sum_0^\infty \psi_\nu(x)$ schließt man genau wie oben, daß

$$\sum_0^\infty \psi_\nu(x) = \int_0^1 V(t)\,F(tx)\,dt$$

eine in S reguläre analytische Funktion ist, deren Potenzentwickelung um den Nullpunkt lautet:

$$\sum_0^\infty a_\nu \int_0^1 V(t)\,t^\nu\,dt\,x^\nu.$$

Man bemerke übrigens, daß erst bei diesem letzten Beweise für die gleichmäßige Konvergenz von $\sum \psi_\nu(x)$ von der Voraussetzung der *absoluten* Konvergenz von $\int_0^1 V(t)\,dt$ Gebrauch gemacht wurde; in Wirklichkeit ist die Voraussetzung unnötig und es genügt die Existenz von $\int_0^1 V(t)\,dt$*), was ich zum Schlusse in Kürze zeigen will, indem ich Ungleichung (18) unter dieser erweiteten Voraussetzung beweise.

Es sei unter Trennung des Reellen und Imaginären $x = \xi + i\eta$ ein Punkt im Innern oder auf der Begrenzung von S und

$$F(tx) = u(t\xi, t\eta) + iv(t\xi, t\eta); \tag{19}$$

wenn nun t zwischen 0 und 1 variiert, so läßt sich zeigen, daß die Anzahl der Monotoniewechsel der Funktion u und der Funktion v unter einer endlichen Zahl N bleiben, die unabhängig von der besonderen Lage des Punktes $\xi + i\eta$ ist; dann erhält man aber unter Anwendung des zweiten Mittelwertsatzes der Integralrechnung:

$$\begin{aligned}\left|\sum_{n+1}^{n+r}\psi_\nu(x)\right| &= \left|\int_{\delta_{n,n+r}} V(t)\,u(t\xi, t\eta)\,dt + i\int_{\delta_{n,n+r}} V(t)\,v(t\xi, t\eta)\,dt\right| \\ &< \left|\int_{\delta_{n,n+r}} V(t)\,u(t\xi, t\eta)\,dt\right| + \left|\int_{\delta_{n,n+r}} V(t)\,v(t\xi, t\eta)\,dt\right| \\ &< 4NG_1\left|\int_{\delta'_{n,n+r}} V(t)\,dt\right|^{**}),\end{aligned} \tag{20}$$

was wegen der vorausgesetzten Konvergenz von $\int_0^1 V(t)\,dt$ mit unendlich werdendem n verschwindet, q. e. d.

Der vorstehende Beweis mag vielleicht durch die nötig werdenden Bezeichnungen etwas umständlich erscheinen; doch ist der demselben zu grunde liegende Gedanke — Zurückgehen auf die Definition des bestimmten Integrals und Anwendung des Doppelreihensatzes — ein äußerst einfacher

*) Selbst diese ist nicht nötig, da die obigen Entwickelungen sämtlich giltig bleiben, wenn man statt des Integrals das obere oder das untere Integral einsetzt; auch genügt bei Unendlichkeitsstellen von $V(t)$ die Konvergenz des Integrals bei bestimmter Art des Grenzübergangs, z. B. die Existenz des Cauchyschen Hauptwertes; nur ist dann auch in den andern auftretenden Integralen der gleiche Grenzübergang auszuführen.

**) $\delta'_{n,n+r}$ bedeutet dabei einen innerhalb $\delta_{n,n+r}$ gelegenen Bereich.

und läßt sich leicht auf andere Sätze übertragen, beispielsweise auf den folgenden des Herrn Hadamard*):

Sind $a(x) = \sum a_\nu x^\nu$ und $b(x) = \sum b_\nu x^\nu$ Elemente zweier analytischer Funktionen mit den singulären Stellen α resp. β, so hat die durch die Reihe $\sum a_\nu b_\nu x^\nu$ definierte analytische Funktion in der ganzen Ebene keine andern singulären Stellen als unter den Punkten $\alpha \cdot \beta$

München, April 1902.

*) acta math. 22 (1898).

Über polynomische Entwickelungen.

Von

Georg Faber in München.

Der Satz, daß eine analytische Funktion $F(x)$, die in einem einfach zusammenhängenden von einer stetigen Kurve begrenzten endlichen Gebiete S der komplexen Ebene regulär ist, daselbst durch eine Reihe von Polynomen dargestellt werden kann, ist schon mehrfach bewiesen worden*); doch war die große Mannigfaltigkeit und Willkür, die bei diesen Entwickelungen noch möglich ist, einem genaueren Studium besonderer polynomischer Reihen eher hinderlich als förderlich.

Im folgenden werde ich nun den obigen Satz auf einem andern Wege beweisen, indem ich von der speziellen Annahme ausgehe, das Gebiet S sei ein einfach zusammenhängendes ganz im Endlichen gelegenes Kontinuum, dessen Begrenzung C aus einem *einzigen regulären analytischen Zuge***) bestehe. Unter dieser Voraussetzung zeige ich:

Jede in S reguläre analytische Funktion $F(x)$ läßt sich daselbst auf eine Weise durch eine Reihe

$$(1) \qquad \sum_{0}^{\infty} a_\nu P_\nu(x)$$

darstellen; $P_0(x), P_1(x), P_2(x), \cdots$ bedeutet dabei eine unendliche Reihe von Polynomen ($P_i(x)$ vom i^{ten} Grade; $P_0 = -1$); und zwar sollen die Koeffizienten der Potenzen von x in jenen Polynomen ausschließlich von dem

*) cf. Runge, acta math. 6 (1885); Hilbert, Gött. Nachr. 1897. Verwandtschaft mit den oben folgenden Sätzen zeigen insbesondere auch diejenigen, die Herr Painlevé am 24. Jan. 1898 der französ. Akademie ohne Beweis mitgeteilt hat.

**) Die Definition hievon s. u. a. in Picard's traité d'an. t. II. chap. X, 2; diesem Kapitel (s. bes. §§ 4 u. 7) entnehme man auch den Beweis des folgenden von Herrn Schwarz herrührenden Satzes, auf den oben sogleich Bezug genommen wird: Die Funktion $\psi(\xi$, welche ein Gebiet, zu dessen Begrenzung das reguläre analytische Kurvenstück C gehört, auf einen Kreis abbildet, ist regulären Verhaltens und umkehrbar in allen inneren Punkten von C.

betrachteten Regularitätsbereiche S, dagegen die a_ν von der besonderen Wahl der zu entwickelnden Funktion abhängen.

Besteht das Gebiet S aus dem Innern eines Kreises mit dem Mittelpunkte $x = a$, so reduziert sich $P_\nu(x)$ auf $-(x-a)^\nu$; noch engere Beziehungen zwischen den Reihen (1) und der gewöhnlichen Taylorschen Reihe werden sich im folgenden ergeben.

Es sei nun

$$z = \psi(\tau) \tag{2}$$

eine Funktion, welche das unendliche Gebiet der z-Ebene außerhalb C auf das Innere des Einheitskreises der τ-Ebene abbildet, und zwar so, daß dem Punkte $z = \infty$ der Punkt $\tau = 0$ entspricht. Die Funktion $\psi(\tau)$ hat demnach einen einfachen Pol im Nullpunkte, verhält sich aber sonst regulär im Einheitskreise; $\psi(\tau)$ läßt sich also darstellen in der Form:

$$z = \psi(\tau) = \frac{a}{\tau} + \mathfrak{P}(\tau), \tag{3}$$

wo $\mathfrak{P}(\tau)$ eine Potenzreihe von τ mit nur positiven Potenzen bedeutet, die für $|\tau| < 1$ konvergiert. Da wir aber die Kurve C als aus einem einzigen regulären analytischen Zuge bestehend vorausgesetzt haben, kann $\mathfrak{P}(\tau)$ auf dem Einheitskreise keinen singulären Punkt haben*); es konvergiert daher $\mathfrak{P}(\tau)$ für $|\tau| < 1 + \rho_1$ $(0 < \rho_1)$, und es läßt sich ein ρ $(0 < \rho \leqq \rho_1)$ angeben, sodaß, falls $\sigma < \rho$ ist den Kreisen

$$|\tau| = 1 + \sigma$$

der τ-Ebene in der z-Ebene geschlossene Kurven $C_{1+\sigma}$ ohne Doppelpunkt entsprechen, die ganz innerhalb $C(= C_{1+0})$ verlaufen. (Den Kreisen $|\tau| = 1 - \sigma'$ $(0 < \sigma' < 1)$ entsprechen ganz außerhalb C verlaufende Kurven $C_{1-\sigma'}$.)

Falls $F(x)$ eine im Innern von S reguläre Funktion bedeutet, ist nach dem Cauchyschen Integralsatze

$$F(x) = \frac{1}{2\pi i}\int_{C'} \frac{F(z)}{z - x}\, dz \tag{4}$$

für jeden Punkt im Innern von C', falls C' seinerseits wieder ganz innerhalb S verläuft; für C' werde eine der obigen Kurven $C_{1+\sigma}$ gewählt. Das Integral auf der rechten Seite von (4) transformiert man, indem man für z aus (2) $\psi(\tau)$ einsetzt, dadurch geht (4) über in

$$F(x) = \frac{1}{2\pi i}\int_{K_{1+\sigma}} \frac{F(\psi\tau)}{\psi(\tau) - x}\, \frac{d\psi(\tau)}{d\tau}\, d\tau; \tag{5}$$

*) S. die Anm. **) p. 389.

Die Integration ist zu erstrecken in der τ Ebene über die Peripherie des Kreises $|\tau| = 1 + \sigma$ und zwar im Sinne des Uhrzeigers.

Ehe ich auf diese Formel zurückkomme, schalte ich eine Untersuchung der in (5) unter dem Integralzeichen vorkommenden Funktion τ und x:

$$\frac{d\psi(\tau)}{d\tau} \cdot \frac{1}{\psi(\tau) - x} \tag{6}$$

ein. Es ist dies die erzeugende Funktion für unsere Polynome, welche bei der Entwickelung von (6) nach Potenzen von τ als Koeffizienten auftreten. $\psi(\tau)$ wird nie gleich x, solange, wie vorausgesetzt werden möge, x innerhalb C_ω $(0 < \omega < 1 + \rho)$ und $|\tau| < \omega$ bleibt*). Im Punkte $\tau = 0$ hat $\frac{d\psi(\tau)}{d\tau}$ einen Pol zweiter Ordnung, während $\frac{1}{\psi(\tau) - x}$ dort von der ersten Ordnung Null wird; demnach hat der Ausdruck (6), als Funktion von τ betrachtet einen einfachen Pol im Nullpunkte — und zwar mit dem Residuum -1 —, ist aber im übrigen regulär mindestens in einem mit dem Radius ω um den Nullpunkt beschriebenen Kreise. Man hat daher die in diesem Kreise giltige Entwickelung:

$$\frac{d\psi(\tau)}{d\tau} \cdot \frac{1}{\psi(\tau) - x} = -\frac{1}{\tau} + \sum_0^\infty {}_\nu P_{\nu+1}(x)\, \tau^\nu. \tag{7}$$

Es ist leicht zu zeigen, daß P_ν ein Polynom ν^{ten} Grades in x ist; wenn nämlich allgemein $\mathfrak{P}(\tau)$, $\mathfrak{P}_1(\tau)$, $\mathfrak{P}_2(\tau)$, $\cdots$ nur positive Potenzen enthaltende Potenzreihen von τ bedeuten, so ist:

$$\begin{aligned} (8)\quad \frac{d\psi(\tau)}{d\tau} \cdot \frac{1}{\psi(\tau) - x} &= \left(-\frac{a}{\tau^2} + \mathfrak{P}_1(\tau)\right) \cdot \frac{1}{\frac{a}{\tau} + \mathfrak{P}(\tau) - x} \\ &= -\frac{1}{\tau} + \frac{\tau\mathfrak{P}_1(\tau) + \mathfrak{P}(\tau) - x}{a + \tau\mathfrak{P}(\tau) - \tau x} = -\frac{1}{\tau} + \frac{\mathfrak{P}_2(\tau) - x}{a + \tau\mathfrak{P}(\tau) - \tau x}. \end{aligned}$$

In dem Nenner auf der rechten Seite von (8) kommt x einmal mit τ multipliziert, sonst aber nicht mehr vor; entwickelt man daher $\frac{1}{a + \tau\mathfrak{P}(\tau) - \tau x}$ nach Potenzen von τ, so enthält der Koeffizient von τ^μ als höchste Potenz von x die μ^{te}; multipliziert man noch mit dem Zähler $\mathfrak{P}_2(\tau) - x$, so steigt der nun entstehende Koeffizient von τ^μ i. e. $P_{\mu+1}(x)$ in x bis zum $(\mu+1)^{\text{ten}}$ Grade an.

Die Anwendung des Cauchyschen Koeffizientensatzes auf die Reihe

---

*) Es sei nochmals daran erinnert, daß C_ω diejenige Kurve der x-Ebene bedeutet, welche vermöge der Relation $x = \psi(t)$ dem um den Nullpunkt der t-Ebene mit dem Radius ω beschriebenen Kreise K_ω entspricht.

in (7) ergibt, falls G eine bestimmte endliche Zahl bedeutet, und die Bedingung $0 < \omega' < \omega < 1 + \varrho$ erfüllt ist, für alle x innerhalb und auf C_ω:

$$|P_{\nu+1}(x)| < \frac{G}{(\omega')^\nu}. \tag{9}$$

Daraus folgt schon, daß die Reihe auf der rechten Seite von (7) für alle x innerhalb und auf C_ω und für alle τ, die der Bedingung

$$0 \leqq |\tau| \leqq \omega' < \omega$$

genügen, *gleichmäßig* konvergiert; hievon werden wir später bei Anwendung des Cauchyschen Integralsatzes Gebrauch machen.

Zu einer in gewisser Hinsicht genaueren Aussage, als sie in Ungleichung (9) enthalten ist, und zugleich zu einer *unteren* Grenze für $|P_\nu(x)|$ gelangt man folgendermaßen:

Man betrachte in dem Gebiete $|t| < 1 + \varrho$, $|\tau| < 1 + \varrho$ die Funktion der beiden unabhängigen Variabeln t und τ:

$$\frac{d\psi(\tau)}{d\tau} \frac{1}{\psi(\tau) - \psi(t)}. \tag{10}$$

Gibt man der Variablen τ einen endlichen festen Wert, dem absoluten Betrage nach $< 1 + \varrho$, so hat (10) als Funktion von t betrachtet, im Punkte $t = \tau$ einen einfachen Pol, während die Funktion von t:

$$\frac{d\psi(\tau)}{d\tau} \frac{1}{\psi(\tau) - \psi(t)} - \frac{1}{\tau - t} \tag{10b}$$

für irgend ein τ $(0 < |\tau| < 1 + \varrho)$ und alle $|t| < 1 + \varrho$ regulären Verhaltens ist.

In ihrer Abhängigkeit von τ betrachtet ist die Funktion (10b) überall regulär außer im Nullpunkte, wo sie einen einfachen Pol mit dem Residuum -1 hat, was auch t sein möge $(0 < |t| < 1 + \varrho)$. Die Funktion der zwei Variabeln t und τ

$$\frac{d\psi(\tau)}{d\tau} \frac{1}{\psi(\tau) - \psi(t)} - \frac{1}{\tau - t} + \frac{1}{\tau} \tag{10c}$$

ist daher regulär in dem Kontinuum $|\tau| < 1 + \varrho$, $|t| < 1 + \varrho$*), also eine nur positive Potenzen enthaltende Reihe

$$\mathfrak{P}(t, \tau) = \sum_0^\infty{}_\mu \mathfrak{P}_{\mu+1}(t)\, \tau^\mu; \tag{10d}$$

es ist also

$$\frac{d\psi(\tau)}{d\tau} \cdot \frac{1}{\psi(\tau) - \psi(t)} = \frac{1}{\tau - t} - \frac{1}{\tau} + \mathfrak{P}(t, \tau). \tag{11}$$

*) Bedenken könnte nur noch der Punkt $t = \tau = 0$ erregen; diese fallen aber weg, da bei Funktionen mehrerer Variabler isolierte Singularitäten nicht auftreten können.

Setzt man ferner $|t| > |\tau|$ voraus, so gilt die Entwickelung:

$$(12) \qquad \frac{d\psi(\tau)}{d\tau} \cdot \frac{1}{\psi(\tau) - \psi(t)} = -\frac{1}{\tau} + \sum_0^\infty{}^{\mu} \left(-\frac{1}{t^{\mu+1}} + \mathfrak{P}_{\mu+1}(t) \right) \tau^\mu.$$

Substituiert man hier auf der linken Seite x für $\psi(t)$ — x ist ein Punkt außerhalb $C_{1+\varrho}$ —, und vergleicht die Potenzen von τ in dieser Entwickelung mit derjenigen der oben gefundenen Formel:

$$(7) \qquad \frac{d\psi(\tau)}{d\tau} \frac{1}{\psi(\tau) - x} = -\frac{1}{\tau} + \sum_0^\infty{}^{\mu} P_{\mu+1}(x)\, \tau^\mu,$$

so findet man

$$(13) \qquad P_\mu(x) = -\frac{1}{t^\mu} + \mathfrak{P}_\mu(t) \quad (0 < |t| < 1 + \varrho;\ x \text{ außerhalb } C_{1+\varrho}).$$

Da die Funktion $\mathfrak{P}(t, \tau)$ für alle $|t| < 1 + \varrho$, $|\tau| < 1 + \varrho$ regulären Verhaltens ist, so existiert für alle t und τ eines Bereiches T, der ganz innerhalb dieses Kontinuums liegt, eine endliche obere Grenze G, sodaß

$$(14) \qquad |\mathfrak{P}(t, \tau)| < G$$

ist.

Man kann T so wählen, daß das Gebiet $|t| < 1 + \varrho'$, $|\tau| < 1 + \varrho'$, wenn nur $\varrho' < \varrho$, ganz innerhalb T liegt. Aus dem Cauchyschen Koeffizientensatze schließt man daher:

$$(15) \qquad |\mathfrak{P}_\mu(t)| < \frac{G}{(1 + \varrho')^\mu}.$$

Wenn ω um eine endliche Zahl kleiner als $1 + \varrho$ ist, so kann man sich ϱ' so gewählt denken, daß auch $\omega < 1 + \varrho' < 1 + \varrho$ ist, daß also $\alpha = \frac{\omega}{1 + \varrho'}$ ein echter Bruch ist. Dies vorausgesetzt folgt aus Gleichung (13) und Ungleichung (15) für alle x auf C_ω:

$$(16) \qquad \left(\frac{1}{\omega}\right)^\mu - \frac{G}{(1 + \varrho')^\mu} < |\mathfrak{P}_\mu(x)| < \left(\frac{1}{\omega}\right)^\mu + \frac{G}{(1 + \varrho')^\mu}$$

oder

$$(17) \qquad \left(\frac{1}{\omega}\right)^\mu (1 - G\alpha^\mu) < |P_\mu(x)| < \left(\frac{1}{\omega}\right)^\mu (1 + G\alpha^\mu).$$

Wählt man nun μ so groß, daß $G\alpha^\mu$ kleiner als $\delta\omega$ wird, wo δ eine gegebene beliebig kleine positive Zahl bedeutet, so erhält man, wenn man aus den drei Gliedern der Ungleichung (17) die μ^{te} Wurzel zieht und die für positive $\varepsilon < 1$ giltigen Formeln $1 - \varepsilon < (1 - \varepsilon)^{\frac{1}{\mu}}$; $(1 + \varepsilon)^{\frac{1}{\mu}} < 1 + \varepsilon$ beachtet:

(18) $$\frac{1}{\omega} - \delta < |P_\mu(x)|^{\frac{1}{\mu}} < \frac{1}{\omega} + \delta$$

d. h. aber

(19) $$\lim_{\mu=\infty} \sqrt[\mu]{|P_\mu(x)|} = \frac{1}{\omega}$$ *gleichmäßig für alle x auf C_ω* $(0 < \omega < 1 + \varrho)$.

Daneben beachte man Ungleichung (9), die sofort zur folgenden Aussage führt:

(20) $$\overline{\lim_{\mu=\infty}} \sqrt[\mu]{|P_\mu(x)|} < \frac{1}{\omega}$$ *für irgend ein x im Innern von C_ω.*

§ 2.

Es folgt nun eine Untersuchung von Reihen

(21) $$\sum a_\nu P_\nu(x).$$

Die Gleichung (19) und Ungleichung (20) zeigen schon, daß eine solche Reihe die wesentlichsten Konvergenzeigenschaften mit der Potenzreihe

$$\sum a_\nu x^\nu$$

gemein haben muß. Ich kann mich daher beim Beweise der folgenden Sätze kurz fassen, da dieselben großenteils nur Übertragungen von in der Theorie der Taylorschen Reihe geläufigen Schlüssen sind.

Es kommt vor allem auf den $\overline{\lim} \sqrt[\nu]{|a_\nu|}$ an. Erreicht oder überschreitet derselbe den Wert $1 + \varrho$, so läßt sich über die Konvergenz der Reihe $\sum a_\nu P_\nu(x)$ einstweilen gar nichts aussagen. Ist derselbe aber gleich ω, wo $\omega < 1 + \varrho$ ist, so folgt aus den Relationen (19) und (20) sofort*):

Die Reihe $\sum a_\nu P_\nu(x)$ konvergiert absolut und gleichmäßig in jedem Gebiete, das ganz innerhalb C_ω liegt und stellt also daselbst eine analytische Funktion dar; außerhalb C_ω divergiert $\sum a_\nu P_\nu(x)$, während sich über das Verhalten auf C_ω ohne spezielle Annahme über die a_ν keine Aussagen machen lassen (genau wie bei der gewöhnlichen Potenzreihe).

Umgekehrt läßt sich auch jede innerhalb C_ω reguläre analytische Funktion $F(x)$ in eine Reihe $\sum a_\nu P_\nu(x)$ entwickeln.

Zum Beweise, der unter der Annahme $\omega = 1$ geführt werden möge, gehe man auf die Formel (5) p. 390 zurück:

(5) $$F(x) = \frac{1}{2\pi i} \int_{K_{1+\sigma}} \frac{F(\psi\tau)}{\psi(\tau) - x} \frac{d\psi(\tau)}{d\tau} d\tau.$$

*) cf. Hadamard, la série de Taylor p. 18.

Nach dem p. 392 Bewiesenen konvergiert für irgend ein x im Innern von $C_{1+\sigma}$ und für alle τ vom absoluten Betrage $1+\sigma$ die Reihe

$$\frac{1}{\psi(\tau)-x}\frac{d\psi(\tau)}{d\tau} = -\frac{1}{\tau} + \sum_0^\infty P_{\nu+1}(x)\,\tau^\nu \tag{7}$$

gleichmäßig.

Setzt man daher die Reihe auf der rechten Seite von (7) in (5) ein, so darf man gliedweise integrieren und erhält:

$$F(x) = \sum_0^\infty a_\nu P_\nu(x), \tag{22}$$

$$a_\nu = \frac{1}{2\pi i}\int_{K_{1+\sigma}} F(\psi(\tau))\,\tau^{\nu-1}\,d\tau \tag{23}$$

zunächst für alle x im Innern von $C_{1+\sigma}$; doch gilt die Entwickelung (22) auch für alle x im Innern von $C\,(=C_1)$; denn einerseits kann σ beliebig klein gewählt werden, andrerseits ist der Wert des Integrals (23) für a_ν unabhängig davon, über welchen Kreis $K_{1+\sigma}$ $(0<\sigma<\varrho)$ es geführt wird; denn die Integranden sind in dem Kreisringe $1<|\tau|<1+\varrho$ reguläre analytische Funktionen von τ.

Ferner behaupte ich: *Die innerhalb C_ω $(0<\omega<1+\varrho)$ giltige Entwickelung*

$$F(x) = \sum_0^\infty a_\nu P_\nu(x) \tag{22}$$

ist nur auf eine Weise möglich; d. h. besteht Gleichung (22) und gleichzeitig Gleichung:

$$F(x) = \sum_0^\infty a_\nu' P_\nu(x), \tag{22b}$$

so folgt daraus

$$a_\nu = a_\nu' \qquad (\nu = 0,1,2,\cdots). \tag{24}$$

Führt man in (22) und (22b) für x vermöge der Substitution

$$x = \psi(t) = \frac{a}{t} + \mathfrak{P}(t) \qquad (\omega<|t|<1+\varrho)$$

die Variable t ein, wodurch $P_\nu(x)$ nach (13) p. 393 übergeht in $\frac{-1}{t^\nu} + \mathfrak{P}_\nu(t)$, so erhält man durch Gleichsetzen der rechten Seiten von (22) und (22b) die Identität:

$$\sum_0^\infty a_\nu\left(\frac{-1}{t^\nu} + \mathfrak{P}_\nu(t)\right) = \sum_0^\infty a_\nu'\left(\frac{-1}{t^\nu} + \mathfrak{P}_\nu(t)\right) \qquad (\omega<|t|<1+\varrho). \tag{25}$$

Beachtet man noch, daß die Reihen

$$\sum a_\nu P_\nu(x) = \sum a_\nu \left(-\frac{1}{t^\nu} + \mathfrak{P}_\nu(t)\right)$$

und

$$\sum a_\nu' P_\nu(x) = \sum a_\nu' \left(\frac{-1}{t^\nu} + \mathfrak{P}_\nu(t)\right)$$

im wesentlichen wie Potenzreihen, also jedenfalls für irgend welche t von gleichem zwischen ω und $1+\varrho$ liegenden absoluten Betrage *gleichmäßig* konvergieren, so lehrt der Weierstraßsche Doppelreihensatz, daß man die rechte und linke Seite von (25) je in eine Laurentsche Reihe

$$\sum_{-\infty}^{+\infty} A_\nu t^\nu \tag{26}$$

entwickeln darf, und da die Entwickelung in eine Laurentsche Reihe bekanntlich nur auf eine Weise möglich ist, müssen die Koeffizienten A_ν die gleichen sein, ob man nun durch Entwickelung der rechten oder der linken Seite von (25) zu (26) gelangt ist. Nun ergibt aber die linke Seite von (25)

$$\begin{aligned} A_{-\nu} &= -a_\nu, \quad \text{die rechte dagegen} \\ A_{-\nu} &= -a_\nu', \end{aligned} \tag{26b}$$

woraus die behauptete Identität $a_\nu = a_\nu'$ folgt.

Daraus schließt man weiter:

Die durch die im Innern von C_ω konvergente außerhalb divergente Entwickelung $\sum a_\nu P_\nu(x)$ dargestellte Funktion $F(x)$ hat auf C_ω mindestens eine singuläre Stelle. Denn wäre dies nicht der Fall, so wäre $F(x)$ im Innern einer C_ω ganz umschließenden Kurve $C_{\omega'}$ $(\omega' < \omega)$ regulär und könnte daher nach dem Satze p. 394 durch eine innerhalb $C_{\omega'}$ konvergente Reihe $\sum a_\nu' P_\nu(x)$ dargestellt werden, die nach dem vorigen Satze mit der Reihe $\sum a_\nu P_\nu(x)$ identisch sein müßte, was der Voraussetzung, daß $\sum a_\nu P_\nu(x)$ nur im Innern von C_ω konvergiert, widerstreitet.

Die Ableitungen der Funktion $F(x) = \sum a_\nu P_\nu(x)$ können durch gliedweise Differentiation erhalten werden:

$$F'(x) = \sum a_\nu P_\nu'(x); \qquad F''(x) = \sum a_\nu P_\nu''(x) \quad \text{usw.} \tag{27}$$

Zum Beweise beachte man, daß

$$F'(x) = \frac{1}{2\pi i} \int_{C_{1+\sigma}} \frac{F(z)}{(z-x)^2}\, dz = \frac{1}{2\pi i} \int_{K_{1+\sigma}} \frac{F(\psi(\tau))}{(\psi(\tau)-x)^2} \frac{d\psi(\tau)}{d\tau}\, d\tau$$

ist, und daß für irgend ein x im Innern von $C_{1+\sigma}$ und für alle τ auf $K_{1+\sigma}$ die Reihe

$$(28) \qquad \frac{d\psi(\tau)}{d\tau}\cdot\frac{1}{(\psi(\tau)-x)^2}=\frac{d}{dx}\left(\frac{d\psi(\tau)}{d\tau}\cdot\frac{1}{\psi(\tau)-x}\right)=\sum\frac{dP_{\nu+1}(x)}{dx}\tau^\nu$$

gleichmäßig konvergiert. Man erhält daher für die Funktion $F'(x)$ eine nach Polynomen $P_\nu'(x)$ fortschreitende Reihe mit den Koeffizienten a_ν, analog für $F''(x)$ usw. Jedem der vorhergehenden Sätze über Reihen $\sum a_\nu P_\nu(x)$ steht ein übereinstimmender über Reihen

$$\sum a_\nu P_\nu'(x),\quad \sum a_\nu P_\nu''(x) \text{ usw.}$$

zur Seite.

Hiermit ist übrigens die Möglichkeit von Polynomenfolgen, die zu derartigen Entwickelungen Anlaß geben, noch lange nicht erschöpft. Bedeutet

$$(29) \qquad \mathfrak{P}(\tau)=c_0+c_1\tau+c_2\tau^2+\cdots,$$

eine beliebige für $|\tau|<1+\varrho$ konvergierende Potenzreihe, so hätte man z. B. auch

$$(30) \qquad \tau\cdot\mathfrak{P}(\tau)\frac{d\psi(\tau)}{d\tau}\cdot\frac{1}{\psi(\tau)-x}$$

als erzeugende Funktion gewisser Polynome

$$(31) \qquad \Pi_\nu(x)=c_0P_\nu(x)+c_1P_{\nu-1}(x)+\cdots+c_{\nu-1}P_1(x)+c_\nu P_0$$

wählen können, in derselben Weise wie oben $\frac{d\psi(\tau)}{d\tau}\cdot\frac{1}{\psi(\tau)-x}$ die erzeugende Funktion der $P_\nu(x)$ war. Die Polynome $\Pi_\nu(x)$ haben mit den $P_\nu(x)$ viele Eigenschaften gemein und sind insbesondere in gleicher Weise zur Entwickelung analytischer Funktionen in Reihen $F(x)=\sum\alpha_\nu P_\nu(x)$ brauchbar; doch sind hier im allgemeinen die Koeffizienten α_ν nicht eindeutig bestimmt*).

Es scheint hier vielmehr folgender Satz zu bestehen, dessen vollständiger Beweis mir allerdings noch nicht gelungen ist.

Hat $\mathfrak{P}(\tau)$ für $0<|\tau|<1+\varrho$ n Nullstellen mit den absoluten Beträgen $\omega_1, \omega_2, \cdots, \omega_n$, so gibt es gerade n von einander unabhängige**) Entwickelungen der Null in Reihen $\sum\alpha_\nu\Pi_\nu(x)$, deren Konvergenzgrenzen resp. die Kurven $C_{\omega_1}, C_{\omega_2}, \cdots, C_{\omega_n}$ sind. Im Falle also $\mathfrak{P}(\tau)$ sich auf die Form $\tau^\nu e^{\mathfrak{P}_1(\tau)}$ $(|\tau|<1+\varrho)$ bringen läßt, was z. B. für $\mathfrak{P}(\tau)=\frac{1}{\frac{d\psi(\tau)}{d\tau}}$ zutrifft,

*) Man vergleiche damit die Entwickelungen und Sätze des Herrn Frobenius, Crelles Journ. 73 (1871).

**) Definition bei Frobenius a. a. O.

wäre auch jetzt die Entwickelung einer Funktion $F(x)$ in eine Reihe $\sum \alpha_\nu \Pi_\nu(x)$ nur auf eine Weise möglich.

Endlich behaupte ich

Eine mit willkürlichen Koeffizienten a_ν, die nur der Bedingung

$$\overline{\lim} \sqrt[\nu]{|a_\nu|} = \omega < 1 + \varrho$$

zu genügen haben, angeschriebene Reihe $\sum a_\nu P_\nu(x)$ hat die Kurve C_ω zur natürlichen Grenze.

Da die mit willkürlichen Koeffizienten angeschriebene Potenzreihe $\sum a_\nu t^{-\nu}$ stets ihren Konvergenzkreis zur natürlichen Grenze hat, ist dieser Satz eine unmittelbare Konsequenz des folgenden:

Betrachtet man gleichzeitig die innerhalb C_ω giltige Entwickelung:

$$F(x) = \sum a_\nu P_\nu(x) \tag{32}$$

und die außerhalb K_ω konvergente Potenzreihe:

$$\Phi(t) = \sum a_\nu t^{-\nu} \tag{33}$$

und läßt man durch die Relation $x = \psi(t)$ den Kreis K_ω und die Kurve C_ω einander punktweise entsprechen, *so ist irgend ein Punkt x_0 auf C_ω dann und nur dann ein singulärer für $F(x)$, wenn der ihm entsprechende Punkt t_0 ein singulärer für $\Phi(t)$ ist.*

Und zwar entspricht einem Pole n^{ter} Ordnung ein ebensolcher, einer wesentlich singulären Stelle wieder eine wesentlich singuläre Stelle und einem Verzweigungspunkte n^{ter} oder unendlich hoher Ordnung wieder ein solcher n^{ter} resp. unendlich hoher Ordnung.

Der Beweis dieses Satzes ergibt sich wieder durch die Einführung der Variabeln t in $\sum a_\nu P_\nu(x)$ vermöge der Substitution

$$x = \frac{a}{t} + \mathfrak{P}(t).$$

Man erhält (cf. p. 396):

$$\sum a_\nu P_\nu(x) = -\sum a_\nu t^{-\nu} + \mathfrak{P}_1(t) = -\Phi(t) + \mathfrak{P}_1(t), \tag{34}$$

wo $\mathfrak{P}_1(t)$ für $|t| < 1 + \varrho$ und $\Phi(t)$ für $|t| > \omega$ konvergiert.

Liegt t_0 auf K_ω und ist $x_0 = \psi(t_0)$, so gilt in einem gewissen Kreise um den Punkt $t = t_0$ die Entwickelung

$$x - x_0 = \alpha_1(t-t_0) + \alpha_2(t-t_0)^2 + \cdots \tag{35}$$

($\alpha_1 \neq 0$, da die Konformität der Abbildung im Bereiche der Kurve C_ω nicht unterbrochen ist).

Da $\mathfrak{P}_1(t)$ für $|t| < 1 + \varrho$ konvergiert, so kann man $\mathfrak{P}_1(t)$ jedenfalls nach Potenzen von $(t-t_0)$ entwickeln (da ja $|t_0| = \omega < 1 + \varrho$): $\mathfrak{P}_1(t) = \mathfrak{P}_1(t|t_0)$.

Das gleiche gilt von $\Phi(t)$, wenn der Punkt $t = t_0$ ein regulärer für $\Phi(t)$ ist. Es gilt also in letzterem Falle (s. 34):

$$F(x) = \sum a_\nu P_\nu(x) = \mathfrak{P}_2(t-t_0). \tag{36}$$

Nun läßt sich die Gleichung (35) nach $(t-t_0)$ auflösen, wodurch man erhält:

$$t - t_0 = \beta_1(x-x_0) + \beta_2(x-x_0)^2 + \cdots \tag{37}$$

für eine gewisse Umgebung des Punktes $x = x_0$ $\left(\beta_1 = \frac{1}{\alpha_1} \text{ usw.}\right)$.

Führt man diesen Wert von $t - t_0$ in $\mathfrak{P}_2(t-t_0)$ (36) ein, so erhält man für $F(x) = \sum a_\nu P_\nu(x)$ eine nach steigenden Potenzen von $(x-x_0)$ fortschreitende in einem gewissen Bezirke konvergente Reihe. Man sieht also $x = x_0$ ist für $F(x)$ ein regulärer Punkt, falls es $t = t_0$ für $\Phi(t)$ ist,

Geht man umgekehrt von der Voraussetzung aus, daß sich $F(x)$ nach steigenden Potenzen von $(x-x_0)$, also auch von $t - t_0$ entwickeln läßt, so ergibt sich das gleiche von $\Phi(t) = -F(x) + \mathfrak{P}_1(t \mid t_0)$.

Demnach sind die Punkte t_0 für $\Phi(t)$ und x_0 für $F(x)$ gleichzeitig regulär oder singulär. Ist ein ganzes Stück des Kreises K_ω regulär oder singulär, so gilt das gleiche von dem entsprechenden Stücke der Kurve C_ω.

Statt wie oben geschehen anzunehmen, daß $\Phi(t)$ sich im Punkte $t = t_0$ regulär verhält, hätte man eine Entwickelung der Form

$$\sum_{-n}^{\infty} c_\nu(t-t_0)^\nu \text{ oder der Form } \sum_{-\infty}^{+\infty} c_\nu(t-t_0)^\nu \text{ oder eine Reihe } \sum c_\nu(t-t_0)^{\frac{\nu}{n}} \tag{38}$$

voraussetzen können und hätte genau wie oben für $F(x)$ Reihen

$$\sum_{-n}^{\infty} c_\nu'(x-x_0)^\nu \quad \text{resp.} \quad \sum_{-\infty}^{+\infty} c_\nu'(t-t_0)^\nu \quad \text{resp.} \quad \sum c_\nu'(t-t_0)^{\frac{\nu}{n}} \tag{39}$$

gefunden und umgekehrt. Man schließt daraus, daß nur gleichzeitig $F(x)$ in x_0 und $\Phi(t)$ in t_0 einen Pol oder einen Verzweigungspunkt n^{ter} Ordnung oder eine wesentlich singuläre Stelle haben können.

Falls endlich $t = t_0$ ein isolierter Verzweigungspunkt unendlich hoher Ordnung für $\Phi(t)$ ist, so bleibt für $F(x)$ nur das gleiche Verhalten an der Stelle $x = x_0$ übrig. Damit ist der in Rede stehende Satz bewiesen*).

*) Es läßt sich noch zeigen, daß wenn $\Phi(t)$ in einem Punkte des Konvergenzkreises K_ω konvergiert, $F(x)$ in dem entsprechenden Punkte C_ω ebenfalls konvergiert und umgekehrt (cf. (13) und (15)). Auch der Abelsche Satz und dessen von Herrn Stolz gegebene Verallgemeinerung über die gleichmäßige Konvergenz bis in die Grenze hinein lassen sich ohne besondere Schwierigkeit übertragen (Abel, Oeuvres I p. 223; Stolz, Schlömilchs Z. 29, p. 127). Ich unterdrücke der Kürze halber diese Beweise.

Beispiele. Wir haben Ausdrücke der Form

$$\frac{d\psi(\tau)}{d\tau}\cdot\frac{1}{\psi(\tau)-x}+\frac{1}{\tau}$$

wo $\psi(t)=\frac{a}{\tau}+\mathfrak{P}(\tau)$ ist, nach Potenzen von τ zu entwickeln. Der einfachste Fall wäre $\mathfrak{P}(\tau)=\text{const.}=b$ zu setzen; $z=\psi(\tau)$ ist dann eine lineare Funktion von τ und das Innere des Einheitskreises der τ-Ebene wird auf das Äußere eines Kreises K mit dem Mittelpunkte $x=b$ der x-Ebene konform abgeleitet. Die auf diese Weise sich ergebende polynomische Entwickelung für das Innere von K ist mit der Taylorschen Reihe identisch; es ist nämlich:

$$\frac{d\psi(\tau)}{d\tau}\cdot\frac{1}{\psi(\tau)-x}+\frac{1}{\tau}=-\frac{\frac{x-b}{a}}{1-\tau\frac{x-b}{a}},$$

also

$$P_\nu(x)=-\frac{(x-b)^\nu}{a^\nu}.$$

Betrachtet man dagegen den nächst einfachen Ansatz:

$$z=\psi(\tau)=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{\tau}+\tau\right),$$

so entspricht dem Innern der Kreise $|\tau|=\text{const}\ (<1)$ das Äußere von konfokalen Ellipsen der z-Ebene mit den Brennpunkten $+1$ und -1; setzt man also

$$f(\tau)=\frac{d\psi(\tau)}{d\tau}\cdot\frac{1}{\psi(\tau)-x}+\frac{1}{\tau}=\sum_0^\infty P_{\nu+1}(x)\,\tau^\nu,$$

so läßt sich jede im Inneren einer Ellipse mit den Brennpunkten ± 1 reguläre analytische Funktion in eine Reihe $\sum_0^\infty a_\nu P_\nu(x)$ entwickeln. Diese Polynome $P_\nu(x)$ lassen sich leicht bestimmen. Es ist

$$f(\tau)=\frac{2\tau-2x}{1-2x\tau+\tau^2}=\frac{1}{\tau-(x+\sqrt{x^2-1})}+\frac{1}{\tau-(x-\sqrt{x^2-1})}$$

$$f^{(\nu)}(\tau)=\frac{(-1)^\nu\nu!}{(\tau-(x+\sqrt{x^2-1}))^{\nu+1}}+\frac{(-1)^\nu\cdot\nu!}{(\tau-(x-\sqrt{x^2-1}))^{\nu+1}}.$$

$P_\nu(x)$ ist nach Definition gleich $\frac{f^{(\nu-1)}(0)}{(\nu-1)!}$, also

$$P_\nu(x)=\frac{-1}{(x+\sqrt{x^2-1})^\nu}+\frac{-1}{(x-\sqrt{x^2-1})^\nu}$$
$$=-[(x-\sqrt{x^2-1})^\nu+(x+\sqrt{x^2-1})^\nu]^*).$$

*) In der Entwickelung von Funktionen, die in einer Ellipse mit den Brennpunkten ± 1 regulär sind, nach diesen Polynomen ist Herr Picard auf anderem

Setzt man hierin $x = \cos\varphi$, so ist $P_\nu(x) = -2\cos\nu\varphi$; die Gleichung $P_\nu(x) = 0$ hat also ν reelle Wurzeln, die sämtlich zwischen -1 und $+1$ liegen. Die Entwickelung von $P_\nu(x)$ nach Potenzen von x lautet:

für gerades ν:
$$P_\nu(x) = (-1)^{\frac{\nu+2}{2}} 2\left(1 + \frac{x^2}{2!}(-\nu^2) + \frac{x^4}{4!}(-\nu^2)(2^2-\nu^2) + \cdots + \frac{x^\nu}{\nu!}(-\nu^2)(2^2-\nu^2)\cdots(\overline{\nu-2}^2-\nu^2)\right),$$

für ungerades ν:
$$P_\nu(x) = (-1)^{\frac{\nu+1}{2}} 2\nu\left(\frac{x}{1} + \frac{x^3}{3!}(1-\nu^2) + \frac{x^5}{5!}(1-\nu^2)(3^2-\nu^2) + \cdots + \frac{x^\nu}{\nu!}(1-\nu^2)(3^2-\nu^2)\cdots(\overline{\nu-2}^2-\nu^2)\right).$$

Wählt man dagegen als erzeugende Funktion (s. die Bemerkung p. 398/399):

$$\frac{1}{2\tau}\,\frac{1}{\psi(\tau)-x} = \frac{1}{1-2\tau x+\tau^2} = \frac{1}{2\sqrt{x^2-1}}\left(\frac{1}{\tau-(x-\sqrt{x^2-1})} - \frac{1}{\tau-(x+\sqrt{x^2-1})}\right) = \sum_0^\infty \Pi_\nu(x)\,\tau^\nu,$$

so erhält man

$$\Pi_\nu(x) = \frac{1}{2\sqrt{x^2-1}}\left((x+\sqrt{x^2-1})^{\nu+1} - (x-\sqrt{x^2-1})^{\nu+1}\right) = \frac{\sin(\nu+1)\varphi}{\sin\varphi},$$

wobei wieder $x = \cos\varphi$ gesetzt ist. Die Koeffizienten $\Pi_\nu(x)$ s. bei Schlömilch, Alg. An. p. 245 (2. Aufl.).

Die Funktion $\frac{1}{\sqrt{2\tau(\psi(\tau)-x)}} = \frac{1}{\sqrt{1-2\tau x+\tau^2}}$ ist bekanntlich die erzeugende Funktion der Legendreschen Polynome, nach denen man auch Funktionen, die innerhalb einer der obigen konfokalen Ellipsen regulär sind, entwickeln kann. Diese Polynome subsumieren sich zunächst nicht unter die vorausgeschickte allgemeine Theorie. Inwieweit sich dies trotzdem durch Modifikation und Erweiterung dieser Theorie erreichen läßt, möchte ich einer späteren Untersuchung vorbehalten.

Als letztes Beispiel sollen diejenigen Polynome $P_\nu(x)$ betrachtet werden, die zu Lemniskaten gehören, deren Brennpunkte wieder die Punkte $x = \pm 1$ seien; Die Rolle der Kurve $C_{1+\varrho}$ wird hier von der Lemniskate mit Doppelpunkt übernommen, deren Gleichung lautet:

$$((\xi-1)^2+\eta^2)\,((\xi+1)^2+\eta^2) = 1.$$

Die Funktion $\psi(\tau)$ ist jetzt die folgende:

(1) $$z = \psi(\tau) = \frac{1}{\tau}\sqrt{1+\tau^2} = \frac{1}{\tau}\left(1 + \frac{\tau^2}{2} - \frac{1\cdot 1}{1\cdot 2}\left(\frac{\tau^2}{2}\right)^2 + \frac{1\cdot 1\cdot 3}{1\cdot 2\cdot 3}\left(\frac{\tau^2}{2}\right)^3 - + \cdots\right).$$

Wege gelangt, traité d'an. t. II, pag. 288; cf. auch Heine, Kugelfunktionen, Bd. I, pag. 198.

Die Gleichung (1) nach τ aufgelöst gibt:

$$\tau = \frac{1}{\sqrt{(z+1)(z-1)}}; \tag{2}$$

den Kreisen $|\tau| = \text{const.}$ entsprechen also in der z-Ebene Kurven von der Eigenschaft, daß das Produkt der Entfernungen $\overline{1z}$, $-\overline{1z}$ gleich einer Konstanten ist; das sind aber die obigen Lemniskaten.

Wir haben nun folgende Funktion nach Potenzen von τ zu entwickeln:

$$\begin{aligned}\frac{d\psi(\tau)}{d\tau}\frac{1}{\psi(\tau)-x}+\frac{1}{\tau} &= \frac{\frac{2\tau}{\sqrt{1+\tau^2}}-x}{\sqrt{1+\tau^2}-\tau x}\\ &= \left(\frac{2\tau}{1+\tau^2}-\frac{x}{\sqrt{1+\tau^2}}\right)\cdot\frac{1}{1-\frac{\tau x}{\sqrt{1+\tau^2}}}\\ &= 2\sum_1^\infty \tau^\nu x^{\nu-1}(1+\tau^2)^{\frac{-\nu-1}{2}}-\sum_0^\infty \tau^\nu x^{\nu+1}(1+\tau^2)^{\frac{-\nu-1}{2}}.\end{aligned}$$

Indem man alle hier auftretenden Potenzen von $(1+\tau)^2$ nach der binomischen Reihe entwickelt, und dann die Koeffizienten gleicher Potenzen von τ zusammenfaßt, erhält man:

$$\begin{aligned}-P_{2\nu}(x) &= x^{2\nu} + x^{2\nu+2}\left(\binom{-\nu+1}{1}-2\right)+x^{2\nu-4}\left(\binom{-\nu+2}{2}-2\binom{-\nu+1}{1}\right)\\ &\quad + x^{2\nu-6}\left(\binom{-\nu+3}{3}-2\binom{-\nu+2}{2}\right)\\ &\quad + \cdots + x^2\left(\binom{-1}{\nu-1}-2\binom{-2}{\nu-2}\right)-2\binom{-1}{\nu-1}\\ &= x^{2\nu}+\sum_1^\nu (-1)^k\frac{\nu+k}{\nu}\binom{\nu}{k}x^{2\nu-2k}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}-P_{2\nu+1}(x) &= x^{2\nu+1}+x^{2\nu-1}\left(\binom{\frac{-2\nu+1}{2}}{1}-2\right)+x^{2\nu-3}\left(\binom{\frac{-2\nu+3}{2}}{2}-2\binom{\frac{-2\nu+1}{2}}{1}\right)\\ &\quad + x^{2\nu-5}\left(\binom{\frac{-2\nu+5}{2}}{3}-2\binom{\frac{-2\nu+3}{2}}{2}\right)\\ &\quad + \cdots + x^3\left(\binom{\frac{-3}{2}}{\nu-1}-2\binom{\frac{-5}{2}}{\nu-2}\right)+x\left(\binom{-\frac{1}{2}}{\nu}-2\binom{-\frac{3}{2}}{\nu-1}\right)\\ &= x^{2\nu+1}+\sum_1^\nu (-1)^k\frac{2\nu+2k+1}{2\nu+1}\,\frac{(2\nu+1)(2\nu-1)(2\nu-3)\cdots(2\nu-2k+3)}{2^k\cdot k!}x^{2\nu+1-2k}\end{aligned}$$

Zu einfacher gebauten Ausdrücken gelangt man, wenn man von der Bemerkung p. 398/399 Gebrauch machend als erzeugende Funktion die folgende benutzt:

$$\frac{\psi(\tau)}{\psi(\tau)-x} = \frac{1}{1-\frac{\tau x}{\sqrt{1+\tau^2}}} = \sum_0^\infty x^\nu \tau^\nu (1+\tau^2)^{\frac{-\nu}{2}}.$$

Es ergibt sich

$$\Pi_\nu(x) = x^\nu + x^{\nu-2}\binom{\frac{-\nu+2}{2}}{1} + x^{\nu-4}\binom{\frac{-\nu+4}{2}}{2} + \cdots.$$

§ 3.

Bisher spielte der Punkt ∞ als Pol der Polynome eine ausgezeichnete Rolle; durch die Substitution $\frac{1}{z-\alpha}\Big|z$ kann man dieselbe einem beliebigen im Endlichen gelegenen Punkte α zuerteilen; man gelangt so ohne weiteres zu folgender Verallgemeinerung:

C sei eine geschlossene reguläre analytische Kurve auf der Riemannschen Kugelfläche, S eines der beiden Continua, in welche die Kugel durch C geteilt wird, α irgend ein Punkt des andern Continuums; dann läßt sich jede in S reguläre analytische Funktion $F(x)$ in eine Reihe

$$F(x) = \sum_0^\infty a_\nu P_\nu\left(\frac{1}{x-\alpha}\right)$$

entwickeln.

Ferner besteht folgender Satz:

Wenn das Gebiet S besteht aus der Kugelfläche mit Ausnahme von zwei Continuen S_1 und S_2, die von den regulären analytischen Kurven C_1 und C_2 begrenzt sind, und wenn α_1 ein beliebiger Punkt von S_1, α_2 ein solcher von S_2 ist, so läßt sich jede in S reguläre analytische Funktion in der Form

$$\sum_\nu a_\nu^{(1)} P_\nu^{(1)}\left(\frac{1}{x-\alpha_1}\right) + \sum_\nu a_\nu^{(2)} P_\nu^{(2)}\left(\frac{1}{x-\alpha_2}\right)$$

darstellen. Ein neuer Beweis ist nicht nötig, da nach dem Cauchyschen Satze

$$F(x) = \int_{C_1} \frac{F(z)}{z-x}\,dz + \int_{C_2} \frac{F(z)}{z-x}\,dz,$$

wo die Integrationen so zu nehmen sind, daß das Gebiet S zur linken bleibt; in den beiden Integralen ist nur das Differential $\frac{dz}{z-x}$ ebenso wie oben zu transformieren.

Genau die entsprechende Entwickelung gilt natürlich, wenn das Regularitätsgebiet S von $F(x)$ aus einem n fach zusammenhängenden Continuum besteht.

Eine Erweiterung der Theorie dieses Aufsatzes nach einer anderen Richtung hin läßt sich bewerkstelligen, indem man die bisherige wesentliche Voraussetzung fallen läßt, daß die Funktion $\psi(\tau)$ welche das Äußere der gegebenen Kurve C auf das Innere des Einheitskreises abbildet, auf dem letzteren keinen singulären Punkt habe.

Diese Voraussetzung war bisher eine wesentliche. Falls nämlich — um ein ganz extremes Beispiel anzuführen — $\psi(\tau)$ sich nicht über den Einheitskreis festsetzen läßt, während die darzustellende Funktion die Kurve C zur natürlichen Grenze hat, so versagt zwar durchaus nicht die Definition der Polynome $P_\nu(x)$, wohl aber vollständig die durch (23) gegebene Darstellung der a_ν. Es scheint mir nun, daß man durch Kontinuitätsbetrachtungen, indem man $\psi(\tau)$ durch passend gewählte Funktionen approximiert und dann zur Grenze übergeht, auch im allgemeinsten Falle die wichtigsten ausgezeichneten Eigenschaften der Reihen $\sum a_\nu P_\nu(x)$ beweisen kann.

Doch will ich mit Verzicht auf diese Eigenschaften hier nur zeigen, daß eine Funktion $F(x)$, die in einem von irgend einer stetigen sich selbst nicht schneidenden geschlossenen Kurve C begrenzten Gebiete S sich regulär verhält, in eine Reihe von Polynomen entwickelt werden kann, welche in jedem Gebiete, das ganz innerhalb S liegt, gleichmäßig gegen $F(x)$ konvergiert.

Man betrachte zu diesem Zwecke eine unendliche Reihe geschlossener Kurven $C_1, C_2, \cdots$ von folgenden Eigenschaften:

1) Jede Kurve C_i besteht aus einem einzigen regulären analytischen Zuge. (Das von C_i begrenzte Gebiet möge S_i heißen.)

2) C_{i+1} verläuft ganz außerhalb C_i.

3) $\lim_{i=\infty} C_i = C$*).

Die in S_i giltige Entwickelung der in S regulären analytischen Funktion $F(x)$ laute:

$$F(x) = \sum_0^\infty{}_\nu a_\nu^{(i)} P_\nu^{(i)}(x) \qquad \text{(cf. p. 394)}.$$

*) Es ist wohl nicht nötig, diese von selbst verständliche Ausdrucksweise durch Anschreiben einiger Ungleichungen zu präzisieren; die Existenz der oben verlangten Kurven C_i läßt sich auf verschiedene Weisen einsehen; man beachte z. B. daß Herr Jordan (cours d'an. I, p. 92ff. (1893)) die Kurve C durch ganz im Innern derselben verlaufende Polygone approximiert; das Innere (oder auch das Äußere) eines solchen Polygons kann nun auf das Innere des Einheitskreises der x'-Ebene abgebildet werden; das Abbild eines Kreises der x'-Ebene mit dem Radius $1 - \varepsilon$ gibt nun, falls ε genügend klein gewählt ist, und auch das Polygon schon nahe genug an der Kurve C verläuft eine Approximation der letzteren von der gewünschten Art.

Ferner sei $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \cdots$ irgend eine Folge positiver der Null zustrebender Zahlen; man bestimme $m_1, m_2, \cdots$ so, daß

$$\left| F(x) - \sum_0^{m_n} a_\nu^{(n)} P_\nu^{(n)}(x) \right| < \varepsilon_n \tag{1}$$

ist für alle x innerhalb S_{n-1}. Es sei

$$H_n(x) = \sum_0^{m_n} a_\nu^{(n)} P_\nu^{(n)}(x) \tag{2}$$

und

$$\begin{aligned} G_1(x) &= H_1(x), \\ G_n(x) &= H_n(x) - H_{n-1}(x) \qquad (n>1); \end{aligned} \tag{3}$$

$G_n(x)$ ist ein Polynom m_n^{ten} Grades in x und

$$\sum_1^\infty G_\nu(x) \tag{4}$$

ist eine in jedem Gebiete, das ganz innerhalb C liegt, gleichmäßig gegen $F(x)$ konvergente Reihe. Denn

$$\left| F(x) - \sum_1^n G_\nu(x) \right| = |F(x) - H_n(x)| < \varepsilon_n \quad \text{(nach (1))} \tag{5}$$

für alle x in S_{n-1}; durch Wahl von n kann aber sowohl erreicht werden, daß ε_n beliebig klein wird, als daß sich S_{n-1} von S beliebig wenig unterscheidet.

Noch eine kleine Modifikation möge angebracht werden: von den drei Bedingungen, denen die Kurven C_i zu genügen haben, möge die dritte dahin abgeändert werden, daß $\lim C_i = L$ wird. L bedeutet dabei auf der Riemannschen Kugel das Stück $(1, \infty)$ der positiven reellen Achse; die Kurven C_i kann man sich als sphärische Ellipsen mit den Brennpunkten 1 und ∞ auf der Riemannschen Kugel denken.

Man sieht auf diese Weise ein, daß jede auf der längs L aufgeschnittenen Kugel reguläre analytische Funktion $F(x)$ sich in eine Reihe von Polynomen

$$F(x) = \sum_1^\infty G_\nu(x)$$

entwickeln läßt, die in jedem endlichen Gebiete, dessen Begrenzung keinen

Punkt mit L gemein hat, gleichmäßig konvergiert. Speziell möge für $F(x)$ die Funktion $\frac{1}{1-x}$ gewählt werden:

$$\frac{1}{1-x} = \sum_0^\infty {}_\nu G_\nu(x), \tag{6}$$

wo

$$G_n(x) = \sum_0^{m_n} {}_\nu \gamma_\nu^{(n)} x^\nu. \tag{7}$$

Von dieser polynomischen Entwickelung von $\frac{1}{1-x}$ ist, wie Herr Borel*) gezeigt hat, nur noch ein Schritt zu folgendem Theoreme des Herrn Mittag-Leffler**):

Von jedem singulären Punkte α der durch die Taylorsche Reihe:

$$a_0 + a_1 x + a_1 x^2 + \cdots$$

definierten Funktion $F(x)$ möge der geradlinige Schnitt L_α, dessen Verlängerung durch den Nullpunkt gehen würde, ins Unendliche geführt werden; das so entstehende Continuum heißt der zu $F(x)$ gehörige Stern. Der Satz des Herrn Mittag-Leffler behauptet nun:

$F(x)$ kann in dem Sterne dargestellt werden durch die polynomische Entwickelung

$$F(x) = \sum_0^\infty {}_\nu g_\nu(x), \tag{8}$$

die in jedem endlichen ganz innerhalb des Sterns gelegenen Gebiete gleichmäßig konvergiert, und zwar ist

$$g_n(x) = \sum_0^{m_n} {}_\nu \gamma_\nu^{(n)} a_\nu x^\nu. \tag{9}$$

(Die γ sind die gleichen wie in (7), also von den a_ν und α völlig unabhängig.)

Beweis nach Herrn Borel (a. a. O.): Nach (7) gilt, solange $y = \frac{x}{z}$ auf ein endliches ganz außerhalb der reellen Achse $1 - \infty$ der y-Ebene gelegenes Gebiet beschränkt bleibt,

$$\frac{1}{1-\frac{x}{z}} = \sum_0^\infty {}_\nu G_\nu\left(\frac{x}{z}\right). \tag{10}$$

*) Ann. éc. norm. 10 (1899).

**) acta math. 23 (1899).

Die Voraussetzung über $\frac{x}{z}$ ist bei festem z mit der folgenden identisch:

(11) x muß auf ein endliches Gebiet beschränkt bleiben, dem kein Punkt der Geraden L_z angehört (auch nicht als Begrenzung).

Ist z nicht fest, so muß diese Bedingung für alle in Betracht kommenden L_z erfüllt sein.

Ist nun innerhalb des obigen Sterns eine geschlossene Kurve C gelegen, die das Gebiet S begrenzt, so soll für S die gleichmäßige Konvergenz der Entwickelung (8) bewiesen werden. Man denke sich zu dem Zwecke eine ganz außerhalb S, aber noch ganz innerhalb des Sterns verlaufende geschlossene den Nullpunkt umschließende Kurve C_2 gezogen, sodaß die Verlängerungen der vom Nullpunkte nach den Punkten der C_2 gezogenen radii vectores über C_2 hinaus ganz außerhalb S verlaufen. Dann trifft die Bedingung (11) für alle z auf C_2 und alle x in S zu und es besteht für $n \geqq n'$ und für alle diese x und z die Ungleichung:

$$\left| \frac{1}{1-\frac{x}{z}} - \sum_1^n G_\nu\left(\frac{x}{z}\right) \right| < \varepsilon. \tag{12}$$

Nun ist aber nach dem Cauchyschen Satze:

$$F(x) = \int_{C_2} \frac{1}{1-\frac{x}{z}} \frac{F(z)}{z}\, dz. \tag{13}$$

Hier setzt man für $\frac{1}{1-\frac{x}{z}}$ die Reihe (10) ein und erhält:

$$F(x) = \sum_1^n \int_{C_2} \frac{F(z)}{z} G_\nu\left(\frac{x}{z}\right) dz + \int_{C_2} \frac{F(z)}{z} \left(\frac{1}{1-\frac{x}{z}} - \sum_1^n G_\nu\left(\frac{x}{z}\right) \right) dz. \tag{14}$$

Das Maximum von $\left|\frac{F(z)}{z}\right|$ auf C_2 sei G, die Bogenlänge von C_2 sei L, dann ist nach (12) für $n \geqq n'$:

$$\left| F(x) - \sum_1^n \int_{C_2} \frac{F(z)}{z} G_\nu\left(\frac{x}{z}\right) dz \right| < \varepsilon \int_{C_2} \left|\frac{F(z)}{z}\right| |dz| < \varepsilon \cdot G \cdot L \tag{15}$$

gleichmäßig für alle x in S. Beachtet man noch, daß

und setzt diesen Wert in (15) ein, so hat man die oben behauptete in S, d. i. in einem beliebigen ganz innerhalb des Sterns gelegenen Gebiete gleichmäßig konvergente Entwickelung:

$$F(x) = \sum_{1}^{\infty} g_\nu(x),$$

wo

$$g_n(x) = \sum_{1}^{m_n} \gamma_\nu^{(n)} a_\nu x^\nu.$$

München, April 1902.

Über eine Klasse von partiellen Differentialgleichungen der zweiten Ordnung.

Von

ERIK HOLMGREN in Upsala.

Es sei eine partielle Differentialgleichung der Form

$$\Delta u = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = f\left(x, y, u, \frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y}\right) \tag{1}$$

vorgelegt, wo $f(x, y, u, v, w)$ innerhalb eines gewissen Gebietes eine reguläre analytische Funktion der fünf Argumente ist.

In dem Falle wo f eine lineare Funktion von u, $\frac{\partial u}{\partial x}$, $\frac{\partial u}{\partial y}$ ist, hat Herr Picard bewiesen, daß alle Integrale dieser Gleichung, welche nebst ihren Ableitungen der zwei ersten Ordnungen stetig sind, auch analytisch sind*). Der Zweck dieser Note ist zu zeigen, daß die Methode von Herrn Picard bei geeigneter Handhabung auch in dem allgemeinen Falle der Gleichung (1) ausreicht um den analytischen Charakter der Lösungen darzulegen, wenigstens von solchen, die nebst den Ableitungen der drei ersten Ordnungen stetig sind. (Fehlen $\frac{\partial u}{\partial x}$, $\frac{\partial u}{\partial y}$ in (1) so ist keine Voraussetzung von den dritten Ableitungen nötig).

Es ist dies übrigens zuerst von Herrn Lütkemeyer gezeigt worden und in seiner Dissertation enthalten**), die zum Teil am Anfang des Jahres 1901,

*) Journal de l'école polytechnique 1899, Comptes rendus 1900. Siehe auch: Paraf, Thèse, Paris 1892.

**) Göttingen 1902. Siehe auch einen Aufsatz von mir (Sv. Vet. Ofversigt, Bd. 58 S. 59.) Die Gleichungen (1) gehören — allerdings als sehr einfache Fälle — zu den Gleichungen, für welche Hilbert in seinem Pariser Vortrag (1900) die Frage nach dem analytischen Charakter der Lösungen aufgestellt hat. (Vgl. auch Encyklopädie Bd. II S. 535.)

Die Anwendung des Satzes des Textes in dem Fall, wo $f = \frac{e^u + e^{-u}}{2}$, führt leicht nach bekannten Sätzen der Differentialgeometrie zu dem von Hilbert (l. c.) ausgesprochenen Satze daß „alle Flächen positiver konstanter Krümmung analytisch sind" (wenigstens wenn sie stetige Ableitungen bis zur dritten Ordnung haben).

wie dem Verf. bekannt war, dem Herrn Prof. Hilbert — der die Anregung zur Erledigung dieser Frage gegeben hat — vorgelegt wurde*).

Es sei U eine Lösung von (1), die in einem gewissen Gebiete G diese letztgenannten Bedingungen erfüllt. In diesem sei O ein beliebiger Punkt. Wir verlegen den Koordinatenanfangspunkt der xy-Ebene in O. Es seien $\overline{U}$, $\overline{V}$, $\overline{W}$ die Werte von U, $\frac{\partial U}{\partial x}$, $\frac{\partial U}{\partial y}$ in O. Nach der Annahme dürfen wir voraussetzen, daß die Funktion $f(x, y, u, v, w)$ in eine gewöhnliche Potenzreihe von $x, y, u-\overline{U}, v-\overline{V}, w-\overline{W}$ sich entwickeln läßt. Diese konvergiere, wenn $|x|, |y| < a$, $|u-\overline{U}|, |v-\overline{V}|, |w-\overline{W}| < b$. Wir konstruieren aus O als Mittelpunkt einen Kreis Γ, dessen Radius R so klein ist daß innerhalb und auf der Peripherie (γ) die Ungleichungen $|x|, |y| < a$, $|U-\overline{U}|, \left|\frac{\partial U}{\partial x}-\overline{V}\right|, \left|\frac{\partial U}{\partial y}-\overline{W}\right| < b$ (und zwei andere unten genannte Bedingungen) erfüllt sind. Auf γ nimmt die Funktion Werte an, welche eine stetige Funktion des Bogens mit stetigen Ableitungen der drei ersten Ordnungen definieren. Nach dem Verfahren von Herrn Picard wollen wir jetzt ein Integral bilden, welches regulär und analytisch ist und auf γ diese Werte annimmt. Nachher zeigen wir, daß dieses Integral in Γ mit U zusammenfällt, womit also der analytische Charakter von U in G bewiesen ist (da ja O in G beliebig zu wählen war).

Zu diesem Zwecke bilden wir das System

$$
\begin{aligned}
&\Delta u_0 = 0,\\
&\Delta u_1 = f\left(x, y, u_0, \frac{\partial u_0}{\partial x}, \frac{\partial u_0}{\partial y}\right),\\
&\quad\vdots \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad (2)\\
&\Delta u_n = f\left(x, y, u_{n-1}, \frac{\partial u_{n-1}}{\partial x}, \frac{\partial u_{n-1}}{\partial y}\right)\\
&\quad\vdots
\end{aligned}
$$

und suchen successive die Integrale dieser Gleichungen, welche dieselben Werte wie U auf γ annehmen.

Wir setzen

$$v_1 = u_1 - u_0,\ v_2 = u_2 - u_1,\ \cdots,\ v_n = u_n - u_{n-1}$$

und bilden die Reihe

$$\lim_{u=\infty} u_n = u_0 + v_1 + v_2 + \cdots + v_n + \cdots \qquad (3)$$

Wie bewiesen werden wird, stellt sie, wenn R genügend klein genommen ist, das gesuchte analytische Integral dar.

Die Funktionen

$$u_0, v_1, v_2, \cdots$$

sind aus den Gleichungen

*) Erschien nach dem Einreichen dieses Aufsatzes.

$$\Delta u_0 = 0,$$

$$\Delta v_1 = f\left(x, y, u_0, \frac{\partial u_0}{\partial x}, \frac{\partial u_0}{\partial y}\right),$$

$$\Delta v_2 = f\left(x, y, u_1, \frac{\partial u_1}{\partial x}, \frac{\partial u_1}{\partial y}\right) - f\left(x, y, u_0, \frac{\partial u_0}{\partial x}, \frac{\partial u_0}{\partial y}\right)$$

$$= v_1 f_1\left(x, y, u_0, \frac{\partial u_0}{\partial x}, \frac{\partial u_0}{\partial y}, u, \frac{\partial u_1}{\partial x}, \frac{\partial u_1}{\partial y}\right) + \frac{\partial v_1}{\partial x} f_2(\cdots) + \frac{\partial v_1}{\partial y} f_3(\cdots),$$

(4) . . . . . .

$$\Delta v_n = f\left(x, y, u_{n-1}, \frac{\partial u_{n-1}}{\partial x}, \frac{\partial u_{n-1}}{\partial y}\right) - f\left(x, y, u_{n-2}, \frac{\partial u_{n-2}}{\partial x}, \frac{\partial u_{n-2}}{\partial y}\right)$$

$$= v_{n-1} f_1\left(x, y, u_{n-2}, \frac{\partial u_{n-2}}{\partial x}, \frac{\partial u_{n-2}}{\partial y}, u_{n-1}, \frac{\partial u_{n-1}}{\partial x}, \frac{\partial u_{n-1}}{\partial y}\right)$$

$$+ \frac{\partial v_{n-1}}{\partial x} f_2(\cdots) + \frac{\partial v_{n-1}}{\partial y} f_3(\cdots),$$

. . . . . .

zu bestimmen, in welchen

$$f_1(x, y, u, v, w, u', v', w'),\ f_2(\cdots),\ f_3(\cdots)$$

gewöhnliche Potenzreihen von

$$x, y, u - \overline{U}, v - \overline{V}, w - \overline{W}, u' - \overline{U}, v' - \overline{V}, w' - \overline{W}$$

sind und welche konvergieren, wenn die Ungleichungen

$$|x|, |y| < a,\ |u - \overline{U}|, \cdots, |w' - \overline{W}| < b$$

erfüllt sind. Dabei sollen $v_1, v_2, \cdots, v_n, \cdots$ auf γ verschwinden.

Ehe wir weiter gehen, müssen wir einige für das Folgende notwendige Hilfsbetrachtungen einschalten.

Wir werden Reihen von der Form zu betrachten haben

$$\sum_{m=0}^{\infty} (A_m \cos m\theta + B_m \sin m\theta), \tag{5}$$

wo

$$A_m = a_m^{(m)} r^m + a_{m+2}^{(m)} r^{m+2} + \cdots + a_{m+2\nu}^{(m)} r^{m+2\nu} + \cdots,$$
$$B_m = b_m^{(m)} r^m + b_{m+2}^{(m)} r^{m+2} + \cdots + b_{m+2\nu}^{(m)} r^{m+2\nu} + \cdots \tag{5'}$$

und r und θ die polaren Koordinaten des Punktes x, y in Bezug auf O sind $\left(a_{m+2\nu}^{(m)}, b_{m+2\nu}^{(m)}\right.$ sind reell$\left.\right)$. Wir sagen, daß eine Reihe von der Form (5) in dem Gebiete $r \leq R$ absolut konvergiert, wenn die Reihe

$$\sum_{m=0}^{\infty} (\{A_m\}_R + \{B_m\}_R) = [f]_R \tag{6}$$

wo

$$\{A_m\}_R = |a_m^{(m)}| R^m + |a_{m+2}^{(m)}| R^{m+2} + \cdots,$$
$$\{B_m\}_R = |b_m^{(m)}| R^m + |b_{m+2}^{(m)}| R^{m+2} + \cdots$$

konvergiert (wir wenden für die Reihe (6) die Bezeichnung $[f]_R$ an, wenn (5) die Funktion $f(x, y)$ darstellt).

Wenn eine Reihe (5) absolut konvergiert, so definiert sie eine reguläre analytische Funktion von x, y $f(x, y)$; umgekehrt wenn $f(x, y)$ in der Umgebung von O eine reelle reguläre analytische Funktion von x, y ist, so ist sie in der Form (5) darstellbar, wo die Reihe eine absolut konvergente ist*).

Dieses vorausgeschickt, beweisen wir zuerst die folgenden Ungleichungen welche die früher definierte Funktion $u_0(x, y)$ enthalten.

Wenn R genügend klein genommen wird, so ist:

$$(7) \qquad [u_0 - \overline{U}]_R < \frac{b}{2}, \quad \left[\frac{\partial u_0}{\partial x} - \overline{V}\right]_R < \frac{b}{2}, \quad \left[\frac{\partial u_0}{\partial y} - \overline{W}\right]_R < \frac{b}{2}.$$

Um die erste Ungleichung zu beweisen, brauchen wir die Formel

$$u_0(x, y) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{r}{R}\right)^n [a_n \cos n\theta + b_n \sin n\theta]$$

wo

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(\psi) \cos n\psi \, d\psi = \frac{1}{n^2\pi}\int_0^{2\pi} f''(\psi) \cos n\psi \, d\psi \left(= -\frac{1}{n^3\pi}\int_0^{2\pi} f'''(\psi) \sin n\psi \, d\psi\right),$$

$$b_n = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(\psi) \sin n\psi \, d\psi = -\frac{1}{n^2\pi}\int_0^{2\pi} f''(\psi) \sin n\psi \, d\psi \left(= \frac{1}{n^3\pi}\int_0^{2\pi} f'''(\psi) \cos n\psi \, d\psi\right),$$

($f(\psi)$ definiert die Werte, welche $U(x, y)$ auf γ annimmt und hat also stetige Ableitungen der drei ersten Ordnungen).

---

*) Paraf l. c. p. 73. Daß die Reihe (5) in eine absolut konvergente Potenzreihe von $x - a$ und $y - b$ umgeordnet werden kann, sieht man leicht, wenn man sich deren Formeln bedient:

$$\sin m\theta = \frac{(\cos\theta + i \sin\theta)^m - (\cos\theta - i \sin\theta)^m}{2i},$$

$$\cos m\theta = \frac{(\cos\theta + i \sin\theta)^m + (\cos\theta - i \sin\theta)^m}{2}.$$

Die umgekehrte Behauptung ergibt sich unter Anwendung der Formel

$$\sin^m\theta \cos^n\theta = \left(\frac{e^{\theta i} - e^{-\theta i}}{2i}\right)^m \left(\frac{e^{\theta i} + e^{-\theta i}}{2}\right)^n$$

und den analogen, welche endliche Fourierentwickelungen derselben Parität ergeben, in denen die Summe der absoluten Beträge der Koeffizienten ≤ 1 sind.

Bemerken wir, daß $|f''(\psi)| < RM$, wo M eine gewisse von R unabhängige Constante ist, so finden wir

$$[u_0 - \overline{U}]_R < \left|\frac{a_0}{2} - \overline{U}\right| + \sum_{n=1}^{\infty}(|a_n| + |b_n|) < \left|\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(\psi)\,d\psi - \overline{U}\right| + 4MR\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$$

d. h. wenn wir R genügend klein nehmen, so ist

$$[u_0 - \overline{U}]_R < \frac{b}{2}.$$

Wir gehen nun zum Beweise der zweiten Ungleichung über.

Wir bemerken zuerst, daß $\frac{\partial u_0}{\partial x}$ sich einer endlichen Grenze nähert, wenn x, y sich von innen des Kreises Γ einem beliebigen Punkte der Peripherie γ nähert und daß diese Grenze eine stetige Funktion $g(\theta)$ von dem Polarwinkel θ ist.

In der Tat folgt dieses unmittelbar aus der Formel

$$(8) \qquad \frac{\partial u_0}{\partial x} = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{n r^{n-1}}{R^n}\left(a_n \cos(n-1)\theta + b_n \sin(n-1)\theta\right),$$

da ja wegen der Ungleichungen

$$|a_n| < \frac{2RM'}{n^2}, \qquad |b_n| < \frac{2RM'}{n^2}$$

(M' ist eine Konstante, die von R unabhängig ist) die Reihe rechts absolut und gleichmäßig für alle Punkte innerhalb und an der Peripherie des Kreises Γ konvergiert.

Wir betrachten dann die Differenz $g(\theta) - \overline{V}$. Sie kann dadurch daß man R genügend klein nimmt, unabhängig von θ beliebig klein gemacht werden. Denn da

$$\Delta(U - u_0) = f\left(x, y, U, \frac{\partial U}{\partial x}, \frac{\partial U}{\partial y}\right),$$

so schließt man nach dem Satze p. 219 unten, daß die Differenz $\left|\frac{\partial U}{\partial x} - \frac{\partial u_0}{\partial x}\right|$ auf γ mit R beliebig klein gemacht werden kann, woraus die Behauptung sich ergibt.

Wir suchen jetzt eine obere Grenze für

$$\left[\frac{\partial u_0}{\partial x} - \overline{V}\right]_R.$$

Nach der Formel

$$\frac{\partial u_0}{\partial x} = \frac{a_0'}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{r}{R}\right)^n\left(a_n' \cos n\theta + b_n' \sin n\theta\right)$$

wo

$$a_n' = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} g(\psi)\cos n\psi\, d\psi, \qquad b_n' = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} g(\psi)\sin \psi\, d\psi,$$

bekommen wir

$$\left[\frac{\partial u_0}{\partial x} - \overline{V}\right]_R < \left|\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} g(\psi)\, d\psi - \overline{V}\right| + \left[\sum_{n=1}^{m-1}\left(\frac{r}{R}\right)^n (a_n'\cos n\theta + b_n'\sin n$$

$$+ \left[\sum_{n=m}^{\infty}\left(\frac{r}{R}\right)^n (a_n'\cos n\theta + b_n'\sin n$$

Die letzte Summe

$$\left[\sum_{n=m}^{\infty}\left(\frac{r}{R}\right)^n (a_n'\cos n\theta + b_n'\sin n\theta)\right]_R$$

kann — wie aus der Formel (8) einleuchtet — unabhängig von R kl als $\frac{b}{6}$ gemacht werden, wenn man m genügend groß nimmt. Die Summe

$$\left[\sum_{n=1}^{m-1}\left(\frac{r}{R}\right)^n (a_n'\cos n\theta + b_n'\sin n\theta)\right]_R$$

wird kleiner als $\frac{b}{6}$, wenn man R genügend klein nimmt, weil $|a_n'|$ un mit R gegen Null konvergieren. In der Tat hat man

$$a_n' = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} (\overline{V} + \eta)\cos n\psi\, d\psi = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} \eta\cos n\psi\, d\psi,$$

$$b_n' = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} \eta\sin n\psi\, d\psi$$

und wie vorhin gezeigt, konvergiert η mit R unabhängig von ψ g Null. Endlich folgt auch, daß der Ausdruck

$$\left|\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} g(\psi)\, d\psi - \overline{V}\right|$$

kleiner als $\frac{b}{6}$ gemacht werden kann, dadurch, daß man R klein g wählt. Wenn wir R genügend klein nehmen, wird die Ungleichung

$$\left[\frac{\partial u_0}{\partial x} - \overline{V}\right]_R < \frac{b}{2}$$

erfüllt.

Die dritte Ungleichung kann in derselben Weise bewiesen werden.

Die Bestimmung und Abschätzung der Funktionen $v_1, v_2, v_3, \cdots$ beruht auf dem folgenden Lemma von Herrn Picard, welcher das Fundament seiner Methode ist.

Es sei die Differentialgleichung

$$\Delta v = f(x, y) \tag{9}$$

vorgelegt, in welcher

$$f(x, y) = \sum_{k=0}^{\infty} \left(\gamma_k(r) \cos k\theta + \delta_k(r) \sin k\theta\right)$$

eine in dem Gebiete $r \leq R$ absolut konvergierende Reihe von der Form (5) ist (die also eine analytische Funktion von x, y darstellt).

Wir wollen ein reguläres Integral von (9) bestimmen, welches auf dem Kreise $r = R$ überall den Wert Null annimmt. Zu diesem Zwecke suchen wir die Koeffizienten in der Reihe

$$\varphi(x, y) = \sum_{k=0}^{\infty} \left(\alpha_k(r) \cos k\theta + \beta_k(r) \sin k\theta\right) \tag{10}$$

so zu bestimmen, daß sie dieses Integral darstellt. Für die Koeffizientenbestimmung bekommen wir die Systeme

$$\frac{d^2\alpha_k}{dr^2} + \frac{1}{r}\frac{d\alpha_k}{dr} - \frac{k^2}{r^2}\alpha_k = \gamma_k(r),$$

$$\frac{d^2\beta_k}{dr^2} + \frac{1}{r}\frac{d\beta_k}{dr} - \frac{k^2}{r^2}\beta_k = \delta_k(r),$$

$$(k = 0, 1, 2, 3, \cdots)$$

woraus $\alpha_k(r)$ und $\beta_k(r)$ so bestimmt werden sollen, daß sie für $r \leq R$ regulär sind und für $r = R$ verschwinden. Wir finden leicht

$$\alpha_0(r) = \int_R^r \frac{1}{r}\left(\int_0^r r\gamma_0(r)\,dr\right) dr,$$

$$2k\alpha_k(r) = r^k \int_R^r \frac{\gamma_k(r)}{r^{k-1}}\,dr - \frac{1}{r^k}\int_0^r \gamma_k(r) r^{k+1} dr + \frac{r^k}{R^{2k}}\int_0^R \gamma_k(r) r^{k+1} dr, \tag{11}$$

$$2k\beta_k(r) = r^k \int_R^r \frac{\delta_k(r)}{r^{k-1}}\,dr - \frac{1}{r^k}\int_0^r \delta_k(r) r^{k+1} dr + \frac{r^k}{R^{2k}}\int_0^R \delta_k(r) r^{k+1} dr,$$

$$(k = 1, 2, 3, \cdots).$$

Da offenbar $\alpha_k(r)$, $\beta_k(r)$ Potenzreihen von der Form (5') sind, so ist (10) eine Reihe von der Form (5). Aus (11) ergeben sich sofort die Ungleichungen

$$\{\alpha_0(r)\} < \lambda R^2 \{\gamma_0(r)\}_R,$$

$$\{\alpha_k(r)\}_R < \frac{\lambda R^2}{k^2} \{\gamma_k(r)\}_R, \quad \left\{\frac{d\alpha_k(r)}{dr}\right\}_R < \frac{\lambda R}{k} \{\gamma_k(r)\}_R$$

$$(k = 1, 2, 3, \cdots),$$

wo λ eine von R unabhängige Konstante ist und analoge Ungleichungen für $\{\beta_k(r)\}_R$ und $\left\{\frac{d\beta_k(r)}{dr}\right\}_R$ und somit auch die folgenden

$$[\varphi]_R, \left[\frac{\partial\varphi}{\partial x}\right]_R, \left[\frac{\partial\varphi}{\partial y}\right]_R < \mu R M, \tag{12}$$

wo $M \geq [f(x, y]_R$ und μ eine von R unabhängige Konstante ist*). Die Reihe (10) ist also absolut konvergent und stellt die gesuchte Lösung dar.

Eine letzte vorbereitende Bemerkung bezieht sich auf die Entwickelung der Funktionen $f(x, y, u, v, w)$, $f(x, y, u, v, w) - f(x, y, u', v', w')$ in Reihen von der Form (5), vorausgesetzt daß u, v, w, u', v', w' solche Reihen sind.

Wir schreiben die Differenz $f(x, y, u, v, w) - f(x, y, u', v', w')$ in der Form

$$f(x,y,u,v,w) - f(x,y,u',v',w') = (u-u')f_1(x,y,u,v,w,u',v',w') + (v-v')f_2(\cdots) + (w-w')f_3(\cdots)$$

wo f_1, f_2, f_3 gewöhnliche Potenzreihen von

$$x,\ y,\ u - \overline{U},\ v - \overline{V},\ w - \overline{W},\ u' - \overline{U},\ v' - \overline{V},\ w' - \overline{W}$$

sind, welche konvergieren, wenn

$$|x|,\ |y| < a,\ |u - \overline{U}|, \cdots, |w' - \overline{W}| < b.$$

---

*) Die erste der Ungleichungen (11) ist einleuchtend. Um die zweite zu beweisen (die dritte wird in derselben Weise bewiesen) wenden wir die Formel

$$\frac{\partial\varphi}{\partial r} = \frac{\partial\varphi}{\partial r}\cos\theta - \frac{\partial\varphi}{\partial\theta}\frac{\sin\theta}{r}$$

an. Wir haben

$$\left[\frac{\partial\varphi}{\partial r}\cos\theta\right]_R < \sum_{k=0}^{\infty}\left(\left\{\frac{d\alpha_k}{dr}\right\}_R + \left\{\frac{d\beta_k}{dr}\right\}_R\right) < \lambda R M$$

und

$$\left[\frac{\partial\varphi}{\partial\theta}\frac{\sin\theta}{r}\right]_R < \sum_{k=1}^{\infty} k\left(\left\{\frac{\alpha_k}{r}\right\}_R + \left\{\frac{\beta_k}{r}\right\}_R\right) < \sum_{k=1}^{\infty}\left(\left\{\frac{d\alpha_k}{dr}\right\}_R + \left\{\frac{d\beta_k}{dr}\right\}_R\right) < \lambda R M.$$

Also

$$\left[\frac{\partial\varphi}{\partial x}\right]_R < \left[\frac{\partial\varphi}{\partial r}\cos\theta\right]_R + \left[\frac{\partial\varphi}{\partial\theta}\frac{\sin\theta}{r}\right]_R < 2\lambda R M.$$

Es sei M die Summe der absoluten Beträge der Glieder in der die Funktion $f(x, y, u, v, w)$ darstellende Potenzreihe, nachdem wir für x, y den Wert a für die übrigen Argumente $u - \bar{U}$ etc. den Wert b eingesetzt haben. Es sei G die größte der analogen in Bezug auf f_1, f_2, f_3 gebildeten Größen.

Dann gilt

$$[f(x, y, u, v, w)]_R < M, \tag{13}$$

$$[f(x,y,u,v,w) - f(x,y,u',v',w')]_R < ([u-u']_R + [v-v']_R + [w-w']_R)G, \tag{14}$$

wenn

$$R < a,\ [u-\bar{U}]_R,\ [v-\bar{V}]_R,\ [w-\bar{W}]_R,\ [u'-\bar{U}]_R,\ [v'-\bar{V}]_R,\ [w'-\bar{W}]_R < b.$$

Man sieht dies leicht ein, wenn man (nachdem man statt x und y r und θ eingeführt hat) die beiden Funktionen als Potenzreihen von r sich umgeordnet denkt, und dann, um zu Reihen von der Form (5) zu kommen, in den Koeffizienten die dort auftretenden Produkte aus Potenzen von $\sin x$, $\cos x$ durch ihre endlichen Fourierentwickelungen ersetzt (die Umordnung gibt dann offenbar eine Reihe der Form (5)), welche die Eigenschaft besitzen, daß die Summe der absoluten Beträge ihren Koeffizienten ≤ 1 ist (siehe p. 412, Note).

Nach diesen Vorbereitungen können wir die Funktionen $v_1, v_2, v_3, \cdots$ und die Konvergenz der Reihe (3) näher untersuchen.

Wir nehmen zuerst R so klein an, daß die Ungleichungen (7) erfüllt sind. Dann wenden wir das Picardsche Lemma auf die Bestimmung von v_1 an. Wir bekommen für v_1 eine Reihe von der Form (5), die nach (12) und (13) den Ungleichungen genügt

$$[v_1]_R,\ \left[\frac{\partial v_1}{\partial x}\right]_R,\ \left[\frac{\partial v_1}{\partial y}\right]_R < \mu R M.$$

Wir nehmen jetzt an, daß R so klein ist daß $\mu R M < \frac{b}{2}$, woraus folgt daß die Ungleichungen

$$[u_1 - \bar{U}]_R,\ \left[\frac{\partial u_1}{\partial x} - \bar{V}\right]_R,\ \left[\frac{\partial u_1}{\partial y} - \bar{W}\right]_R < b$$

erfüllt sind*).

Aus der dritten der Gleichungen (4) kann nun die Funktion v_2 als eine Reihe von der Form (5) bestimmt werden. Die Ungleichungen (12) und (14) ergeben

$$[v_2]_R,\ \left[\frac{\partial v_2}{\partial x}\right]_R,\ \left[\frac{\partial x_2}{\partial y}\right]_R < \mu R(3\mu R M)G = (3\mu R G)^2 \frac{M}{3G}.$$

*) Da $[u_1 - \bar{U}]_R < [u_0 - \bar{U}]_R + [v_1]_R < \frac{b}{2} + \frac{b}{2} = b$ u. s. w.

In dieser Weise fortsetzend, bestimmen wir successive für $u = 3, 4, \cdots$ die Funktionen v_n als Reihen von der Form (5), die die Ungleichungen

$$(15) \qquad [v_n]_R,\ \left[\frac{\partial v_n}{\partial x}\right]_R,\ \left[\frac{\partial v_n}{\partial y}\right]_R < (3\mu RG)^{n-1}\frac{M}{3G}$$

erfüllen, vorausgesetzt daß R so klein ist, daß

$$[u_i - \overline{U}]_R,\ \left[\frac{\partial u_i}{\partial x} - \overline{V}\right]_R,\ \left[\frac{\partial u_i}{\partial y} - \overline{W}\right]_R < b,$$
$$(i = 0, 1, 2, \cdots)$$

Bedingungen welche immer erfüllt sind, wenn R der Ungleichung

$$(3\mu RG)\frac{M}{3G} + (3\mu RG)^2\frac{M}{3G} + \cdots + (3\mu RG)^{n-1}\frac{M}{3G} + \cdots = \mu RM\frac{1}{1 - 3\mu RG} < \frac{b}{2}$$

gemäß gewählt ist*).

Die Ungleichungen (15) ergeben jetzt, daß die Reihe

$$[u_0]_R + [v_1]_R + \cdots + [v_n]_R + \cdots$$

(und auch die Reihen $\left[\frac{\partial u_0}{\partial x}\right]_R + \left[\frac{\partial v_1}{\partial x}\right]_R + \cdots$, $\left[\frac{\partial u_0}{\partial y}\right]_R + \left[\frac{\partial v_1}{\partial y}\right]_R + \cdots$) konvergiert und daß also die Reihe (3) als eine absolut konvergente Reihe der Form (5) geschrieben werden kann. Die Funktion $u = \lim_{n=\infty} u_n$ ist also analytisch und regulär in der Umgebung von O. Die Ableitungen dieser Funktion bekommt man, wenn man die Summe der Ableitungen der Glieder von (3) nimmt; die so erhaltenen Reihen konvergieren gleichmäßig in Γ**). Da also die Ausdrücke

---

*) Da $[u_i - \overline{U}]_R < [u_0 - \overline{U}]_R + [v_1]_R + \cdots + [v_i]_R$ u. s. w.

**) In Bezug auf die ersten Ableitungen ist dieses unmittelbar klar. Um den Beweis z. B. in Bezug auf $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$ zu führen, bemerken wir erstens daß wir haben

$$\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right) = \frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{\partial u_0}{\partial x}\right) + \frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{\partial v_1}{\partial x}\right) + \cdots,$$

wo die Reihe rechts (von der Form (5)) gleichmäßig konvergiert, wenn $r < K < R$ Die Ungleichungen

$$\left[\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\frac{\partial u_0}{\partial x}\right)\right]_{R'} < \left[\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{\partial u_0}{\partial x}\right)\right]_{R'},\ \left[\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\frac{\partial v_1}{\partial x}\right)\right]_{R'} < \left[\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{\partial v_1}{\partial x}\right)\right]_{R'} \text{ etc.}$$

geben das analoge Resultat in Bezug auf $\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)$. Durch Anwendung der Formel

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)\cos\theta - \frac{\partial}{\partial\theta}\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)\frac{\sin\theta}{r}$$

wird jetzt das gesuchte Resultat gewonnen.

$$u = \lim_{n=\infty} u_n,\ \frac{\partial u}{\partial x} = \lim_{n=\infty} \frac{\partial u_n}{\partial x},\ \frac{\partial u}{\partial y} = \lim_{n=\infty} \frac{\partial u_n}{\partial y},\ \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \lim_{n=\infty} \frac{\partial^2 u_n}{\partial x^2},\ \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = \lim_{n=\infty} \frac{\partial^2 u_n}{\partial y^2}$$

in Γ gleichmäßig konvergieren, so zeigt man in der gewöhnlichen Weise unter Anwendung der Gleichung

$$\Delta u_n = f\left(x, y, u_{n-1}, \frac{\partial u_{n-1}}{\partial x}, \frac{\partial u_{n-1}}{\partial y}\right)$$

daß u eine Lösung von (1) ist. Da sie offenbar dieselben Werte wie U auf γ annimmt, so definiert sie die gesuchte analytische Lösung von (1). Wir bemerken daß U die Ungleichungen

$$[u - \bar{U}]_R,\ \left[\frac{\partial u}{\partial x} - \bar{V}\right]_R,\ \left[\frac{\partial u}{\partial y} - \bar{W}\right]_R < b$$

erfüllt und das somit

$$|u - \bar{U}|,\ \left|\frac{\partial u}{\partial x} - \bar{V}\right|,\ \left|\frac{\partial u}{\partial y} - \bar{W}\right| < b$$

(unabhängig von R).

Es soll jetzt gezeigt werden, daß u mit U übereinstimmt. Wir setzen $u - U = z$. Dann muß z, das auf γ Null ist die Gleichung

$$\Delta z = f\left(x, y, u, \frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y}\right) - f\left(x, y, U, \frac{\partial U}{\partial x}, \frac{\partial U}{\partial y}\right) = F(x, y)$$

befriedigen.

Um den Beweis zu führen daß $z \equiv 0$ ist, wenden wir den folgenden Satz an:

Wenn in Γ die Funktion $f(x, y)$ nebst den Ableitungen $\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}$ stetig sind und in Γ und auf γ $|f(x, y)| < N$, so ist das Integral der Gleichung

$$\Delta z = f(x, y),$$

welches auf γ verschwindet durch die Formel gegeben

$$z = -\frac{1}{2\pi}\int\int_{\Gamma} f(\xi, \eta)\, G(x, y, \xi, \eta)\, d\xi\, d\eta,$$

wo $G(x, y, \xi, \eta)$ die Funktion von Green ist die dem Gebiete Γ und dem Punkte x, y entspricht. Dieses Integral hat stetige Ableitungen in Γ und auf γ und erfüllt nebst diesen die Ungleichungen

$$|z|,\ \left|\frac{\partial z}{\partial x}\right|,\ \left|\frac{\partial z}{\partial y}\right| < \lambda N,$$

wo λ eine Konstante ist die mit R gegen Null abnimmt*).

Da die beiden Funktionen u und U die Ungleichungen

$$|\varphi - \bar{U}|,\ \left|\frac{\partial \varphi}{\partial x} - \bar{V}\right|,\ \left|\frac{\partial \varphi}{\partial y} - \bar{W}\right| < b$$

*) Siehe Picard, Journal de math. 1900.

erfüllen, so folgt daß

$$|F(x, y)| < k\left(|z| + \left|\frac{\partial z}{\partial x}\right| + \left|\frac{\partial z}{\partial y}\right|\right) < k(\mu + \mu' + \mu''),$$

wo k eine Konstante ist und μ, μ', μ'' die absoluten Maxima von $|z|$, $\left|\frac{\partial z}{\partial x}\right|$, $\left|\frac{\partial z}{\partial y}\right|$ in Γ bezeichnen. Nach dem angeführten Satze haben wir dann

$$|z|, \left|\frac{\partial z}{\partial x}\right|, \left|\frac{\partial z}{\partial y}\right| < \lambda k(\mu + \mu' + \mu''),$$

welche Formeln zeigen daß

$$\mu + \mu' + \mu'' < 3\lambda k(\mu + \mu' + \mu'').$$

Nehmen wir jetzt R so klein daß $3\lambda k < 1$, so werden wir zu dem Widerspruche $\mu + \mu' + \mu'' < \mu + \mu' + \mu''$ geführt. Dieses zeigt das $z \equiv 0$, d. h. U fällt mit dem analytischen Integral u zusammen*). Der Beweis für den analytischen Charakter der Integrale von (1) ist also geführt.

Göttingen, Juli 1902.

---

*) Um dieses zu zeigen kann man auch dasselbe Verfahren gebrauchen, welches Herr Picard bei den linearen Differentialgleichungen (Traité d'analyse t. II, p. 23) anwendet. — Ein einfacher Beweis für den Eindeutigkeitssatz, den Picard im Journal de math. 1896 gegeben hat, folgt unmittelbar aus dem Verfahren des Textes. Für die Methode vergleiche E. Lindelöf: Journal de mathématiques 1894.

Über die Transformation der Polyeder.

Von

B. KAGAN in Odessa.

In einem Aufsatz, der im vorigen Bande der „Math. Annalen" abgedruckt ist, hat Herr Dehn eine talentvolle Lösung des vom Prof. D. Hilbert in seiner bekannten Rede vorgeschlagenen Problems über die Transformation der Polyeder, gegeben. Indem ich bemüht war die Lösung für eine populäre russische mathematische Zeitschrift zu bearbeiten, gelangte ich zu einem Beweise desselben Satzes, der obwohl im Grunde auf demselben Hauptgedanken ruht, doch viel einfacher scheint. Da der Satz höchst wichtig ist, scheint es mir zweckmäßig auch diese Lösung bekannt zu machen.

1. Wir setzen voraus, daß ein Polyeder P, dessen Flächenwinkel $\pi_1, \pi_2, \pi_3, \cdots, \pi_n$ heißen mögen, aus einer Reihe von Polyedern $P_1, P_2, P_3, \cdots, P_k$ besteht. Die Kanten der Polyeder P_i decken im allgemeinen einander; die Ecken anderer Polyeder, welche auf einer Kante liegen, teilen dieselbe in Teilstrecken, die wir die *Zerlegungsstrecken* nennen wollen. Jede Zerlegungsstrecke wollen wir bloß einmal zählen, dann auch, wenn dieselbe mehreren Polyedern P_i angehört.

Jeder Zerlegungsstrecke schreiben wir ein bestimmtes *Argument* zu, und zwar die Zahl π, 2π, oder π_i, je nachdem die Flächenwinkel der Polyeder, welche um diese Strecke herumliegen, zusammen π, 2π oder π_i ergeben.

2. Wenn es uns jetzt gelingt, zwei von einander verschiedene Polyeder P und P', deren Flächenwinkel $\pi_1, \pi_2, \cdots, \pi_n$ bezw. $\pi_1', \pi_2', \cdots, \pi_n'$ sind, in eine gleiche Anzahl entsprechend kongruenter Polyeder zu zerlegen, so erhalten wir für jedes der Polyeder P und P' ein entsprechendes System von Zerlegungsstrecken.

Auf einer beliebigen Kante eines Teilpolyeders in der Zerlegung von P können im allgemeinen, wie gesagt, Ecken anderer Polyeder liegen. Auf derselben Kante liegen in der Zerlegung von P' wieder Ecken von

Teilpolyedern. Nun greifen wir eine beliebige Kante eines bestimmten Teilpolyeders heraus und tragen auf derselben alle Punkte ab, in welchen die Ecken anderer Polyeder sowohl in der Zerlegung von P, wie auch in der Zerlegung von P' sich befinden. Dadurch zerfallen alle der betreffenden Kante gehörenden Zerlegungsstrecken im allgemeinen in kleinere Teilstrecken, die wir als *Elementarstrecken* bezeichnen wollen. Wenn eine Zerlegungsstrecke den aufeinanderliegenden Kanten verschiedener Polyeder P_i zugehört, so wird sie auf verschiedene Weisen in Elementarstrecken zerfallen: die Zerlegung geschieht ja auf jeder Kante für sich.

Auch jeder Elementarstrecke soll ein *Argument* zugeschrieben werden, und zwar der Flächenwinkel des betreffenden Polyeders, auf dessen Kante diese Elementarstrecke liegt.

3. Auf jede Elementarstrecke beziehen wir jetzt eine positive, von Null verschiedene Zahl, welche wir als ihre *Masse* bezeichnen wollen; dieselbe kann ganz willkürlich gewählt werden, insofern die folgende Bedingung erfüllt ist: *Wenn dieselbe Zerlegungsstrecke auf einer Kante die Elementarstrecken mit den Massen* $m_1', m_1'', m_1''', \cdots$ *besitzt, auf der zweiten — mit den Massen* $m_2', m_2'', m_2''', \cdots$, *auf der dritten — mit den Massen* $m_3', m_3'', m_3''', \cdots$ *usw., so sollen diese Massen die folgende Gleichung befriedigen:*

$$\sum m_1 = \sum m_2 = \sum m_3 \cdots. \tag{1}$$

In Worten: *Die Summen der Massen der Elementarstrecken, welche auf verschiedenen Kanten dieselbe Zerlegungsstrecke bilden, sollen einander gleich sein.* Den gemeinsamen Wert M dieser Summen nennen wir *die Masse der betreffenden Zerlegungsstrecke.*

Die Gleichungen (1) lassen sich z. B. dadurch befriedigen, daß man die Massen der Elementarstrecken ihren Längen proportional annimmt.

4. Fundamentalsatz. *Das Produkt aus der Masse einer Zerlegungsstrecke in ihr Argument ist gleich der Summe der Produkte aus den Massen aller auf ihr liegenden Elementarstrecken in ihre Argumente.*

Beweis. Wenn eine Zerlegungsstrecke (M, T) in Elementarstrecken auf verschiedene Weisen zerlegt worden ist, so besitzen alle Elementarstrecken mit den Massen $m_i', m_i'', m_i''', \cdots$ dasselbe Argument τ_i; folglich ist

$$\sum m_1\tau_1 + \sum m_2\tau_2 + \cdots \sum m_\varkappa\tau_\varkappa = \tau_1 \sum m_1 + \tau_2 \sum m_2 + \cdots + \tau_\varkappa \sum m_\varkappa$$
$$= M\tau_1 + M\tau_2 + \cdots + M\tau_\varkappa = M(\tau_1 + \tau_2 + \cdots + \tau_\varkappa) = MT.$$

5. Aus diesem Satze folgt unmittelbar, daß für das Polyeder P die Gleichung $\sum m\tau = \sum MT$ besteht, wo die Summierung sich auf der linken Seite auf alle Elementarstrecken, rechts aber auf alle Zerlegungsstrecken des Polyeders P bezieht. Bezeichnen wir nun mit $M_1, M_2, \cdots, M_s$,

M und N die Massen der Zerlegungsstrecken, deren Argumente bezw. $\pi_1, \pi_2, \cdots, \pi_n, \pi$ und 2π sind, so läßt sich die Gleichung $\sum m\tau = \sum MT$ folgendermaßen schreiben:

$$\sum m\tau = M_1\pi_1 + M_2\pi_2 + M_3\pi_3 + \cdots + M_n\pi_n + M\pi + N \cdot 2\pi.$$

Die Koeffizienten $M_1, M_2, M_3, \cdots, M_n$ können als *Massen der Polyederkanten* bezeichnet werden.

Für das andere Polyeder gilt eine analoge Beziehung:

$$\sum m\tau = M_1'\pi_1' + M_2'\pi_2' + M_3'\pi_3' + \cdots + M_n'\pi_n' + M'\pi + N' \cdot 2\pi.$$

Daher ist

$$(2)\quad M_1\pi_1 + M_2\pi_2 + \cdots + M_n\pi_n + (M+2N)\pi = M_1'\pi_1' + M_2'\pi_2' + \cdots + M_n'\pi_n' + (M'+2N') \cdot \pi.$$

6. Die Gleichung (2) gilt für jede beliebige Wahl der Massen der Elementarstrecken, es müssen bloß dabei die Beziehungen (1) erfüllt sein. Da aber die letzten ein System homogener Gleichungen mit ganzzahligen Koeffizienten bilden, welche durch positive reelle Zahlen befriedigt werden können, so sind wir imstande sie durch ganze positive Zahlen zu befriedigen, wobei auch die Koeffizienten der Gleichung (2) ganzzahlig und positiv sind. Darin besteht eben das von Herrn Dehn aufgestellte Theorem.

7. Die vorigen Betrachtungen lassen sich indessen verallgemeinern. Es seien zwei Gruppen von Polyedern

$$(P) = P_1, P_2, \cdots, P_k \quad \text{und} \quad (P') = P_1', P_2', \cdots, P_{k'}'$$

gegeben. Wir bezeichnen durch $\pi_1, \pi_2, \pi_3, \cdots, \pi_n$ und $\pi_1', \pi_2', \pi_3', \cdots, \pi_{n'}'$ alle Flächenwinkel der Polyeder der einen und der anderen Gruppe.

Wir wollen nun voraussetzen, daß es ein System von Polyedern $Q_1, Q_2, Q_3, \cdots Q_s$ gibt, aus denen sowohl die Polyeder der ersten Gruppe wie auch die der zweiten sich zusammensetzen lassen. Das heißt die Polyeder (Q) zerfallen einerseits in k Gruppen, wobei aus den Polyedern der entsprechenden Gruppen sich die Polyeder $P_1, P_2, \cdots, P_k$ zusammensetzen lassen, und andrerseits zerfallen die Polyeder (Q) in k' Gruppen, aus denen die Polyeder (P') sich einzeln zusammensetzen lassen. Bei solchen Bedingungen werden wir sagen, daß die Polyedergruppen (P) und (P') *gleich zusammengesetzt* sind.

Ohne in den vorangehenden Betrachtungen etwas abzuändern, läßt sich beweisen, daß die Gleichung (2) auch in diesem Falle besteht.

Nun seien die Polyeder $P_{i+1}, P_{i+2}, \cdots, P_k$ entsprechend den Polyedern $P_{i'+1}', P_{i'+2}', \cdots, P_{k'}'$, kongruent, demzufolge $\pi_{h+1}, \pi_{h+2}, \cdots, \pi_n$ und $\pi_{h'+1}', \pi_{h'+2}', \cdots, \pi_{n'}'$ dieselben Flächenwinkel sind.

Dann können wir zu den Gleichungen (1) noch die Gleichungen

(1′) $$M_{h+1} = M'_{h'+1},\ M_{h+2} = M'_{h'+2}, \cdots, M_k = M'_{k'}$$

hinzufügen, welche besagen, daß die entsprechenden Kanten der kongruenten Polyeder in beiden Zerlegungen dieselben Massen haben, und ebenfalls befriedigt werden, wenn die Massen der Elementarstrecken ihren Längen proportional sind. Die Gleichung (2) nimmt folglich die Form

(2′) $$M_1\pi_1 + M_2\pi_2 + \cdots + M_h\pi_h + K\pi = M'_1\pi'_1 + M'_2\pi'_2 + \cdots + M'_{h'}\pi'_{h'} + K'\pi'$$

an und drückt den folgenden Satz aus:

Lassen sich zwei Systeme von Polyedern durch Hinzufügung kongruenter Polyeder zu gleichzusammengesetzten Gruppen ergänzen, so genügen ihre Flächenwinkel einer Gleichung von der Form (2) mit ganzzahligen Koeffizienten.

Lassen sich zwei Polyeder P und P' durch Hinzufügung kongruenter Polyeder $P_1, P_2, P_3, \cdots, P_k$ zu endlichgleichen Polyedern ergänzen, so sieht man leicht ein, daß die Gruppen $P, P_1, P_2, \cdots, P_k$ und $P', P_1, P_2, \cdots, P_k$ im oben definierten Sinne gleichzusammengesetzt sind. Die Gleichung (2) besteht folglich auch für ergänzungsgleiche Polyeder P und P'.

Enriques, F., Professor an der Universität Bologna, Vorlesungen über projektive Geometrie. Deutsche Ausgabe von Dr. phil. Hermann Fleischer in Göttingen. Mit einem Einführungswort von Felix Klein und 187 Figuren im Text. gr. 8. 1903. In Leinw. geb.

Föppl, Prof. Dr. **Aug.**, Vorlesungen über technische Mechanik. In 4 Bänden, gr. 8. Preis des ganzen Werkes in 4 Leinwand-Bänden n. ℳ 44.—

I. Band. Einführung in die Mechanik. (1. Aufl. 1898.) 3. Aufl. [XIV u. 418 S.] 1909. geb. n. ℳ 10.—
II. — Graphische Statik. (1. Aufl. 1900.) 2. Aufl. [XII u. 471 S.] 1903. geb. n. ℳ 10.—
III. — Festigkeitslehre. (1. Aufl. 1897.) 3. Aufl. [XVIII u. 515 S.] 1909. geb. n. ℳ 12.—
IV. — Dynamik. (1. Aufl. 1899.) 2. Aufl. 1901. [XV u. 396 S.] geb. n. ℳ 12.—

Grassmann's, Hermann, gesammelte mathematische und physikalische Werke. Auf Veranlassung der mathematisch-physikalischen Klasse der Königl. Sächsischen Gesellschaft der Wissenschaften und unter Mitwirkung der Herren Jacob Lüroth, Eduard Study, Justus Grassmann, Hermann Grassmann der Jüngere, Georg Scheffers herausgegeben von Friedrich Engel. II. Band. II. Teil. Die Abhandlungen zur Mechanik und zur mathematischen Physik. Mit 51 Figuren im Text. gr. 8. 1902. geb. n. ℳ 14.—

Hensel, K., und **G. Landsberg**, Theorie der algebraischen Funktionen einer Variabeln und ihre Anwendung auf algebraische Kurven und Abelsche Integrale. Mit zahlreichen Textfiguren. [XVI u. 708 S.] gr. 8. 1902. In Leinwand geb. n. ℳ 28.— (Auch in 2 Hälften zu je n. ℳ 14.—)

Klein, F., Anwendung der Differential- und Integralrechnung auf Geometrie, eine Revision der Principien. Vorlesung, gehalten während des Sommersemesters 1901. Ausgearbeitet von Conrad Müller. [VIII u. 468 S.] gr. 8. 1902. geb. n. ℳ 10.—

König, Julius, Einleitung in die allgemeine Theorie der algebraischen Größen. Aus dem Ungarischen übertragen vom Verfasser. gr. 8. 1903. geb. n. ℳ 18.—, geb. n. ℳ 20.—

Krazer, Dr. **Adolf**, o. Professor der Mathematik an der Technischen Hochschule zu Karlsruhe, Lehrbuch der Thetafunktionen. Mit 9 Textfiguren. gr. 8. 1903. In Leinw. geb. n. ℳ 24.—

Kübler, J., Baurat in Eßlingen, Die Berechnung der Kessel- und Gefäßwandungen. In zwei Teilen. I. Teil: Aufstellung der allgemeinen Gleichungen. Mit 6 Figuren. Mit einem Anhang: Welches Hindernis versperrt in der Knick-Theorie den Weg zur richtigen Erkenntnis!? [52 S.] gr. 8. 1902. geh. n. ℳ 1.60.

Loria, Dr. **Gino**, ord. Professor der Geometrie an der Universität Genua, spezielle algebraische und transcendente ebene Kurven. Theorie und Geschichte. Autorisierte, nach dem italienischen Manuskript bearbeitete deutsche Ausgabe von Fritz Schütte, Oberlehrer am Kgl. Gymnasium zu Neuwied. Mit 74 Figuren auf 7 lithographierten Tafeln. [XXI u. 744 S.] gr. 8. 1902. In Leinw. geb. n. ℳ 28.— (Auch in 2 Teilen zu ℳ 16.— u. ℳ 12.—)

Musil, A., o. ö. Professor an der k. k. deutschen technischen Hochschule in Brünn, Grundlagen der Theorie und des Baues der Wärmekraftmaschinen. Zugleich autorisierte, erweiterte deutsche Ausgabe des Werkes The steam-engine and other heat-engines von J. A. Ewing, Prof. an der Universität in Cambridge. Mit 303 Abbildungen im Text. [X u. 794 S.] gr. 8. 1902. In Leinw. geb. n. ℳ 20.—

Perry, Dr. **John**, F. R. S., Professor der Mechanik und Mathematik am Royal College of Science zu London, höhere Analysis für Ingenieure. Autorisierte deutsche Bearbeitung von Dr. Robert Fricke, o. Professor an der technischen Hochschule zu Braunschweig, und Fritz Süchting, Oberingenieur am städtischen Elektrizitätswerke zu Minden i. W. Mit 106 in den Text gedruckten Figuren. [X u. 428 S.] gr. 8. 1902. geb. n. ℳ 12.—

Sapolski, Dr. **L.**, über die Theorie der relativ Abelschen kubischen Zahlkörper. 2 Teile. [XII u. 482 S.] gr. 8. 1902. geh. n. ℳ 6.—

Sauerbeck, Dr. **Paul**, Professor am Gymnasium Reutlingen, Einleitung in die analytische Geometrie der höheren algebraischen Kurven. Nach den Methoden von Jean Paul de Gua de Malves. Ein Beitrag zur Kurvendiskussion. Mit 76 Abbildungen im Text. [VI u. 166 S.] gr. 8. 1902. geh. n. ℳ 8.—

Schenk, Dr. ing. **Julius**, Festigkeitsberechnung größerer Drehstrommaschinen. Mit 45 Figuren im Text und auf einer Doppeltafel. [IV u. 59 S.] gr. 8. 1903. geh. n. ℳ 1.60.

Schreber, Dr. K., die Theorie der Mehrstoffdampfmaschinen. Untersuchung der Frage: „Ist Wasser die vorteilhafteste Flüssigkeit zum Betriebe von Dampfmaschinen?“ und Bearbeitung der auf diese Frage sich ergebenden Antworten. Mit 12 Zeichnungen im Text. [IV u. 126 S.] gr. 8. 1903. geh. n. ℳ 3.60

———, Die Kraftmaschinen. Für Zuhörer an der Universität Greifswald gehaltene Vorlesungen über die wichtigsten der zur Zeit gebrauchten Kraftmaschinen. Mit 1 Tafel und 35 Abbildungen im Text. [XII u. 348 S.] gr. 8. 1900. geh. n. ℳ 6.—, geb. n. ℳ 6.80.

Serret-Bohlmann, Lehrbuch der Differential- und Integral-Rechnung. Zweite, durchgesehene Auflage. Dritter Band. Erste Lieferung. Differentialgleichungen. Herausgegeben von G. Bohlmann und E. Zermelo. Mit 10 in den Text gedruckten Figuren. [304 S.] gr. 8. 1903. geh. n. ℳ 6.—

Study, E., Geometrie der Dynamen. Die Zusammensetzung von Kräften und verwandte Gegenstände der Geometrie. Mit in den Text gedruckten Figuren und einer Tafel. [XIII u. 603 S.] gr. 8. 1903. geh. n. ℳ 21.—, geb. n. ℳ 23.—

Wölffing, Dr. Ernst, Professor an der Königl. Technischen Hochschule zu Stuttgart, Mathematischer Bücherschatz. Systematisches Verzeichnis der wichtigsten deutschen und ausländischen Lehrbücher und Monographien des 19. Jahrhunderts auf dem Gebiete der mathematischen Wissenschaften. In zwei Teilen. 1. Teil: Reine Mathematik. Mit einer Einleitung: Kritische Übersicht über die bibliographischen Hilfsmittel der Mathematik. (Abhandlungen zur Geschichte der mathematischen Wissenschaften mit Einschluß ihrer Anwendungen. Begründet von Moritz Cantor. Heft XVI, 1.) [XXXVI u. 416 S.] gr. 8. 1903. geh. n. ℳ 14.— geb. n. ℳ 15.—

INHALT.

	Seite
Über die Endlichkeit der Invariantensysteme. Von L. Maurer in Tübingen	205
Über Zerlegung von Rechtecken in Rechtecke. Von M. Dehn in Münster i./W.	314
On the partial differential equations of mathematical physics. Von E. T. Whittaker in Cambridge	333
Zum Eliminationsproblem bei analytischen Funktionen mehrerer Veränderlichen. Von Otto Blumenthal in Göttingen	351
Über die Fortsetzbarkeit gewisser Taylorscher Reihen. Von Georg Faber in München	369
Über polynomische Entwickelungen. Von Georg Faber in München	387
Über eine Klasse von partiellen Differentialgleichungen der zweiten Ordnung. Von Erik Holmgren in Upsala	402
Über die Transformation der Polyeder. Von B. Kagan in Odessa	421

Wir ersuchen unsere geehrten Herren Mitarbeiter, etwaige, den Abhandlungen beizufügende Figuren — gleichviel ob dieselben im Texte selbst oder auf besonderen Tafeln veröffentlicht werden sollen — im Interesse einer raschen und exakten Ausführung stets auf besonderen Blättern, wenn möglich in der gewünschten Größe und in thunlichst präciser Zeichnung den Manuscripten beilegen zu wollen. Ausserdem wird um möglichst genaue Angabe der Adresse gebeten.

Die Redaction.

☞ **Jeder Band der Annalen besteht aus 4 Heften und umfaßt ca. 36 Druckbogen. Um jedoch in jedem Heft nur abgeschlossene Artikel zu geben, werden die einzelnen Hefte mitunter von ungleicher Stärke sein.**

Der Preis für den Band von 4 Heften beträgt 20 Mark; jährlich erscheinen etwa 4—6 Hefte. Alle Buchhandlungen und Postanstalten nehmen Bestellungen an.

Verantwortliche Redaction: **F. Klein,** Göttingen, Wilh.-Weber-Str. 3, **W. v. Dyck,** München, Hildegardstr. 1½, **David Hilbert,** Göttingen, Wilh.-Weber-Str. 28.

Hierzu Beilagen von **B. G. Teubner** in **Leipzig,** welche wir der Beachtung unserer Leser bestens empfehlen.

Stanford Univ
SEP
5
1903

MATHEMATISCHE ANNALEN.

BEGRÜNDET 1868 DURCH

ALFRED CLEBSCH UND CARL NEUMANN.

Unter Mitwirkung der Herren

PAUL GORDAN, ADOLPH MAYER, CARL NEUMANN, MAX NOETHER,
KARL VONDERMÜHLL, HEINRICH WEBER

gegenwärtig herausgegeben

von

Felix Klein
in Göttingen

Walther v. Dyck
in München

David Hilbert
in Göttingen

57. Band. 4. Heft.

Mit 16 Figuren im Text.

Ausgegeben am 4. August.

LEIPZIG,
DRUCK UND VERLAG VON B. G. TEUBNER.
1903.

Neuester Verlag von **B. G. Teubner** in Leipzig.

Encyklopädie der Mathematischen Wissenschaften, mit Einschluss ihrer Anwendungen. Hrsg. im Auftrage der Akademien der Wissenschaften zu München und Wien und der Gesellschaft der Wissenschaften zu Göttingen, sowie unter Mitwirkung zahlreicher Fachgenossen. In 7 Bänden zu je 6—8 Heften. gr. 8. geh.

Bisher erschien:

I. **Arithmetik und Algebra**, red. von Frz. Meyer.
Heft: 1. [112 S.] 1898. ℳ 3.60; 2. [112 S.] 1901. ℳ 3.60; 3. [128 S.] 1900. ℳ 3.60; 4. [160 S.] 1900. ℳ 4.80; 5. [208 S.] 1900. ℳ 6.40; 6. 272 S.] 1901. ℳ 8.20; 7. [128 S.] 1902. ℳ 3.60.

II. **Analysis**, 2 Teile, red. von H. Burkhardt.
I. Teil. Heft: 1. [160 S.] 2000. ℳ 4.80; 2/3. [240 S.] 1900. ℳ 7.50; 4. [160 S.] ℳ 4.80. II. Teil. Heft: 1. [112 S.] 1901. ℳ 3.20.

III. **Geometrie**, 3 Teile, red. von Frz. Meyer.
II. Teil. Heft: 1. [168 S.] 1903. ℳ 4.80.
III. Teil. Heft: 1. [192 S.] 1902. ℳ 5.40.

IV. **Mechanik**, 2 Teile, red. von F. Klein.
I. Teil. Heft: 1. [121 S.] 1901. ℳ 3.80; 2. [156 S.] 1902. ℳ 4.60.
II. Teil. Heft: 1. [147 S.] 1901. ℳ 3.80; 2. [151 S.] 1903. ℳ 5.80.

V. **Physik**, 2 Teile, red. von A. Sommerfeld.
I. Teil. Heft: 1. [160 S.] 1903. ℳ 4.80.

Unter der Presse:

VI. 1: **Grundlagen der Geophysik**, red. v. E. Wiechert.

In Vorbereitung:

VI. 2: **Astronomie**, red. von H. Schwarzschild.

VII. **Historische, philosophische und didaktische Fragen behandelnd, sowie Generalregister.**

Abel, Niels Henrik, Mémorial publié à l'occasion du centenaire de sa naissance. [XII u. 429 S.] 4. 1902. geh. n. ℳ 21.—

Inhalt: Niels Henrik Abel. — Par Bjørnstjerne Bjørnson. — Introduction historique. Par Elling Holst. — Correspondance d'Abel mentionnant des lettres et articles qui lui ont été adressés. — Lettres relatives à Abel. — Notes et éclaircissements sur la correspondance. — Texte original des lettres écrites par Abel en Norvégien. — Documents. Publiés par Carl Størmer. — Eclaircissements sur les documents. — Les études d'Abel et ses découvertes. Par L. Sylow.

Hardey, Dr. Ernst, algebraische Gleichungen nebst den Resultaten und den Methoden zu ihrer Auflösung. Fünfte Auflage, bearbeitet von Friedrich Pietzker. [XIII u. 420 S.] gr. 8. 1902. geh. n. ℳ 8.—

Bauer, Dr. Gustav, Geheimrat, o. Professor an der Universität München, Vorlesungen über Algebra. Im Auftrage des mathematischen Vereins München herausgegeben von Dr. Karl Doehlemann, a. o. Professor an der Universität München. Mit dem Porträt Gustav Bauers als Titelbild und 11 Figuren im Text. [VI u. 378 S.] gr. 8. 1903. geh. n. ℳ 12.—, geb. n. ℳ 13.—

Berichte, Mathematische und Naturwissenschaftliche aus Ungarn. Mit Unterstützung der Ungarischen Akademie der Wissenschaften und der Kgl. Ungar. naturwissenschaftlichen Gesellschaft herausgegeben von Roland Baron Eötvös, Julius König, Karl von Than. Redigiert von August Heller. 17. Band. [VII u. 364 S.] gr. 8. 1902. geh. n. ℳ 8.—

——— 18. Band. [X u. 477 S.] gr. 8. 1903. geh. n. ℳ 8.—

Bolyai de Bolya, Joannes, Lilielius post saeculum quam Anno MDCCCII a. d. XVIII Kalendas Januarias Claudiopoli natus est, ad celebrandam memoriam eius immortalem, ex consilio ordinis Mathematicorum et Naturae scrutatorum regiae Litterarum Universitatis Hungaricae Francisco-Josephinae Claudiopolitanae editus. 4. [XVI u. 164 S.] gr. 8. 1902. geh. ℳ 6.—

——— Appendix scientiam spatii absolute veram exhibens, a veritate aut falsitate axiomatis XI. Euclidei, a priori haud unquam decidenda, independentem, adiecta ad casum falsitatis quadratura circuli geometrica. Editio nova oblata ab Academia Scientiarum Hungarica ad diem natalem centesimum auctoris concelebrandum. Ediderunt Ioannes Kürschak, Matthias Rikely, Bela Törökösy de Zakamenza, Academiae Scientiarum Hungaricae sodales. 4. [VIII u. 40 S.] 1903. geh. n. ℳ 4.—

Braunmühl, Professor Dr. A. von, Vorlesungen über Geschichte der Trigonometrie. II. Hälfte: Von der Erfindung der Logarithmen bis auf die Gegenwart. Mit 29 Figuren im Text. [XI u. 264 S.] gr. 8. 1903. geh. ℳ 10.—, geb. ℳ 11.—

Bruns, Dr. Heinrich, Professor der Astronomie an der Universität zu Leipzig, Grundlinien des wissenschaftlichen Rechnens. [IV u. 160 S.] gr. 8. 1903. geh. ℳ 5.40, geb. ℳ 4.—

Bucherer, Dr. A. H., Privatdozent an der Universität Bonn, Elemente der Vektor-Analysis. Mit Beispielen aus der theoretischen Physik. [VI u. 91 S.] gr. 8. 1903. geb. ℳ 2.40.

Curtze, M., Urkunden zur Geschichte der Mathematik im Mittelalter und der Renaissance. In 2 Teilen. Mit zahlreichen Textfiguren. gr. 8. 1902. geh. I. Teil. [X u. 336 S.] n. ℳ 10.—; II. Teil. [IV u. 291 S.] n. ℳ 14.—

Über die Fourierschen Konstanten integrierbarer Funktionen.

Von

A. Hurwitz in Zürich.

Im folgenden werde ich den Begriff „integrierbar" ausschließlich in dem ursprünglichen Riemannschen Sinne anwenden.

Ist die Funktion $f(x)$ für das Intervall $a \leqq x \leqq b$ definiert, so sind die Merkmale dafür, daß sie in diesem Intervalle integrierbar ist, bekanntlich die folgenden:

1) Die Funktionswerte liegen sämtlich zwischen zwei endlichen Zahlen, oder, was auf dasselbe hinauskommt, die obere und untere Grenze der Funktionswerte sind endlich.

2) Bezeichnen σ und ε zwei beliebig gegebene positive Zahlen, so läßt sich eine Teilung T des Intervalles $a \leqq x \leqq b$ in Stücke

$$\delta_1, \delta_2, \cdots, \delta_n \qquad (\delta_1 + \delta_2 + \cdots + \delta_n = b - a)$$

so herstellen, daß die Summe derjenigen Stücke, in welchen die Schwankung von $f(x)$ größer als σ ist, kleiner als ε ausfällt.

Diese Merkmale der Integrierbarkeit lassen sich, wie bekannt, in noch andere Fassungen bringen, worauf ich hier indessen nicht weiter einzugehen brauche*).

Dagegen erinnere ich noch an folgende auf den Begriff der Integrierbarkeit bezüglichen Sätze:

Jede in einem Intervalle $a \leqq x \leqq b$ stetige, oder auch nur abteilungsweise stetige Funktion ist in diesem Intervalle integrierbar. Und ferner:

Die in einem Intervall $a \leqq x \leqq b$ integrierbaren Funktionen bilden einen „Integritätsbereich"; d. h. Summe, Differenz und Produkt zweier integrierbaren Funktionen sind wieder integrierbare Funktionen.

*) Man vgl. etwa Dini, Grundlagen für eine Theorie der Funktionen einer veränderlichen reellen Grösse (Deutsch von Lüroth und Schepp. Leipzig 1892). Pasch, Ueber einige Punkte der Funktionentheorie, (diese Annalen Bd. 30, S. 132).

§ 1.

Es bezeichne nun $f(x)$ eine im Intervalle $0 \leqq x \leqq 2\pi$ integrierbare Funktion.

Durchläuft dann k alle ganzen Zahlen, so definieren die Gleichungen

$$(1) \qquad a_k = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(x)\cos kx\,dx, \qquad a_k' = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(x)\sin kx\,dx$$

ein unendliches System von Konstanten a_k, a_k', die durch die Funktion $f(x)$ eindeutig bestimmt sind. Diese Konstanten nenne ich die *Fourierschen Konstanten* der Funktion $f(x)$. Wenn ich weiterhin von den Fourierschen Konstanten irgend einer Funktion spreche, so versteht es sich von selbst, daß diese Funktion im Intervalle $0 \leqq x \leqq 2\pi$ integrierbar vorausgesetzt wird.

Da offenbar

$$(2) \qquad a_{-k} = a_k, \qquad a_{-k}' = -a_k'$$

ist, so genügt es, um die wesentlich verschiedenen unter den Fourierschen Konstanten zu erhalten, dem Index k alle nicht-negativen ganzzahligen Werte beizulegen.

Die entsprechenden Werte a_k, a_k' bilden die Koeffizienten der zu $f(x)$ gehörenden Fourierschen Reihe

$$\tfrac{1}{2}a_0 + (a_1\cos x + a_1'\sin x) + (a_2\cos 2x + a_2'\sin 2x) + \cdots.$$

Diese Reihe ist bekanntlich nur dann konvergent und zur Darstellung der Funktion $f(x)$ brauchbar, wenn diese Funktion gewissen Bedingungen genügt. Im Gebiete der integrierbaren Funktionen ist also die Anwendbarkeit der Fourierschen Reihen eine beschränkte. Dagegen ist der Begriff der Fourierschen Konstanten allgemein anwendbar. Deshalb schlage ich vor, für das Gebiet der integrierbaren Funktionen *an die Stelle der Theorie der Fourierschen Reihen die dieselbe umfassende Theorie der Fourierschen Konstanten zu setzen.*

Zur Abkürzung werde ich in der Folge

$$(3) \quad f(x) \sim \tfrac{1}{2}a_0 + (a_1\cos x + a_1'\sin x) + (a_2\cos 2x + a_2'\sin 2x) + \cdots$$

schreiben, um anzudeuten, daß die Größen $a_0, a_1, a_1', a_2, a_2', \cdots$ die Fourierschen Konstanten der Funktion $f(x)$ sind. Eine derartige „Äquivalenz" (3) geht in dem speziellen Falle in eine Gleichung über, in welchem die zu $f(x)$ gehörende Fouriersche Reihe convergiert und den Wert von $f(x)$ darstellt.

Zuweilen werde ich an Stelle der Äquivalenz (3) auch die folgende

$$(3') \qquad f(x) \sim \frac{1}{2} \sum_{-\infty}^{+\infty} (a_k \cos kx + a_k' \sin kx)$$

schreiben, welche wiederum nichts anderes besagen soll, als daß die in der Summe auftretenden Koeffizienten a_k, a_k' die Fourierschen Konstanten von $f(x)$ sind. In einer solchen Äquivalenz (3') werden daher die Koeffizienten a_k, a_k' stets den Bedingungen (2) genügen.

§ 2.

Die Fragen, die sich zunächst darbieten, sind die, wie sich aus den Fourierschen Konstanten zweier Funktionen $f(x)$ und $\varphi(x)$ die Fourierschen Konstanten ihrer Summe, ihrer Differenz und ihres Produktes ableiten lassen.

Bezüglich der Addition und Subtraktion zweier Funktionen leuchtet sofort ein, daß folgender Satz gilt:

Satz I. *Zwei Äquivalenzen*

$$f(x) \sim \frac{1}{2} \sum_{-\infty}^{+\infty} (a_k \cos kx + a_k' \sin kx),$$

$$\varphi(x) \sim \frac{1}{2} \sum_{-\infty}^{+\infty} (b_k \cos kx + b_k' \sin kx)$$

darf man addieren und subtrahieren, d. h. es folgt aus ihnen

$$f(x) \pm \varphi(x) \sim \frac{1}{2} \sum_{-\infty}^{+\infty} \left((a_k \pm b_k) \cos kx + (a_k' \pm b_k') \sin kx\right).$$

Was die Multiplikation zweier Funktionen $f(x)$ und $\varphi(x)$ angeht, so sind diejenigen Fälle leicht zu erledigen, in welchen eine der beiden Funktionen eine Konstante oder der Cosinus oder der Sinus eines Vielfachen des Argumentes x ist. Die betreffenden Gesetze drücken sich in folgenden Sätzen aus:

Satz II. *Eine Äquivalenz*

$$f(x) \sim \frac{1}{2} \sum_{-\infty}^{+\infty} (a_k \cos kx + a_k' \sin kx)$$

darf mit einer beliebigen Konstanten c multipliziert werden; d. h. es folgt aus ihr

$$cf(x) \sim \frac{1}{2} \sum_{-\infty}^{+\infty} (ca_k \cos kx + ca_k' \sin kx).$$

Satz III. *Aus der Äquivalenz*

$$f(x) \sim \frac{1}{2} \sum_{-\infty}^{+\infty} (a_k \cos kx + a_k' \sin kx)$$

folgen stets die nachstehenden:

$$f(x) \cos nx \sim \frac{1}{2} \sum_{-\infty}^{+\infty} \left(\frac{a_{k+n} + a_{k-n}}{2} \cos kx + \frac{a_{k+n}' + a_{k-n}'}{2} \sin kx \right),$$

$$f(x) \sin nx \sim \frac{1}{2} \sum_{-\infty}^{+\infty} \left(\frac{a_{k+n}' - a_{k-n}'}{2} \cos kx - \frac{a_{k+n} - a_{k-n}}{2} \sin kx \right).$$

Dabei bezeichnet n eine beliebige ganze Zahl.

Die letzteren Äquivalenzen gehen dadurch aus der Äquivalenz für $f(x)$ hervor, daß man diese mit $\cos nx$ bez. $\sin nx$ multipliziert und sodann auf der rechten Seite wieder nach Cosinus und Sinus der Vielfachen von x anordnet durch Anwendung der Identitäten

$$\cos nx \cos kx = \frac{1}{2} \cos (k-n)x + \frac{1}{2} \cos (k+n)x,$$

$$\cos nx \sin kx = \frac{1}{2} \sin (k-n)x + \frac{1}{2} \sin (k+n)x,$$

$$\sin nx \sin kx = \frac{1}{2} \cos (k-n)x - \frac{1}{2} \cos (k+n)x.$$

Auf Grund des Satzes III läßt sich nun die allgemeine Aufgabe, aus den Fourierschen Konstanten der Funktionen $f(x)$ und $\varphi(x)$ diejenigen ihres Produktes $f(x)\varphi(x)$ abzuleiten, sogleich bedeutend vereinfachen. Es genügt nämlich offenbar, wenn man die dem Index $k = 0$ entsprechende Fouriersche Konstante von $f(x)\varphi(x)$, also

$$\frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(x) \varphi(x) \, dx,$$

durch die Fourierschen Konstanten von $f(x)$ und $\varphi(x)$ auszudrücken versteht. Denn man kann dann auch für jedes ganzzahlige n

$$\frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(x) \varphi(x) \cos nx \, dx \quad \text{und} \quad \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(x) \varphi(x) \sin nx \, dx$$

durch die Fourierschen Konstanten von $f(x)$ und $\varphi(x)$ darstellen, weil nach Satz III die Fourierschen Konstanten von $\varphi(x) \cos nx$ und $\varphi(x) \sin nx$ durch diejenigen von $\varphi(x)$ ausdrückbar sind.

§ 3.

Die Bestimmung des Wertes von $\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(x)\,\varphi(x)\,dx$ durch die Fourierschen Konstanten von $f(x)$ und $\varphi(x)$ geschieht nun durch folgenden Satz, den ich seiner Wichtigkeit wegen als *Fundamentalsatz der Fourierschen Konstanten* bezeichnen will:

Satz IV. *Aus den Äquivalenzen*

$$(4)\quad \begin{cases} f(x) \sim \frac{1}{2}a_0 + (a_1\cos x + a_1'\sin x) + \cdots + (a_k\cos kx + a_k'\sin kx) + \cdots, \\ \varphi(x) \sim \frac{1}{2}b_0 + (b_1\cos x + b_1'\sin x) + \cdots + (b_k\cos kx + b_k'\sin kx) + \cdots \end{cases}$$

folgt die Gleichung

$$(5)\quad \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(x)\,\varphi(x)\,dx = \frac{1}{2}a_0b_0 + (a_1b_1 + a_1'b_1') + \cdots + (a_kb_k + a_k'b_k') + \cdots.$$

Dieser Satz enthält zwei Behauptungen: 1) die Reihe

$$\frac{1}{2}a_0b_0 + \sum_{k=1}^{\infty}(a_kb_k + a_k'b_k')$$

konvergiert; 2) die Summe dieser Reihe stimmt mit dem Werte von $\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(x)\,\varphi(x)\,dx$ überein. Es genügt übrigens, wie man leicht erkennt, den Beweis für den Fall zu führen, in welchem die beiden Funktionen $f(x)$ und $\varphi(x)$ identisch sind. Wenn man nämlich diesen speziellen Fall des Satzes auf die Funktionen $f(x) + \varphi(x)$ und $f(x) - \varphi(x)$ anwendet, so erhält man

$$(6)\quad \begin{cases} \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}[f(x)+\varphi(x)]^2dx = \frac{1}{2}(a_0+b_0)^2 + \sum_{k=1}^{\infty}\{(a_k+b_k)^2 + (a_k'+b_k')^2\}, \\ \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}[f(x)-\varphi(x)]^2dx = \frac{1}{2}(a_0-b_0)^2 + \sum_{k=1}^{\infty}\{(a_k-b_k)^2 + (a_k'-b_k')^2\} \end{cases}$$

und hieraus dann durch Subtraktion die Gleichung (5).

Der Fundamentalsatz wird also bewiesen sein, wenn gezeigt worden ist, daß aus der Äquivalenz

$$f(x) \sim \frac{1}{2} a_0 + \sum_{k=1}^{\infty} (a_k \cos kx + a_k' \sin kx)$$

die Gleichung

$$\frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} [f(x)]^2 dx = \frac{1}{2} a_0^2 + \sum_{k=1}^{\infty} (a_k^2 + a_k'^2) \tag{7}$$

folgt. Dieses zu zeigen, ist der Zweck der in den folgenden beiden Paragraphen angestellten Betrachtungen. Denselben schicke ich hier noch einige historische Bemerkungen über den Fundamentalsatz voraus.

Die Tatsache, daß durch Integration des Produktes der beiden Entwickelungen

$$f(x) = \frac{1}{2} a_0 + \sum_{k=1}^{\infty} (a_k \cos kx + a_k' \sin kx),$$

$$\varphi(x) = \frac{1}{2} b_0 + \sum_{k=1}^{\infty} (b_k \cos kx + b_k' \sin kx)$$

die Formel

$$\frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(x) \varphi(x) dx = \frac{1}{2} a_0 b_0 + \sum_{k=1}^{\infty} (a_k b_k + a_k' b_k')$$

hervorgeht, ist frühzeitig bemerkt worden. In Dirichlets Vorlesungen über bestimmte Integrale (herausgegeben von G. F. Meyer, Leipzig 1871) wird dieselbe (Seite 364) auf Parseval zurückgeführt*). Als ich nun bei Gelegenheit der Anwendung der Fourierschen Reihen auf gewisse geometrische Fragen veranlaßt wurde, den Gültigkeitsumfang der Parsevalschen Formel näher zu erforschen, war ich sehr überrascht von der Entdeckung, daß diese Formel gültig ist unter alleiniger Voraussetzung der Integrierbarkeit der Funktionen $f(x)$ und $\varphi(x)$ und also vom Verhalten der diesen Funktionen entsprechenden Fourierschen Reihen gänzlich unabhängig ist. Nachdem ich den hierin enthaltenen „Fundamentalsatz" in den Comptes Rendus de l'Academie des sciences de Paris vom 17. Juni 1901 mitgeteilt hatte, habe ich einen ausführlichen Beweis desselben in der Abhandlung: Sur quelques applications géométriques des séries de Fourier (Annales de l'École normale supérieure, t. 19, 1902) gegeben. Nun hat Herr Stekloff neuerdings (Comptes Rendus, 10. Nov. 1902)

*) Daß es sich dabei nur um Entwickelungen handelt, die ausschließlich Cosinusglieder enthalten, ist unwesentlich. Dem Berichte von H. Burkhardt über Reihenentwickelungen nach oscillierenden Funktionen (Leipzig 1903) entnehme ich das genauere Zitat: M. A. Parseval, sav. étr. t. 1, 1806.

darauf hingewiesen, daß der Fundamentalsatz schon 1896 von Herrn Liapounoff in den Mitteilungen der mathematischen Gesellschaft von Kharkow (t. VI, 13 déc. 1896, 20 janv., 7 mai 1896) ausgesprochen worden sei*).

Indessen hat Herr Liapounoff, wie ich durch eine gefällige briefliche Mitteilung des Herrn Stekloff erfahre, seine Untersuchungen nie veröffentlicht, so daß der von mir gegebene Beweis des Fundamentalsatzes bislang der einzige Beweis dieses merkwürdigen Satzes ist. Der neue Beweis, welchen ich in den folgenden Paragraphen entwickele, stützt sich auf eine bemerkenswerte Idee von L. Fejér**), die darin besteht, die successiven arithmetischen Mittel der Summenglieder einer Fourierschen Reihe in Betracht zu ziehen.

§ 4.

Es sei $f(x)$ eine in dem Intervalle $0 \leqq x \leqq 2\pi$ integrierbare Funktion und

$$f(x) \sim \frac{1}{2} a_0 + \sum_{k=1}^{\infty}{}' (a_k \cos kx + a_k' \sin kx). \tag{8}$$

Die Summenglieder der rechten Seite bezeichne ich mit

$$s_0 = \frac{1}{2} a_0, \quad s_n = \frac{1}{2} a_0 + \sum_{k=1}^{n}{}' (a_k \cos kx + a_k' \sin kx). \tag{9}$$

Bekanntlich ist dann für jeden Wert des Index n

$$s_n = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(u) \cdot \frac{\sin (2n+1) \frac{u-x}{2}}{\sin \frac{u-x}{2}} du \tag{10}$$

$$= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(u) \frac{\cos n(u-x) - \cos (n+1)(u-x)}{1 - \cos (u-x)} du.$$

*) Herr Stekloff erwähnt die Untersuchungen von Liapounoff auch schon in einer früheren Note (Comptes Rendus, 4 avril 1898). In einer Reihe interessanter Arbeiten hat Herr Stekloff selbst bemerkenswerte Verallgemeinerungen der Formel des Fundamentalsatzes entwickelt. Die Beweismethoden des Herrn Stekloff setzen voraus, daß die betreffenden Funktionen f solche integrierbare Funktionen sind, deren Unstetigkeiten eine nicht ausgedehnte Menge bilden. (Neuerdings hat jedoch Herr Stekloff, wie er mir in einem vom 13. Febr. 1903 datierten Briefe mitteilte, seine Methode so weit entwickelt, um sie auch auf beliebige integrierbare Funktionen anwenden zu können.)

**) Vgl. die Note: Sur les fonctions bornées et intégrables, Comptes Rendus, 10 décembre 1900. Eine ausführliche Darstellung seiner Untersuchungen hat Herr Fejér unter dem Titel „Vizgalatok A Fourier-Fele Sorok Körébol" in ungarischer Sprache veröffentlicht. (Budapest 1902.)

Nun betrachte ich weiter mit Herrn Fejér das arithmetische Mittel

$$S_n = \frac{1}{n}(s_0 + s_1 + s_2 + \cdots + s_{n-1}), \tag{11}$$

unter n eine beliebige positive ganze Zahl verstanden.

Aus den Gleichungen (9) und (10) ergeben sich die folgenden beiden Darstellungen von S_n:

$$S_n = \frac{1}{2}a_0 + \sum_{k=1}^{n} \frac{n-k}{n}(a_k \cos kx + a_k' \sin kx) \tag{12}$$

und

$$S_n = \frac{1}{2n\pi}\int_0^{2\pi} f(u) \cdot \frac{1 - \cos n(u-x)}{1 - \cos(u-x)}\, du. \tag{13}$$

In den Gleichungen (9) bis (13) bedeutet x einen beliebig in dem Intervalle $0 \leqq x \leqq 2\pi$ fixierten Wert.

Die Gleichung (13) wende ich zunächst auf den speziellen Fall an, in welchem die Funktion $f(x)$ den konstanten Wert 1 hat. Dann ist $\frac{1}{2}a_0 = 1$ und alle übrigen Konstanten a_k, a_k' sind Null. Folglich wird nach (12) beständig $S_n = 1$ und die Gleichung (13) gibt also

$$1 = \frac{1}{2n\pi}\int_0^{2\pi} \frac{1 - \cos n(u-x)}{1 - \cos(u-x)}\, du. \tag{14}$$

Durch Kombination von (13) und (14) finde ich

$$S_n - f(x) = \frac{1}{2n\pi}\int_0^{2\pi} [f(u) - f(x)] \cdot \frac{1 - \cos n(u-x)}{1 - \cos(u-x)}\, du. \tag{15}$$

Die Funktion $\frac{1 - \cos nv}{1 - \cos v}$ hat niemals einen negativen Wert und hieraus lassen sich einige wichtige Folgerungen für die Differenz $S_n - f(x)$ ableiten.

Es sei P die Schwankung von $f(x)$ im Intervalle $0 \leqq x \leqq 2\pi$. Dann wird für zwei beliebige, diesem Intervalle angehörige Werte u und x die Ungleichung

$$-P \leqq f(u) - f(x) \leqq +P$$

gelten. Diese Ungleichung werde mit $\frac{1}{2n\pi} \cdot \frac{1 - \cos n(u-x)}{1 - \cos(u-x)}$ multipliziert und nach u zwischen den Grenzen 0 und 2π integriert. Dadurch ergibt sich nach (14) und (15)

$$-P \leqq S_n - f(x) \leqq +P. \tag{16}$$

Der absolute Betrag von $S_n - f(x)$ wird also nie größer als die Schwankung P von $f(x)$ im Intervalle $0 \leqq x \leqq 2\pi$.

Ich betrachte nun ferner ein Stück

$$\delta = a \cdots b$$

des Intervalles $0 \cdots 2\pi$. Die Schwankung von $f(x)$ für dieses Stück δ sei gleich p. Dann ist offenbar für jedes dem Stücke δ angehörende Argument x

$$(17)\quad \left|\frac{1}{2n\pi}\int_a^b \big(f(u)-f(x)\big)\frac{1-\cos n(u-x)}{1-\cos(u-x)}\,du\right| \leqq \frac{1}{2n\pi}\,p\int_a^b \frac{1-\cos n(u-x)}{1-\cos(u-x)}\,du$$

$$\leqq \frac{1}{2n\pi}\,p\int_0^{2\pi} \frac{1-\cos n(u-x)}{1-\cos(u-x)}\,du = p.$$

Jetzt sei

$$\delta' = a' \cdots b'$$

ein in das Stück δ eingeschachteltes Stück, so daß

$$a < a' < b' < b$$

ist, und es bedeute x einen beliebig in dem Stücke δ' angenommenen Argumentenwert.

Ferner werde das Integral in (15) nach folgendem Schema zerlegt:

$$(18)\qquad S_n - f(x) = \frac{1}{2n\pi}\int_0^a + \frac{1}{2n\pi}\int_b^{2\pi} + \frac{1}{2n\pi}\int_a^b.$$

Wenn nun u im Intervalle $0 \cdots a$ und x im Intervalle $a' \cdots b'$ variiert, so bleibt $1-\cos(u-x)$ beständig größer als eine feste positive Zahl, während $1-\cos n(u-x)$ beständig kleiner als 2 bleibt. Daher kann das erste Glied der rechten Seite von (18) durch Vergrößerung von n unter jede noch so kleine Zahl herabgedrückt werden, und dasselbe gilt offenbar von dem zweiten Gliede.

In Rücksicht auf (17) folgt daher:

Bezeichnet η eine beliebig klein gewählte positive Zahl, so wird von einem geeigneten Index n ab

$$(19)\qquad |S_n - f(x)| < p + \eta$$

sein, und zwar für jedes Argument x, welches dem Stücke δ' angehört.

Nunmehr gelingt es leicht, zu zeigen, daß das Integral

$$(20)\qquad J_n = \int_0^{2\pi} [S_n - f(x)]^2\,dx$$

mit unbegrenzt wachsendem n unendlich klein wird.

In der Tat seien ε und σ zwei beliebig gewählte positive Zahlen. Dann kann man eine Teilung T des Intervalles $0 \cdots 2\pi$ in Stücke so

herstellen, daß die Summe derjenigen Stücke, in welchen die Schwankung von $f(x)$ größer als σ ist, kleiner als ε ausfällt.

Diejenigen Stücke der Teilung T, in welchen die Schwankung von $f(x)$ größer als σ ist, will ich mit Δ, die übrigen Stücke, in welchen jene Schwankung kleiner oder gleich σ ist, mit δ bezeichnen. Indem ich in jedes Stück δ ein Stück δ' einschachtele, zerlege ich die Stücke δ in die Stücke δ' und die Stücke δ''. Die Stücke δ' wähle ich so wenig von den Stücken δ verschieden, daß die Summe der Stücke δ'' kleiner als ε ausfällt.

Nun setze ich das Integral J_n in die Form

$$J_n = \sum_{\delta'} \int_{\delta'} [S_n - f(x)]^2 dx + \sum_{\delta''} \int_{\delta''} [S_n - f(x)]^2 dx + \sum_{\Delta} \int_{\Delta} [S_n - f(x)]^2 dx.$$

Bezeichnet η eine beliebig gewählte positive Zahl, so ist in den Integralen der ersten Summe

$$|S_n - f(x)| < \sigma + \eta,$$

sobald n einen gewissen Index überschritten hat; in den Integralen der zweiten und dritten Summe ist

$$|S_n - f(x)| \leqq P.$$

Daher wird dann

$$J_n < (\sigma+\eta)^2 \sum_{\delta'} \delta' + P^2 \sum_{\delta''} \delta'' + P^2 \sum_{\Delta} \Delta$$

und folglich, da $\sum \delta' < 2\pi$ ist, schließlich

$$J_n < 2\pi (\sigma+\eta)^2 + 2P^2\varepsilon,$$

und zwar gilt diese Ungleichung von einem geeignet gewählten Index n ab. Da nun ε, σ, η beliebig klein gewählt werden können, so folgt

$$\lim_{n=\infty} J_n = 0, \tag{21}$$

wie behauptet wurde.

§ 5.

Das Integral J_n ist ein spezieller Fall des Integrales

$$\int_0^{2\pi} \left[f(x) - \frac{1}{2} c_0 a_0 - \sum_{k=1}^{n} (c_k a_k \cos kx + c_k' a_k' \sin kx) \right]^2 dx. \tag{22}$$

Letzteres Integral geht nämlich nach Gleichung (12) in J_n über, wenn

$$c_0 = 1, \quad c_k = c_k' = \frac{n-k}{n}$$

genommen wird. Entwickelt man das im Integral (22) auftretende Quadrat und integriert sodann gliedweise, so erhält man für das Integral den Ausdruck

$$(23)\qquad \int_0^{2\pi}[f(x)]^2dx-\pi\left[\frac{1}{2}c_0(2-c_0)a_0^2+\sum_{k=1}^{n}\left(c_k(2-c_k)a_k^2+c_k'(2-c_k')a_k'^2\right)\right].$$

Seiner Entstehung nach kann dieser Ausdruck niemals negativ sein.

Aus (23) folgt insbesondere

$$(24)\qquad J_n=\int_0^{2\pi}[f(x)]^2dx-\pi\left[\frac{1}{2}a_0^2+\sum_{k=1}^{n}\frac{n^2-k^2}{n^2}(a_k^2+a_k'^2)\right].$$

Bezeichnet ferner i_n denjenigen Wert des Integrals (22), welcher der Annahme

$$c_0=c_k=c_k'=1$$

entspricht, so wird*)

$$(25)\qquad i_n=\int_0^{2\pi}[f(x)]^2dx-\pi\left[\frac{1}{2}a_0^2+\sum_{k=1}^{n}(a_k^2+a_k'^2)\right].$$

Der Vergleich von (24) und (25) ergibt

$$J_n=i_n+\frac{\pi}{n^2}\sum_{k=1}^{n}k^2(a_k^2+a_k'^2).$$

Nun sind hier die beiden Glieder der rechten Seite wesentlich positiv und es folgt daher aus der Gleichung $\operatorname{Lim}_{n=\infty} J_n=0$, daß sowohl

$$(26)\qquad \operatorname{Lim}_{n=\infty} i_n=0,$$

als auch

$$(27)\qquad \operatorname{Lim}_{n=\infty}\frac{1}{n^2}\sum_{k=1}^{n}k^2(a_k^2+a_k'^2)=0$$

ist. Die Gleichung (26) enthält den Fundamentalsatz; denn sie besagt nach (25), daß

$$\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}[f(x)]^2dx=\frac{1}{2}a_0^2+\sum_{k=1}^{\infty}(a_k^2+a_k'^2)$$

ist.

*) Vgl. Harnack, Über die trigonometrische Reihe und die Darstellung willkürlicher Funktionen. (Diese Annalen Bd. 17, S. 125.)

Dagegen enthält die Gleichung (27) keine besondere Eigenschaft der Fourierschen Konstanten. Vielmehr gilt für *jede* konvergierende Reihe

$$c_1 + c_2 + c_3 + \cdots + c_n + \cdots$$

die Gleichung

$$\operatorname{Lim}_{n=\infty} \frac{1}{n^2} (c_1 + 4c_2 + 9c_3 + \cdots + n^2 c_n) = 0,$$

wie man nach bekannten Prinzipien beweist*).

Hervorheben will ich noch, daß die rechte Seite in der Gleichung

$$\frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(x)\, \varphi(x)\, dx = \frac{1}{2} a_0 b_0 + (a_1 b_1 + a_1' b_1') + \cdots + (a_k b_k + a_k' b_k') + \cdots$$

eine *absolut* konvergierende Reihe ist, selbst wenn man die Terme $a_k b_k$ und $a_k' b_k'$ des allgemeinen Gliedes von einander trennt, also die Reihe als aus den Gliedern

$$\frac{1}{2} a_0 b_0,\ a_1 b_1,\ a_1' b_1',\ \cdots,\ a_k b_k,\ a_k' b_k',\ \cdots$$

zusammengesetzt ansieht. Denn die Reihe entsteht durch Subtraktion derjenigen beiden Reihen, die in den Gleichungen (6) auftreten. Diese Reihen enthalten aber nur positive Glieder und sind folglich absolut konvergent.

§ 6.

Wie ich schon oben am Schluß von § 2 bemerkt habe, gestattet es der Fundamentalsatz, die Aufgabe zu lösen, aus den Fourierschen Konstanten von $f(x)$ und $\varphi(x)$ diejenigen des Produktes $f(x)\varphi(x)$ zu bestimmen. Die Ausführung der hierfür notwendigen Rechnungen führt zu folgendem Ergebnis:

Satz V. *Aus den Äquivalenzen*

$$\begin{cases} f(x) \sim \frac{1}{2} a_0 + \sum_{k=1}^{\infty} (a_k \cos kx + a_k' \sin kx), \\ \varphi(x) \sim \frac{1}{2} b_0 + \sum_{k=1}^{\infty} (b_k \cos kx + b_k' \sin kx) \end{cases}$$

folgt die neue Äquivalenz

$$f(x)\varphi(x) \sim \frac{1}{2} c_0 + \sum_{k=1}^{\infty} (c_k \cos kx + c_k' \sin kx),$$

*) Siehe z. B. Borel, Leçons sur les séries divergentes, p. 93 (Paris, 1901).

in welcher die Konstanten c_k, c_k' durch die nachstehenden Gleichungen definiert sind:

$$\begin{cases} c_0 = \frac{1}{2} a_0 b_0 + \sum_{k=1}^{\infty} (a_k b_k + a_k' b_k'), \\ c_n = \frac{1}{2} a_0 b_n + \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{\infty} \left(a_k (b_{k+n} + b_{k-n}) + a_k' (b_{k+n}' + b_{k-n}') \right), \\ c_n' = \frac{1}{2} a_0 b_n' + \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{\infty} \left(a_k (b_{k+n}' - b_{k-n}') - a_k' (b_{k+n} - b_{k-n}) \right). \end{cases}$$

Diese Gleichungen erhält man durch Anwendung des Fundamentalsatzes auf die beiden Funktionen $f(x)$ und $\varphi(x) \cos nx$ bezüglich $f(x)$ und $\varphi(x) \sin nx$.

Die Reihen, durch welche die Koeffizienten c_n und c_n' ausgedrückt sind, konvergieren absolut. Man darf in ihnen überdies, unbeschadet ihres Wertes, die a_k mit den b_k und gleichzeitig die a_k' mit den b_k' vertauschen, da dieses auf eine Vertauschung der beiden Funktionen $f(x)$ und $\varphi(x)$ hinauskommt.

§ 7.

Eine weitere Anwendung gestattet der Fundamentalsatz auf die Frage der Integration der Äquivalenzen. Es seien x_0 und x_1 zwei dem Intervalle $0 \cdots 2\pi$ angehörende Argumente, also

$$0 \leqq x_0 < x_1 \leqq 2\pi.$$

Ferner sei die Funktion $\varphi(x)$ durch die Festsetzung definiert, daß $\varphi(x)$ den Wert 1 oder 0 besitzen soll, je nachdem x dem Intervalle $x_0 \cdots x_1$ angehört oder nicht.

Die Fourierschen Konstanten von $\varphi(x)$ haben die Werte

$$b_k = \frac{1}{\pi} \int_{x_0}^{x_1} \cos kx \, dx = \begin{cases} \frac{1}{\pi} (x_1 - x_0), & \text{wenn } k = 0 \text{ ist,} \\ \frac{1}{\pi k} (\sin kx_1 - \sin kx_0), & \text{wenn } k \text{ von Null verschieden ist,} \end{cases}$$

$$b_k' = \frac{1}{\pi} \int_{x_0}^{x_1} \sin kx \, dx = -\frac{1}{\pi k} (\cos kx_1 - \cos kx_0).$$

Wenn nun auf diese Funktion $\varphi(x)$ und irgend eine integrierbare Funktion $f(x)$ der Fundamentalsatz angewendet wird, so ergibt sich:

Satz VI: *Aus der Äquivalenz*

$$f(x) \sim \frac{1}{2} a_0 + \sum_{k=1}^{\infty} (a_k \cos kx + a_k' \sin kx)$$

folgt die Gleichung

$$\int_{x_0}^{x_1} f(x)\,dx$$

$$= \frac{1}{2} a_0 (x_1 - x_0) + \sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{a_k}{k} (\sin kx_1 - \sin kx_0) - \frac{a_k'}{k} (\cos kx_1 - \cos kx_0) \right),$$

wobei x_0 und x_1 zwei beliebige Werte im Intervalle $0 \cdots 2\pi$ bedeuten.

Mit anderen Worten: durch gliedweise Integration einer Äquivalenz entsteht eine richtige Gleichung.

Setzt man $x_0 = 0$ und schreibt x statt x_1, so kommt

$$\int_0^x f(x)\,dx = \frac{1}{2} a_0 x + \sum_{k=1}^{\infty} \left[\frac{a_k}{k} \sin kx - \frac{a_k'}{k} (\cos kx - 1) \right], \tag{28}$$

$$(0 \leqq x \leqq 2\pi.)$$

Nach der Bemerkung am Schluß von § 5 konvergiert die Reihe auf der rechten Seite dieser Gleichung für jeden Wert von x absolut. Dasselbe gilt auch von der Summe

$$A = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{a_k'}{k}, \tag{29}$$

wie man durch folgende Betrachtung erkennt. Für die Funktion $\frac{1}{2}(\pi - x)$ erhält man die Äquivalenz:

$$\frac{1}{2} (\pi - x) \sim \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k} \sin kx, \tag{30}$$

welche für die zwischen 0 und 2π liegenden Werte von x auch durch die Gleichung

$$\frac{1}{2} (\pi - x) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k} \sin kx \tag{31}$$

ersetzt werden darf. Wenn man nun auf die Funktionen $f(x)$ und $\frac{1}{2}(\pi - x)$ den Fundamentalsatz anwendet, so ergibt sich

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} (\pi - x) f(x)\,dx = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{a_k'}{k} = A. \tag{32}$$

Die Gleichung (28) läßt sich mit Hilfe von (29) auch so schreiben:

$$(33)\quad \int_0^x f(x)\,dx = A + \frac{1}{2}a_0 x + \sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{a_k}{k}\sin kx - \frac{a_k'}{k}\cos kx\right), \quad (0\leqq x\leqq 2\pi)$$

wo wiederum die rechte Seite absolut konvergiert. Endlich entsteht durch Kombination dieser Gleichung mit (31)

$$(34)\quad \int_0^x f(x)\,dx = A + \frac{1}{2}a_0\pi + \sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{a_k - a_0}{k}\sin kx - \frac{a_k'}{k}\cos kx\right), \quad (0<x<2\pi).$$

Die vorstehende Gleichung enthält die Tatsache, daß das Integral einer integrierbaren Funktion immer in eine trigonometrische Reihe entwickelbar ist*). Daß diese Reihe eine Fouriersche ist, daß also die Gleichung (34) auch als Äquivalenz gelesen werden darf, folgt aus bekannten Sätzen oder auch direkt durch Berechnung der Fourierschen Konstanten der Funktion $\int_0^x f(x)\,dx$. Diese Konstanten haben nämlich die Werte

$$\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}\cos ku\,du\int_0^u f(x)\,dx = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(x)\,dx\int_x^{2\pi}\cos ku\,du,$$

$$\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}\sin ku\,du\int_0^u f(x)\,dx = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(x)\,dx\int_x^{2\pi}\sin ku\,du,$$

deren weitere Ausrechnung unmittelbar auf die Koeffizienten der Reihenentwickelung (34) führt.

Ich will jetzt annehmen, daß die Fouriersche Entwickelung der Funktion

$$(35)\qquad F(x) = C + \int_0^x f(x)\,dx,$$

wo C eine beliebig gewählte konstante Größe bezeichnet, bekannt sei. Dieselbe laute:

$$(36)\qquad F(x) = \frac{1}{2}A_0 + \sum_{k=1}^{\infty}(A_k\cos kx + A_k'\sin kx) \quad (0<x<2\pi).$$

Dann ist es leicht, die Fourierschen Konstanten von $f(x)$ zu bestimmen. Der Vergleich mit (34) ergibt nämlich

$$a_k' = -kA_k, \quad a_k - a_0 = kA_k',$$

*) Vgl. C. Jordan, Cours d'Analyse, t. I, 68 und t. II, 211.

während a_0 durch

$$a_0 = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(x)\,dx = \frac{1}{\pi}\big(F(2\pi) - F(0)\big)$$

bestimmt ist. Wenn nun, wie üblich, die Funktion $F(x)$ als das unbestimmte Integral $\int f(x)\,dx$ der Funktion $f(x)$ bezeichnet wird, so kann man hiernach folgenden Satz aussprechen:

Satz VII: *Ist* $F(x) = \int f(x)\,dx$ *das unbestimmte Integral der integrierbaren Funktion* $f(x)$ *und*

$$F(x) = \frac{1}{2}A_0 + \sum_{k=1}^{\infty}(A_k \cos kx + A_k' \sin kx) \qquad (0<x<2\pi)$$

ihre Fouriersche Entwickelung, so ist

$$f(x) \sim \frac{1}{2}a_0 + \sum_{k=1}^{\infty}\big((kA_k' + a_0)\cos kx - kA_k \sin kx\big),$$

unter a_0 *die Konstante*

$$a_0 = \frac{1}{\pi}\big(F(2\pi) - F(0)\big)$$

verstanden.

Dieser Satz zeigt insbesondere, daß die Äquivalenz für $f(x)$ stets und nur dann durch gliedweise Differentiation der Entwickelung (36) für das unbestimmte Integral $F(x) = \int f(x)\,dx$ hervorgeht, wenn $F(2\pi) = F(0)$ ist. Diese Bedingung kommt offenbar auf die andere hinaus, daß es möglich sein muß die Funktion $F(x)$ über das Intervall $0 \leqq x \leqq 2\pi$ so auf alle reelle Werte von x fortzusetzen, daß die entstehende Funktion durchaus stetig ist und die Periode 2π besitzt.

§ 8.

Die Ergebnisse des vorigen Paragraphen gestatten es, die Frage zu erledigen, in wie weit eine im Intervalle $0 \cdots 2\pi$ integrierbare Funktion durch die Werte ihrer Fourierschen Konstanten bestimmt ist. Besitzt die Funktion $f_2(x)$ dieselben Fourierschen Konstanten wie die Funktion $f_1(x)$, so sind die Fourierschen Konstanten von

$$f(x) = f_2(x) - f_1(x)$$

sämtlich Null und umgekehrt. Sind aber die Fourierschen Konstanten von $f(x)$ Null, so folgt aus dem Satze VI, daß für zwei beliebige Werte x_0 und x_1 des Intervalles $0 \cdots 2\pi$ das Integral $\int_{x_0}^{x_1} f(x)\,dx$ verschwindet.

Die Funktion $f(x)$ ist also dann eine Funktion „vom Integrale Null". Ich will nun zeigen, daß auch umgekehrt jede Funktion vom Integrale Null Fouriersche Konstanten besitzt, die sämtlich verschwinden. Zu dem Zwecke beweise ich zunächst folgenden Satz*):

Eine in dem Intervalle $a \cdots b$ integrierbare Funktion ist für dieses Intervall eine Funktion vom Integrale Null stets und nur dann, wenn sie der Bedingung genügt, daß ihre Nullstellen im Intervalle $a \cdots b$ überall dicht sind.

Daß diese Bedingung hinreichend ist, leuchtet unmittelbar ein. Daß sie notwendig ist, erkennt man folgendermaßen: Bekanntlich sind die Stetigkeitsstellen einer im Intervalle $a \leqq x \leqq b$ integrierbaren Funktion $f(x)$ in diesem Intervalle überall dicht. Wenn nun $f(x)$ vom Integrale Null ist, so muß jede Stetigkeitsstelle zugleich eine Nullstelle von $f(x)$ sein. Denn wäre $f(x)$ an einer Stetigkeitsstelle von Null verschieden, so ließe sich offenbar um dieselbe ein Intervall so klein abgrenzen, daß das auf dieses Intervall bezügliche Integral $\int f(x)\,dx$ nicht Null ist.

Aus dem vorstehenden Satze folgt nun, daß das Produkt einer Funktion vom Integrale Null und einer beliebigen integrierbaren Funktion wieder eine Funktion vom Integrale Null ist.

Daher sind die Fourierschen Konstanten

$$a_k = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(x)\cos kx\,dx, \quad a_k' = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(x)\sin kx\,dx$$

sämtlich Null, wenn $f(x)$ vom Integrale Null ist.

Hiernach gilt nun folgender Satz:

Satz VIII. *Unter den im Intervalle $0 \cdots 2\pi$ integrierbaren Funktionen haben die Funktionen vom Integrale Null und nur diese die Eigenschaft, daß ihre Fourierschen Konstanten sämtlich Null sind. Durch ihre Fourierschen Konstanten ist eine Funktion im Intervalle $0 \cdots 2\pi$ also bis auf eine additive Funktion vom Integrale Null bestimmt.*

Aus der Ungleichung (19) in § 4 folgt leicht, daß für eine Stetigkeitsstelle x der Funktion $f(x)$ stets $\lim_{n=\infty}(S_n - f(x)) = 0$, d. h.

$$(37) \qquad f(x) = \lim_{n=\infty}\left(\frac{1}{2}a_0 + \sum_{k=1}^{n}{}' \frac{n-k}{k}(a_k\cos kx + a_k'\sin kx)\right)$$

ist. Die Werte von $f(x)$ an den Stetigkeitsstellen sind daher durch die

*) Pasch, a. a. O. S. 151.

Fourierschen Konstanten von $f(x)$ eindeutig bestimmt und nach der vorstehenden Gleichung zu berechnen. Dieser merkwürdige Satz rührt von Fejér her*).

§ 9.

Wenn in der Reihe der Fourierschen Konstanten einer Funktion einige Anfangsglieder verschwinden, so läßt sich hieraus eine Folgerung betreffend die Art des Verlaufes der Funktion im Intervalle $0 \cdots 2\pi$ ziehen. Dieses zu zeigen ist der Zweck der folgenden Betrachtungen.

Das Intervall $0 \cdots 2\pi$ werde in $2n+1$ Stücke

$$\delta_1, \delta_2, \cdots, \delta_{2n+1}$$

zerlegt. Die Begrenzungspunkte des Stückes δ_i seien die Punkte $x = x_{i-1}$ und $x = x_i$; es ist dann $x_0 = 0$, $x_{2n+1} = 2\pi$. Die Stücke $\delta_1, \delta_2, \cdots, \delta_{2n}$ sollen von nicht verschwindender Länge sein; dagegen soll der Fall, in welchem δ_{2n+1} verschwindende Länge hat (also $x_{2n} = x_{2n+1} = 2\pi$ ist) nicht ausgeschlossen werden. In jedem Falle ist also

$$0 = x_0 < x_1 < x_2 < \cdots < x_{2n} \leqq x_{2n+1} = 2\pi.$$

Die Konstanten $c_0, c_1, c_1', \cdots, c_n, c_n'$ lassen sich nun so bestimmen, daß sie nicht sämtlich Null sind und daß die Funktion

$$(38) \quad \varphi(x) = \frac{1}{2} c_0 + (c_1 \cos x + c_1' \sin x) + \cdots + (c_n \cos nx + c_n' \sin nx)$$

der Bedingung genügt, für $x = x_1$, $x = x_2, \cdots, x = x_{2n}$ zu verschwinden. Denn diese Bedingung ergibt $2n$ lineare und homogene Gleichungen für die $2n+1$ Konstanten $c_0, c_1, c_1', \cdots, c_n, c_n'$.

Die Gleichung $\varphi(x) = 0$ hat dann in dem Intervalle $0 < x \leqq 2\pi$ außer den $2n$ Nullstellen $x_1, x_2, \cdots, x_{2n}$ keine weiteren, weil sie vermöge der Substitutionen

$$\cos kx = \frac{1}{2}(e^{kix} + e^{-kix}), \quad \sin kx = \frac{1}{2i}(e^{kix} - e^{-kix})$$

in eine algebraische Gleichung höchstens $2n^{\text{ten}}$ Grades für e^{ix} übergeht.

Daher hat $\varphi(x)$ innerhalb der einzelnen Stücke $\delta_1, \delta_2, \cdots$ konstantes Zeichen, welches beim Übergang von einem Stück zum nächstfolgenden wechselt, und offenbar im Stück δ_1 als das positive Zeichen vorausgesetzt werden darf.

Wenn nun das Intervall $0 \cdots 2\pi$ in m Stücke

$$(39) \qquad \delta_1, \delta_2, \cdots, \delta_m$$

von nicht verschwindenden Längen zerlegt worden ist, so kann man für $m = 2n+1$ die oben betrachteten Stücke $\delta_1, \delta_2, \cdots, \delta_{2n+1}$ mit den

*) Vgl. die obigen Zitate.

Stücken (39) identifizieren, für $m = 2n$ aber die oben betrachteten Stücke $\delta_1, \delta_2, \cdots, \delta_{2n}$ mit den Stücken (39) und das letzte Stück δ_{2n+1} von verschwindender Länge annehmen. Also gilt der Satz:

„Hat man das Intervall $0 \cdots 2\pi$ in m Stücke $\delta_1, \delta_2, \cdots, \delta_m$ zerlegt und bedeutet n die größte in $\frac{m}{2}$ enthaltene ganze Zahl, so kann man die Funktion $\varphi(x)$ (vgl. (38)) so bestimmen, daß sie im Innern des Stückes δ_1 nur positive Werte, im Innern des Stückes δ_2 nur negative Werte, im Innern des Stückes δ_3 wieder nur positive Werte u. s. f. annimmt."

Nunmehr betrachte ich eine im Intervalle $0 \cdots 2\pi$ integrierbare Funktion $f(x)$, die jedoch nicht eine Funktion vom Integrale Null sein soll. Überdies mache ich die Voraussetzung, daß sich das Intervall $0 \cdots 2\pi$ in eine endliche Anzahl m von Stücken (39) so zerlegen läßt, daß die von Null verschiedenen Werte, welche $f(x)$ annimmt, im einzelnen Stücke δ_i ein konstantes Vorzeichen besitzen, welches beim Übergange von einem Stücke zum nächstfolgenden wechselt. Zur Abkürzung will ich die Zahl m als *„Ansahl der Strecken konstanten Zeichens der Funktion $f(x)$"* bezeichnen.

Bedeutet jetzt $\varphi(x)$ die im vorigen Satze erwähnte Funktion (38) und ε einen geeignet gewählten unter den beiden Faktoren $+1$ und -1, so wird $\varepsilon f(x)\varphi(x)$ im Intervalle $0 \cdots 2\pi$ niemals negativ und hieraus folgt leicht, daß das Integral

$$J = \int_0^{2\pi} \varepsilon f(x)\varphi(x)\,dx$$

einen von Null verschiedenen positiven Wert besitzt. In der Tat muß es unter den das Intervall $0 \cdots 2\pi$ überall dicht erfüllenden Stetigkeitsstellen von $f(x)$ im Innern eines der Stücke $\delta_1, \delta_2, \cdots, \delta_m$ mindestens eine geben, für welche $f(x)$ nicht Null ist. Denn sonst würde $f(x)$ eine Funktion vom Integrale Null sein. In einem genügend klein um eine solche Stetigkeitsstelle abgegrenzten Intervalle $r \cdots s$ bleibt $\varepsilon f(x)\varphi(x)$ größer als eine feste positive Zahl. Folglich ist

$$J \geqq \int_r^s \varepsilon f(x)\varphi(x)\,dx > 0,$$

wie behauptet wurde.

Nun sei

$$f(x) \sim \tfrac{1}{2}a_0 + (a_1 \cos x + a_1' \sin x) + (a_2 \cos 2x + a_2' \sin 2x) + \cdots.$$

Dann ist nach dem Fundamentalsatze

$$J = \varepsilon\pi\left\{\frac{1}{2}a_0c_0 + a_1c_1 + a_1'c_1' + \cdots + a_nc_n + a_n'c_n'\right\}$$

und es können daher die Konstanten $a_0, a_1, a_1', \cdots, a_n, a_n'$ nicht sämtlich Null sein.

Wenn also die Konstanten $a_0, a_1, a_1', \cdots, a_{k-1}, a_{k-1}'$ Null sind, so ist notwendig

$$n \geqq k$$

und folglich, da n die größte in $\frac{m}{2}$ enthaltene ganze Zahl bedeutet, die Zahl m mindestens gleich $2k$.

Es gilt demnach der

Satz IX: *Sind in der Reihe der Fourierschen Konstanten*

$$a_0, a_1, a_1', a_2, a_2', \cdots$$

der Funktion $f(x)$ einige Anfangsglieder Null und bezeichnet k den ersten Index, für welchen a_k und a_k' nicht mehr beide Null sind, so ist die Anzahl der Strecken konstanten Zeichens der Funktion $f(x)$ im Intervalle $0 \cdots 2\pi$ mindestens $2k$.

Dabei ist vorausgesetzt, daß die Anzahl der Strecken konstanten Zeichens der Funktion $f(x)$ endlich ist. Fügt man den Voraussetzungen des vorstehenden Satzes die weitere hinzu, daß $f(x)$ im Intervalle $0 \cdots 2\pi$ stetig ist, so wird dann $f(x)$ im Inneren dieses Intervalles mindestens $2k - 1$ Nullstellen besitzen. Man kann aber noch einen Schritt weiter gehen, wenn man die Annahme macht, daß $f(x)$ für *alle* Werte des Argumentes stetig ist und die Periode 2π besitzt. In diesem Falle verschwindet nämlich $f(x)$ im Intervalle $0 \leqq x < 2\pi$ mindestens $2k$ Mal.

Dies ist unmittelbar klar, wenn $f(x)$ für $x = 0$ verschwindet. Wenn aber $f(0)$ nicht Null ist, so besitzt $f(x)$ in der Nähe von $x = 0$ dasselbe Vorzeichen, wie in der Nähe von $x = 2\pi$. Daher ist dann die Anzahl der Strecken konstanten Zeichens von $f(x)$ im Intervalle $0 \cdots 2\pi$ notwendig ungerade, und da diese Anzahl mindestens $2k$ beträgt, so ist der kleinste Wert, den sie haben kann, $2k + 1$. Folglich verschwindet nun $f(x)$ im Innern des Intervalles $0 \cdots 2\pi$ mindestens $2k$ Mal.

Als spezielles Beispiel erwähne ich den von Sturm herrührenden Satz, nach welchem die Gleichung:

$$(a_k \cos kx + a_k' \sin kx) + \cdots + (a_m \cos mx + a_m' \sin mx) = 0$$

im Intervalle $0 \leqq x < 2\pi$ mindestens $2k$ Wurzeln besitzt*).

Ein interessantes Beispiel für den allgemeinen Satz IX bietet die Theorie der Kugelfunktionen. Es bezeichne nämlich $P^{(n)}$ die n^{te} Kugel-

*) Liouville's Journal, Bd. I.

funktion, ferner ν die Konstante $\frac{\pi}{4} \cdot \frac{(2^n \cdot n!)^2}{(2n+1)!}$. Man definiere dann $f(x)$ für das Intervall $0 \leqq x \leqq 2\pi$ durch folgende Bestimmungen:

$$f(x) = \nu P^{(n)}(\cos x), \quad \text{für } 0 \leqq x < \pi,$$
$$f(x) = -f(2\pi - x), \quad \text{für } \pi < x \leqq 2\pi,$$
$$f(\pi) = 0.$$

Die Fouriersche Entwickelung dieser Funktion $f(x)$ lautet nun nach Heine*):

$$(40) \qquad f(x) = \sin(n+1)x + \frac{1 \cdot (n+1)}{1 \cdot (2n+3)} \sin(n+3)x + \frac{1 \cdot 3 \cdot (n+1)(n+2)}{1 \cdot 2 \cdot (2n+3)(2n+5)} \sin(n+5)x + \cdots.$$

Nach Satz IX ist daher die Anzahl der Strecken konstanten Zeichens von $f(x)$ im Intervall $0 \cdots 2\pi$ mindestens $2n+2$ und folglich (wegen $f(x) = -f(2\pi - x)$) mindestens $n+1$ im Intervalle $0 \cdots \pi$. Das heißt aber: $P^{(n)}(\cos x)$ verschwindet mindestens n Mal, wenn $\cos x$ die zwischen -1 und $+1$ liegenden Werte durchläuft. Die Entwickelung (40) setzt also unmittelbar die Tatsache in Evidenz, daß die Nullstellen der Kugelfunktion $P^{(n)}$ sämtlich reell, von einander verschieden und zwischen -1 und $+1$ enthalten sind.

Zugleich zeigt dieses Beispiel, daß die im Satze IX angegebene untere Grenze $2k$ für die Anzahl der Strecken konstanten Zeichens die *genaue* untere Grenze ist, in dem Sinne, daß es unter den Funktionen $f(x)$, welche den Bedingungen des Satzes IX genügen, auch solche gibt, für welche die Anzahl der Strecken konstanten Zeichens im Intervalle $0 \cdots 2\pi$ genau gleich $2k$ ist.

Schließlich will ich bezüglich der Entwickelung (40) noch bemerken, daß die einfachste Quelle derselben die Differentialgleichung

$$f'' \sin x + f' \cos x + n(n+1) f \sin x = 0$$

sein dürfte, welcher $f(x)$ im Intervall $0 < x < \pi$ genügt. Integriert man diese Gleichung, nachdem man sie mit $2 \cos rx$ multipliziert hat, über das Intervall $0 \cdots \pi$, so ergibt sich nach leichten Umformungen

$$(n-r)(n+r+1) \int_0^\pi f(x) \sin(r+1)x \, dx = (n-r+1)(n+r) \int_0^\pi f(x) \sin(r-1)x \, dx$$
$$(r = 0, 1, 2, \cdots).$$

Durch diese Rekursionsformel sind die Koeffizienten der Entwickelung (40) offenbar bis auf einen allen gemeinsamen Faktor bestimmt. Dieses Verfahren

*) Handbuch der Kugelfunktionen (Berlin 1878) Bd. I, Seite 89.

läßt sich unmittelbar verallgemeineren und ergibt einige weitere Fouriersche Entwickelungen von einfachem Bildungsgesetz, wenn man es auf die Funktion $F\left(\alpha, \beta, \gamma, \sin^2\left(\frac{x}{2}\right)\right)$ anwendet, unter $F(\alpha, \beta, \gamma, x)$ wie üblich die Gaußsche hypergeometrische Reihe verstanden. Entwickelungen dieser Art gibt Kummer im letzten Paragraphen seiner bekannten Abhandlung über die hypergeometrische Reihe (Crelle's Journal, Bd. 15, S. 168). Doch scheint mir der Weg, auf welchem Kummer diese Entwickelungen herstellt, nicht einwandfrei zu sein und die von ihm erhaltenen Resultate bedürfen daher wohl noch einer näheren Prüfung.

Zürich, im Januar 1903.

Volumen und Oberfläche.

Von

HERMANN MINKOWSKI in Göttingen.

Für die konvexen Körper gibt es einen elementaren Weg, um den Begriff der Oberfläche aus dem einfacheren Begriffe des Volumens heraus zu entwickeln, und in Verfolg dieses Weges gelangt man zu sehr bemerkenswerten Erweiterungen der Tatsache, wonach unter allen Körpern gleichen Volumens die Kugel die kleinste Oberfläche besitzt.

Liegt ein konvexer Körper $\mathfrak{K}$ vor und versteht man unter x, y, z rechtwinklige Koordinaten eines Punktes aus $\mathfrak{K}$, so nimmt ein linearer Ausdruck $ux + vy + wz$, wo u, v, w feste Größen sind, in $\mathfrak{K}$ immer einen bestimmten größten Wert $H(u, v, w)$ an; und diese Funktion $H(u, v, w)$ von drei beliebigen reellen Argumenten, die Stützebenenfunktion von $\mathfrak{K}$, charakterisiert den konvexen Körper $\mathfrak{K}$ vollkommen. Das Volumen des Körpers $\mathfrak{K}$ erscheint als ein gewisser homogener Ausdruck dritten Grades V_H^3 in den sämtlichen Werten $H(u, v, w)$. Aus diesem Ausdrucke entspringt für drei beliebige konvexe Körper $\mathfrak{K}_1$, $\mathfrak{K}_2$, $\mathfrak{K}_3$ eine polare Bildung, ein symbolisches Produkt $V_{H_1} V_{H_2} V_{H_3}$, das gemischte Volumen der drei Körper $\mathfrak{K}_1$, $\mathfrak{K}_2$, $\mathfrak{K}_3$. Diese Größe ist invariant bei beliebigen Translationen der einzelnen Körper. Werden zwei der Körper mit einem bestimmten Körper $\mathfrak{K}$, der dritte aber mit einer Kugel vom Radius 1 identifiziert, so ist das dreifache ihres gemischten Volumens die Oberfläche von $\mathfrak{K}$.

Für die gemischten Volumina gilt der wichtige Satz: Für irgend drei Körper vom Volumen 1 wird das gemischte Volumen stets $\geqq 1$ und nur dann $= 1$, wenn die drei Körper mit einander homothetisch sind. Daß jeder konvexe Körper, der keine Kugel ist, eine größere Oberfläche hat als eine Kugel von demselben Volumen, ist nur ein spezieller Fall dieses Satzes.

Diese fundamentale Ungleichung läßt weiter die folgende Auslegung zu: Man bezeichne in der Mannigfaltigkeit aller möglichen Funktionen $H(u, v, w)$ von drei reellen Argumenten u, v, w eine einzelne Funktion

$H(u, v, w)$ als einen „Punkt", den Inbegriff der aus zwei Funktionen H_1 und H_2 abzuleitenden Funktionen $(1-t)H_1 + tH_2$ für $0 \leqq t \leqq 1$ als die H_1 und H_2 verbindende „Strecke"; alsdann besitzt die Gesamtheit der Stützebenenfunktionen H zu allen denjenigen konvexen Körpern, welche ein Volumen $\geqq 1$ haben, die Eigenschaft, mit irgend zwei Punkten stets die ganze sie verbindende Strecke zu enthalten, stellt also ein „konvexes Gebilde" in jener Mannigfaltigkeit vor.

Geht man auf die Tangentialebenen des Gebildes ein, so ist sein konvexer Charakter gleichbedeutend mit folgendem Theorem:

Auf der Kugelfläche vom Radius 1 mit dem Nullpunkt als Mittelpunkt denke man sich Masse in einer beliebigen stetigen und durchweg positiven Flächendichtigkeit ausgebreitet, doch so, daß der Schwerpunkt der ganzen Belegung in den Nullpunkt fällt; alsdann existiert eine geschlossene konvexe Fläche, bei welcher an jeder Stelle das Produkt der Krümmungsradien gleich der Flächendichtigkeit an dem Punkte der Kugel mit gleicher Normale ist; und diese Fläche ist völlig bestimmt bis auf eine beliebige Translation, durch die man sie noch variieren kann.

In diesem Theorem erkennt man eine Aussage über eine gewisse quadratische partielle Differentialgleichung zweiter Ordnung, deren Lösbarkeit unter bestimmten Bedingungen hier durch eine eigenartige, wohl noch mancher weiteren Anwendungen fähige Methode sichergestellt wird.

§ 1.

Stützebenenfunktion eines konvexen Körpers.

1. Es seien x, y, z rechtwinklige Koordinaten eines Punktes im Raume, und $\mathfrak{M}$ bedeute eine *abgeschlossene* Menge von Punkten x, y, z, die ganz in einer Kugel von *endlichem* Radius enthalten ist, aber nicht völlig in eine einzige Ebene fällt. Sind u, v, w irgend welche festen Werte, so hat der Ausdruck $ux + vy + wz$ für die Gesamtheit der Punkte x, y, z in $\mathfrak{M}$ ein bestimmtes *Maximum*, das $H(u, v, w)$ heiße.

Diese Funktion $H(u, v, w)$ von drei beliebigen reellen Argumenten erfüllt offenbar *folgende Bedingungen* (1)—(4):

$$H(0, 0, 0) = 0, \tag{1}$$

$$H(tu, tv, tw) = tH(u, v, w), \tag{2}$$

wenn $t > 0$ ist. Sind u_1, v_1, w_1 und u_2, v_2, w_2 irgend zwei Systeme der Argumente, so gibt es in $\mathfrak{M}$ immer wenigstens einen Punkt x, y, z, wofür

$$(u_1+u_2)x + (v_1+v_2)y + (w_1+w_2)z = H(u_1+u_2, v_1+v_2, w_1+w_2)$$

wird, und da für diesen Punkt sicherlich

$u_1 x + v_1 y + w_1 z \leqq H(u_1, v_1, w_1)$, $u_2 x + v_2 y + w_2 z \leqq H(u_2, v_2, w_2)$ ist, so gilt daher immer:

(3) $H(u_1+u_2, v_1+v_2, w_1+w_2) \leqq H(u_1, v_1, w_1) + H(u_2, v_2, w_2)$.

Das Maximum von $-(ux+vy+wz)$ in $\mathfrak{M}$ ist $H(-u, -v, -w)$, also gilt in $\mathfrak{M}$ stets:

$$-H(-u, -v, -w) \leqq ux + vy + wz \leqq H(u, v, w).$$

Wenn die Werte $u, v, w \neq 0, 0, 0$ sind, muß daher, da $\mathfrak{M}$ nicht ganz in einer Ebene liegen soll, stets

(4) $$H(u, v, w) + H(-u, -v, -w) > 0$$

sein.

2. Eine Ebene, welche wenigstens einen Punkt der Begrenzung von $\mathfrak{M}$ enthält, aber außer den Punkten, die sie mit $\mathfrak{M}$ gemein hat, $\mathfrak{M}$ ganz auf einer Seite von sich liegen läßt, nennen wir eine *Stützebene an* $\mathfrak{M}$.

Ist $H(u, v, w)$ eine beliebige reelle Funktion von drei reellen Argumenten u, v, w, welche allen den Bedingungen (1)—(4) *genügt, so bezeichnen wir den Bereich $\mathfrak{K}$ von Punkten x, y, z, welcher durch die sämtlichen Ungleichungen*

(5) $$ux + vy + wz \leqq H(u, v, w)$$

für alle möglichen Wertsysteme u, v, w definiert ist, als einen konvexen Körper.

Die Funktion H nennen wir die *Stützebenenfunktion* von $\mathfrak{K}$, da aus den Ungleichungen (5) offenbar genau die Stützebenen an $\mathfrak{K}$ zu erkennen sind.

Ist $H(u, v, w)$ wie in 1. aus der Punktmenge $\mathfrak{M}$ hergeleitet, so wird der durch die Ungleichungen (5) definierte Bereich $\mathfrak{K}$ *der kleinste, $\mathfrak{M}$ enthaltende konvexe Körper*, d. h. $\mathfrak{K}$ ist ein notwendiger Bestandteil *jedes* konvexen Körpers, der $\mathfrak{M}$ ganz in sich aufnimmt.

Ist $\mathfrak{K}^*$ ein zweiter konvexer Körper mit der Stützebenenfunktion $H^*(u, v, w)$, so ist dann und nur dann $\mathfrak{K}$ ganz in $\mathfrak{K}^*$ enthalten, wenn stets

$$H(u, v, w) \leqq H^*(u, v, w)$$

ausfällt.

3. Ein konvexer Körper ist andererseits völlig durch die Eigenschaften zu charakterisieren, *erstens*, daß jede Gerade mit ihm sei es eine Strecke, sei es einen Punkt, sei es keinen Punkt gemein hat, *zweitens*, daß zu ihm wenigstens vier nicht in einer Ebene gelegene Punkte gehören.

4. Ist $\mathfrak{p}$ ein beliebiger Punkt, so verstehen wir unter $\mathfrak{K} + \mathfrak{p}$ den Körper, der aus $\mathfrak{K}$ durch diejenige *Translation* entsteht, durch welche der Nullpunkt nach $\mathfrak{p}$ gelangt. Sind a, b, c die Koordinaten von $\mathfrak{p}$, so wird die Stützebenenfunktion von $\mathfrak{K} + \mathfrak{p}$:

$$H(u, v, w) + au + bv + cw.$$

Unterwerfen wir $\mathfrak{K}$ einer *Dilatation* vom Nullpunkte aus nach allen Richtungen in einem festen positiven Verhältnisse $t:1$, so bezeichnen wir den entstehenden Körper mit $t\mathfrak{K}$; eine Stützebenenfunktion wird $tH(u,v,w)$.

5. Wir bezeichnen mit $\mathfrak{G}$ die Kugel $x^2+y^2+z^2 \leqq 1$, vom Radius 1 mit dem Nullpunkt $\mathfrak{o}$ als Mittelpunkt, mit $\mathfrak{E}$ die Kugelfläche $x^2+y^2+z^2=1$, mit α, β, γ die Koordinaten eines beliebigen Punktes auf $\mathfrak{E}$, bez. die *Richtung* vom Nullpunkte nach diesem Punkte. Infolge der Eigenschaft (2) sind alle Werte der Funktion H bereits durch deren Werte $H(\alpha,\beta,\gamma)$ für die Punkte auf $\mathfrak{E}$ bestimmt. Die Ungleichung

$$\alpha x+\beta y+\gamma z \leqq H(\alpha,\beta,\gamma)$$

bezeichnen wir als die *Bedingung der Stützebene an $\mathfrak{K}$ mit der äußeren Normale* (α,β,γ).

Die Funktion $H(u,v,w)$ ist nach den Eigenschaften (1)—(4) eine *stetige* Funktion ihrer Argumente, und besitzen infolgedessen die Werte $H(\alpha,\beta,\gamma)$ auf $\mathfrak{E}$ ein bestimmtes *Maximum* G. Ist ein Wert $H(\alpha,\beta,\gamma)\leqq 0$, so ist nach (4) der zugehörige Wert $H(-\alpha,-\beta,-\gamma)$ positiv und von größerem Betrage; G ist daher jedenfalls >0. Mit Hülfe von (3) und (2) gewinnen wir die Ungleichung

$$(6)\quad |H(u-u_0, v-v_0, w-w_0) - H(u_0, v_0, w_0)| \leqq G\sqrt{u^2+v^2+w^2}.$$

§ 2.

Annäherung an einen beliebigen konvexen Körper durch vollkommene Ovaloide.

6. Ist $\varphi=0$ die Gleichung einer Ebene und der konvexe Körper $\mathfrak{K}$ ganz im Bereiche $\varphi\leqq 0$ enthalten, so heißt $\varphi\leqq 0$ ein *Halbraum um $\mathfrak{K}$*. Ist ein Halbraum $\varphi\leqq 0$ um $\mathfrak{K}$ so beschaffen, daß man *nicht* $\varphi=t_1\varphi_1+t_2\varphi_2$ setzen kann, so daß $t_1>0$, $t_2>0$ und $\varphi_1\leqq 0$, $\varphi_2\leqq 0$ zwei *verschiedene* Halbräume um $\mathfrak{K}$ sind, so heißt $\varphi\leqq 0$ ein *extremer Halbraum um $\mathfrak{K}$*. Die Ebene $\varphi=0$ ist dann jedenfalls eine Stützebene an $\mathfrak{K}$ und heißt eine *extreme Stützebene* an $\mathfrak{K}$. Ein konvexer Körper mit einer *endlichen* Anzahl von extremen Stützebenen heißt ein *(konvexes) Polyeder*.

7. Unter einem *vollkommenen Ovaloid* wollen wir einen konvexen Körper verstehen, bei dem die *Begrenzung* durch eine *analytische* Gleichung in den rechtwinkligen Koordinaten x, y, z definiert wird und überdies in jedem Punkte eine *bestimmte* und immer nur eine *Berührung erster Ordnung* eingehende *Tangentialebene* besitzt.

8. *Ist $\mathfrak{K}$ ein beliebiger konvexer Körper mit dem Nullpunkte als innerem Punkt und ε eine beliebige positive Größe, so läßt sich stets ein vollkommenes Ovaloid $\mathfrak{Q}$ bestimmen, so daß $\mathfrak{Q}$ den Körper $\mathfrak{K}$ enthält und selbst in $(1+\varepsilon)\,\mathfrak{K}$ enthalten ist.*

Es sei $H(u, v, w)$ die Stützebenenfunktion von $\mathfrak{K}$. Da der Nullpunkt im Inneren von $\mathfrak{K}$ liegt, ist jede Größe $H(\alpha, \beta, \gamma) > 0$. Es sei nun g das *Minimum* der Werte $H(\alpha, \beta, \gamma)$ auf der Kugelfläche $\mathfrak{E}$, so ist auch $g > 0$. Wir denken uns den ganzen Raum durch ein *Netz von* lauter gleichen *Würfeln* mit einer Kante δ erfüllt. Es sei $\mathfrak{W}$ der Gesamtbereich aller derjenigen Würfel dieses Netzes, welche überhaupt wenigstens einen Punkt von $\mathfrak{K}$ aufnehmen, und $\mathfrak{P}$ der kleinste, diesen Bereich $\mathfrak{W}$ ganz enthaltende konvexe Körper, so ist $\mathfrak{P}$ ein Polyeder, und für jede Richtung (α, β, γ) ist der Abstand derjenigen Stützebene an $\mathfrak{P}$, welche (α, β, γ) als äußere Normale hat, vom Nullpunkte einerseits $> H(\alpha, \beta, \gamma)$, andererseits

$$\leqq H(\alpha, \beta, \gamma) + \delta\sqrt{3} \leqq H(\alpha, \beta, \gamma)\left(1 + \frac{\delta\sqrt{3}}{g}\right).$$

Danach enthält $\mathfrak{P}$ den Körper $\mathfrak{K}$ im Inneren und ist selbst ganz in $\left(1 + \frac{\delta\sqrt{3}}{g}\right)\mathfrak{K}$ enthalten.

Das Polyeder $\mathfrak{P}$ besitze n Seitenflächen; da $\mathfrak{P}$ den Nullpunkt im Inneren enthält, können wir die Bedingungen dieser n extremen Stützebenen an $\mathfrak{P}$ in der Form

$$\chi_1 \leqq 1,\ \chi_2 \leqq 1,\ \cdots \chi_n \leqq 1 \tag{7}$$

schreiben, so daß dabei $\chi_1, \chi_2, \cdots \chi_n$ *homogene* lineare Ausdrücke in x, y, z sind. Es sei nun ω eine beliebige positive Größe, die wir $> \lg n$ annehmen, und $\mathfrak{Q}$ der durch die Ungleichung

$$\Omega = e^{\omega\chi_1} + e^{\omega\chi_2} + \cdots + e^{\omega\chi_n} \leqq n e^{\omega} \tag{8}$$

bestimmte Bereich.

Dieser Bereich $\mathfrak{Q}$ enthält jedenfalls das durch die Ungleichungen (7) definierte Polyeder $\mathfrak{P}$ in sich. Andererseits ist $\mathfrak{Q}$ ganz in $\left(1 + \frac{\lg n}{\omega}\right)\mathfrak{P}$ enthalten; denn in jedem Punkte außerhalb des letzteren Polyeders erweist sich stets wenigstens eine der Größen $\chi_1, \chi_2, \cdots \chi_n$ als $> 1 + \frac{\lg n}{\omega}$ und die rechte Seite in (8) daher als $> n e^{\omega}$. Nach der Lagenbeziehung von $\mathfrak{P}$ zu $\mathfrak{K}$ wird weiter $\mathfrak{Q}$ den Körper $\mathfrak{K}$ enthalten und selbst in

$$\left(1 + \frac{\delta\sqrt{3}}{g}\right)\left(1 + \frac{\lg n}{\omega}\right)\mathfrak{K}$$

enthalten sein. Wir können nun δ so klein und ω so groß annehmen, daß der hier stehende Faktor von $\mathfrak{K}$ sich $\leqq 1 + \varepsilon$ erweist.

Die Begrenzung von $\mathfrak{Q}$ ist die *analytische* Fläche $\Omega = n e^{\omega}$. Wir finden den Ausdruck

$$\frac{\partial\Omega}{\partial x}x + \frac{\partial\Omega}{\partial y}y + \frac{\partial\Omega}{\partial z}z = \omega\chi_1 e^{\omega\chi_1} + \omega\chi_2 e^{\omega\chi_2} + \cdots + \omega\chi_n e^{\omega\chi_n}, \tag{9}$$

mithin auf der Begrenzung von $\mathfrak{Q}$ stets $\geqq \omega e^{\omega} - \frac{n-1}{e}$; denn dort ist in jedem Punkte wenigstens eine der Größen $\chi \geqq 1$ und andererseits gilt immer $\xi e^{\zeta} \geqq -\frac{1}{e}$. Mit Berücksichtigung von $e^{\omega} > n$ ersehen wir hieraus, daß auf der Begrenzung von $\mathfrak{Q}$ niemals $\frac{\partial \Omega}{\partial x}, \frac{\partial \Omega}{\partial y}, \frac{\partial \Omega}{\partial z}$ gleichzeitig Null sein können, mithin in jedem Punkte dieser Begrenzung stets eine bestimmte Tangentialebene existiert.

Weiter finden wir, wenn x, y, z als lineare Funktionen eines Parameters t dargestellt werden, immer

$$(10) \qquad \frac{d^2\Omega}{dt^2} = \omega^2\left(\left(\frac{d\chi_1}{dt}\right)^2 e^{\omega\chi_1} + \left(\frac{d\chi_2}{dt}\right)^2 e^{\omega\chi_2} + \cdots + \left(\frac{d\chi_n}{dt}\right)^2 e^{\omega\chi_n}\right) > 0.$$

Aus dieser Beziehung folgt, daß auf einer beliebigen geradlinigen Strecke der Ausdruck $\Omega(x, y, z)$ seinen größten Wert immer an wenigstens einem der Endpunkte annimmt, daß mithin $\mathfrak{Q}$ mit irgend zwei Punkten stets die ganze sie verbindende Strecke enthält. Andrerseits ist aus (10) ersichtlich, daß jede Tangentialebene an $\mathfrak{Q}$ mit $\mathfrak{Q}$ nur eine Berührung erster Ordnung eingeht. Nach allen diesen Umständen besitzt $\mathfrak{Q}$ in der Tat die in unserem Satze verlangten Eigenschaften.

9. Auf Grund dieses Satzes können wir weiter zu einem gegebenen konvexen Körper $\mathfrak{K}$, der den Nullpunkt $\mathfrak{o}$ im Inneren enthält, mit einer Stützebenenfunktion H, immer eine unendliche Reihe von vollkommenen Ovaloiden $\mathfrak{Q}', \mathfrak{Q}'', \cdots$ mit solchen Stützebenenfunktionen $Q', Q'', \cdots$ herstellen, daß die Reihe der Quotienten

$$\frac{Q'(\alpha, \beta, \gamma)}{H(\alpha, \beta, \gamma)}, \frac{Q''(\alpha, \beta, \gamma)}{H(\alpha, \beta, \gamma)}, \cdots$$

nach der Grenze 1 konvergiert und zwar *gleichmäßig* für alle Systeme α, β, γ auf der ganzen Kugelfläche $\mathfrak{E}$. Trifft der hier bezeichnete Umstand zu, so wollen wir sagen, die Reihe der konvexen Körper $\mathfrak{Q}', \mathfrak{Q}'', \cdots$ hat den konvexen Körper $\mathfrak{K}$ als *Grenze*, oder *konvergiert* nach $\mathfrak{K}$.

Ist $\mathfrak{p}$ ein beliebiger Punkt, so bezeichnen wir weiter den Körper $\mathfrak{K} + \mathfrak{p}$, der $\mathfrak{p}$ als inneren Punkt enthält, als *Grenze* der Körper

$$\mathfrak{Q}' + \mathfrak{p}, \mathfrak{Q}'' + \mathfrak{p}, \cdots.$$

§ 3.

Volumen eines konvexen Körpers.

10. Jedem konvexen Körper kommt ein bestimmtes Volumen zu, ferner ein bestimmter Schwerpunkt, welcher stets ein innerer Punkt des Körpers ist.

11. Wir führen für die Punkte α, β, γ der Kugelfläche $\mathfrak{E}$ Polarkoordinaten ein und setzen

$$\alpha = \sin\vartheta\cos\psi, \quad \beta = \sin\vartheta\sin\psi, \quad \gamma = \cos\vartheta,$$

wobei wir ϑ und ψ in den Grenzen $0 \leqq \vartheta \leqq \pi$, $0 \leqq \psi \leqq 2\pi$ annehmen. Wir schreiben ferner

$$\alpha_1 = \frac{\partial\alpha}{\partial\vartheta} = \cos\vartheta\cos\psi, \qquad \beta_1 = \frac{\partial\beta}{\partial\vartheta} = \cos\vartheta\sin\psi, \quad \gamma_1 = \frac{\partial\gamma}{\partial\vartheta} = -\sin\vartheta,$$

$$\alpha_2 = \frac{1}{\sin\vartheta}\frac{\partial\alpha}{\partial\psi} = -\sin\psi, \quad \beta_2 = \frac{1}{\sin\vartheta}\frac{\partial\beta}{\partial\psi} = \cos\psi, \quad \gamma_2 = \frac{1}{\sin\vartheta}\frac{\partial\gamma}{\partial\psi} = 0;$$

dabei ergeben die drei Gleichungen

(11) $\xi = \alpha_1 x + \beta_1 y + \gamma_1 z, \quad \eta = \alpha_2 x + \beta_2 y + \gamma_2 z, \quad \zeta = \alpha x + \beta y + \gamma z$

stets eine orthogonale Transformation der Koordinaten x, y, z mit einer Determinante $= +1$.

12. Es sei $\mathfrak{K}$ ein vollkommenes Ovaloid, $\mathfrak{F}$ seine begrenzende Fläche, $H(u, v, w)$ die Stützebenenfunktion von $\mathfrak{K}$. Wir schreiben

$$H(\alpha, \beta, \gamma) = H(\vartheta, \psi) = H.$$

Die Stützebene an $\mathfrak{K}$ mit der äußeren Normale (α, β, γ) hat die Gleichung

(12) $$\xi = H(\vartheta, \psi);$$

sie ist hier zugleich Tangentialebene an $\mathfrak{F}$ und berührt $\mathfrak{F}$ in einem bestimmten Punkte $\mathfrak{p}$. Die ganze Fläche $\mathfrak{F}$ erscheint damit punktweise, durch parallele Normalen, auf die Kugelfläche $\mathfrak{E}$ bezogen. Wir wollen nun unter $x, y, z, \alpha, \beta, \gamma, \vartheta, \psi$ speziell die betreffenden Bestimmungsstücke für den Punkt $\mathfrak{p}$ verstehen und die Veränderungen dieser Größen beim Übergang zu einem anderen Punkte auf $\mathfrak{F}$ durch Vorsetzen von Δ andeuten; ferner sollen $\Delta\xi, \Delta\eta, \Delta\zeta$ die Werte der Ausdrücke (11) bedeuten, wenn darin $\Delta x, \Delta y, \Delta z$ an die Stelle von x, y, z treten. Dann gilt auf $\mathfrak{F}$ in einer gewissen Umgebung von $\mathfrak{p}$ für $\Delta\zeta$ eine Entwicklung nach Potenzen von $\Delta\xi, \Delta\eta$:

$$\Delta\zeta = -\frac{1}{2}(\mathsf{P}\Delta\xi^2 + 2\Sigma\Delta\xi\Delta\eta + \mathsf{T}\Delta\eta^2) + (\Delta\xi, \Delta\eta)_3 + \cdots;$$

darin bilden die quadratischen Glieder eine definite negative Form, es ist also $\mathsf{P} > 0$, $\mathsf{PT} - \Sigma^2 > 0$. Wir können alsdann, da $\mathsf{PT} - \Sigma^2 + 0$ ist, in einer gewissen Umgebung von $\mathfrak{p}$ die Werte $\Delta\xi$, $\Delta\eta$ durch $\frac{\partial\Delta\zeta}{\partial\Delta\xi}$ und $\frac{\partial\Delta\zeta}{\partial\Delta\eta}$ ausdrücken, welche letzteren Größen sich sofort mittels $\Delta\alpha$, $\Delta\beta$, $\Delta\gamma$ darstellen lassen. Daraus erkennen wir, daß die Koordinaten x, y, z des Punktes $\mathfrak{p}$ von $\mathfrak{F}$, wo die äußere Normale die Richtung α, β, γ hat, und weiter der zugehörige Wert $H(\alpha, \beta, \gamma)$ *analytische* Funktionen der Größen α, β, γ auf $\mathfrak{E}$ sind.

Da die Ebene (12) Tangentialebene an $\mathfrak{F}$ ist, haben wir

$$(13)\quad \alpha\frac{\partial x}{\partial\vartheta}+\beta\frac{\partial y}{\partial\vartheta}+\gamma\frac{\partial z}{\partial\vartheta}=0,\quad \frac{1}{\sin\vartheta}\Big(\alpha\frac{\partial x}{\partial\psi}+\beta\frac{\partial y}{\partial\psi}+\gamma\frac{\partial z}{\partial\psi}\Big)=0,$$

und mit Rücksicht hierauf folgen aus den allgemeinen Formeln (11) zur Bestimmung der Koordinaten x, y, z des Punktes $\mathfrak{p}$ die Gleichungen:

$$(14)\qquad \xi=\frac{\partial H(\vartheta,\psi)}{\partial\vartheta},\quad \eta=\frac{1}{\sin\vartheta}\frac{\partial H(\vartheta,\psi)}{\partial\psi},\quad \zeta=H(\vartheta,\psi).$$

13. Um nun das Volumen V des Körpers $\mathfrak{K}$ auszudrücken, zerlegen wir die Kugelfläche $\mathfrak{E}$ in Flächenelemente $d\omega=\sin\vartheta\,d\vartheta\,d\psi$; jedem Element $d\omega$ entspricht als Abbild durch parallele Normalen ein Element df auf der Fläche $\mathfrak{F}$, und wir konstruieren jedesmal die Pyramide mit dem Nullpunkt $\mathfrak{o}$ als Spitze und dem Element df als Grundfläche; die Höhe dieser Pyramide, mit gewissem Vorzeichen genommen, ist $=H(\alpha,\beta,\gamma)$ und ihr Volumen mit demselben Vorzeichen daher

$$(15)\qquad \frac{1}{3}H\,df=\frac{1}{3}\left|x,\frac{\partial x}{\partial\vartheta},\frac{\partial x}{\partial\psi}\right|d\vartheta\,d\psi.$$

(Wir bezeichnen hier und weiterhin eine dreireihige Determinante, in welcher die Glieder der ersten Reihe von der Koordinate x abhängen und die der zweiten und dritten in der entsprechenden Weise mit Hülfe des Zeichens y bez. z darzustellen sind, einfach durch Angabe bloß der ersten Reihe). Der Körper $\mathfrak{K}$ ist nun derart das Aggregat aller jener Elementarpyramiden, daß sein Volumen genau

$$(16)\qquad V=\frac{1}{3}\int H df=\frac{1}{3}\int\int\left|x,\frac{\partial x}{\partial\vartheta},\frac{\partial x}{\partial\psi}\right|d\vartheta\,d\psi$$

wird, wo die Integrale über die ganze Fläche $\mathfrak{F}$, bez. die ganze Kugelfläche $\mathfrak{E}$ zu erstrecken sind.

14. Wir setzen jetzt

$$\alpha\frac{\partial^2 x}{\partial\vartheta^2}+\beta\frac{\partial^2 y}{\partial\vartheta^2}+\gamma\frac{\partial^2 z}{\partial\vartheta^2}=-R,\quad \frac{1}{\sin\vartheta}\Big(\alpha\frac{\partial^2 x}{\partial\vartheta\,\partial\psi}+\beta\frac{\partial^2 y}{\partial\vartheta\,\partial\psi}+\gamma\frac{\partial^2 z}{\partial\vartheta\,\partial\psi}\Big)=-S,$$

$$\frac{1}{\sin^2\vartheta}\Big(\alpha\frac{\partial^2 x}{\partial\psi^2}+\beta\frac{\partial^2 y}{\partial\psi^2}+\gamma\frac{\partial^2 z}{\partial\psi^2}\Big)=-T.$$

Durch Differentiation der zwei Gleichungen (13) einmal nach ϑ, einmal nach ψ erhalten wir noch die Beziehungen

$$R=\alpha_1\frac{\partial x}{\partial\vartheta}+\beta_1\frac{\partial y}{\partial\vartheta}+\gamma_1\frac{\partial z}{\partial\vartheta},\quad S=\frac{1}{\sin\vartheta}\Big(\alpha_1\frac{\partial x}{\partial\psi}+\beta_1\frac{\partial y}{\partial\psi}+\gamma_1\frac{\partial z}{\partial\psi}\Big),$$

$$S=\alpha_2\frac{\partial x}{\partial\vartheta}+\beta_2\frac{\partial y}{\partial\vartheta}+\gamma_2\frac{\partial z}{\partial\vartheta},\quad T=\frac{1}{\sin\vartheta}\Big(\alpha_2\frac{\partial x}{\partial\psi}+\beta_2\frac{\partial y}{\partial\psi}+\gamma_2\frac{\partial z}{\partial\psi}\Big).$$

Nun gilt

$$\Delta x=\frac{\partial x}{\partial\vartheta}\Delta\vartheta+\frac{\partial x}{\partial\psi}\Delta\psi+\frac{1}{2}\Big(\frac{\partial^2 x}{\partial\vartheta^2}\Delta\vartheta^2+2\frac{\partial^2 x}{\partial\vartheta\,\partial\psi}\Delta\vartheta\,\Delta\psi+\frac{\partial^2 x}{\partial\psi^2}\Delta\psi^2\Big)+\cdots;\cdots;$$

aus den Gleichungen (11) gewinnen wir dann mit Rücksicht auf die letzten Ausdrücke und auf (13):

$$\Delta\xi = R\Delta\vartheta + S\sin\vartheta\Delta\psi + \cdots, \qquad \Delta\eta = S\Delta\vartheta + T\sin\vartheta\Delta\psi + \cdots,$$

$$\Delta\zeta = -\frac{1}{2}(R\Delta\vartheta^2 + 2S\sin\vartheta\Delta\vartheta\Delta\psi + T\sin^2\vartheta\Delta\psi^2) + \cdots,$$

und hieraus geht durch Elimination von $\Delta\vartheta$ und $\Delta\psi$ eine Entwicklung

$$\Delta\zeta = -\frac{1}{2}\left(\frac{T\Delta\xi^2 - 2S\Delta\xi\Delta\eta + R\Delta\eta^2}{RT - S^2}\right) + (\Delta\xi, \Delta\eta)_3 + \cdots$$

hervor.

Wir entnehmen daraus für die in 12. benutzten Größen P, Σ, T:

$$\mathsf{P} = \frac{T}{RT - S^2}, \quad \Sigma = \frac{-S}{RT - S^2}, \quad \mathsf{T} = \frac{R}{RT - S^2},$$

sodaß

$$RT - S^2 = \frac{1}{\mathsf{PT} - \Sigma^2}$$

das Produkt,

$$R + T = \frac{\mathsf{P} + \mathsf{T}}{\mathsf{PT} - \Sigma^2}$$

die Summe der Hauptkrümmungsradien der Fläche $\mathfrak{F}$ im Punkte $\mathfrak{p}$ darstellen, während von $\frac{2S}{R-T}$ die Neigung der Krümmungskurven auf $\mathfrak{F}$ durch $\mathfrak{p}$ gegen die Richtungen $\alpha_1, \beta_1, \gamma_1$; $\alpha_2, \beta_2, \gamma_2$ abhängt.

Von den Relationen (14) ausgehend, erhalten wir folgende Ausdrücke für R, S, T allein durch die Funktion $H = H(\vartheta, \psi)$:

$$(17) \qquad \begin{cases} R = \dfrac{\partial^2 H}{\partial\vartheta^2} + H, \\ S = \dfrac{1}{\sin\vartheta}\dfrac{\partial^2 H}{\partial\vartheta\,\partial\psi} - \dfrac{\cos\vartheta}{\sin^2\vartheta}\dfrac{\partial H}{\partial\psi}, \\ T = \dfrac{1}{\sin^2\vartheta}\dfrac{\partial^2 H}{\partial\psi^2} + \dfrac{\cos\vartheta}{\sin\vartheta}\dfrac{\partial H}{\partial\vartheta} + H. \end{cases}$$

Dabei wird immer $R > 0$, $RT - S^2 > 0$, und in diesen Ungleichungen sind bereits die allgemeinen Bedingungen (1)—(4) für die Stützebenenfunktion H völlig eingeschlossen.

Setzen wir die Determinante $\left|x, \frac{\partial x}{\partial\vartheta}, \frac{\partial x}{\partial\psi}\right|$ zu ihrer linken Seite mit der Determinante 1 der Substitution (11) zusammen, so finden wir sie $= H(RT - S^2)\sin\vartheta$, sodaß aus (15):

$$(18) \qquad df = (RT - S^2)\,d\omega$$

und aus (16):

$$(19) \qquad V = \frac{1}{3}\int H(RT - S^2)\,d\omega$$

hervorgeht.

Das Volumen V erscheint hiernach als ein gewisser homogener Ausdruck dritten Grades in den Werten $H(\vartheta, \psi)$.

15. Ist ein konvexer Körper $\mathfrak{K}$ die Grenze einer unendlichen Reihe vollkommener Ovaloide $\mathfrak{O}', \mathfrak{O}'', \cdots$, so konvergieren die Volumina dieser Ovaloide nach dem Volumen von $\mathfrak{K}$. Man erschließt diese Tatsache ganz allein mit Hülfe des Umstandes, daß, wenn ein Ovaloid ein anderes in sich enthält, das erstere stets ein größeres Volumen besitzt. Ferner konvergieren die Koordinaten der Schwerpunkte von $\mathfrak{O}', \mathfrak{O}'', \cdots$ nach den Koordinaten des Schwerpunktes von $\mathfrak{K}$.

§ 4.

Scharen konvexer Körper. Gemischtes Volumen dreier Körper.

16. Sind $H_1, H_2, \cdots H_m$ die Stützebenenfunktionen von m konvexen Körpern $\mathfrak{K}_1, \mathfrak{K}_2, \cdots \mathfrak{K}_m$, so genügt die Funktion

$$H(u, v, w) = t_1 H_1(u, v, w) + t_2 H_2(u, v, w) + \cdots + t_m H_m(u, v, w),$$

wenn die Parameter $t_1, t_2, \cdots t_m$ sämtlich $\geqq 0$, aber nicht durchweg $= 0$ sind, stets ebenfalls allen Bedingungen (1)—(4) in § 1 und bildet daher wiederum die Stützebenenfunktion eines konvexen Körpers. Diesen Körper bezeichnen wir durch

$$\mathfrak{K} = t_1 \mathfrak{K}_1 + t_2 \mathfrak{K}_2 + \cdots + t_m \mathfrak{K}_m \tag{20}$$

und die Gesamtheit aller in solcher Weise aus gegebenen Grundkörpern $\mathfrak{K}_i$ herzuleitenden Körper $\mathfrak{K}$ nennen wir eine *Schar konvexer Körper.*

17. Sind $\mathfrak{K}_1, \mathfrak{K}_2, \cdots \mathfrak{K}_m$ *vollkommene Ovaloide*, so gilt das gleiche von jedem Körper $\mathfrak{K}$ der Schar (20). Bezeichnen wir die Punkte auf den Begrenzungen von $\mathfrak{K}$, $\mathfrak{K}_i$, in welchen eine bestimmte (und die nämliche) äußere Normale α, β, γ vorhanden ist, mit x, y, z; x_i, y_i, z_i, so finden wir auf Grund der Gleichungen (14) die Beziehungen gültig:

$$x = t_1 x_1 + t_2 x_2 + \cdots + t_n x_n, \cdots. \tag{21}$$

Stellen wir nun das Volumen V von $\mathfrak{K}$ gemäß der Formel (16) dar, so resultiert mit Rücksicht auf diese Gleichungen (21) für V ein homogener Ausdruck dritten Grades in den Parametern t_i:

$$V = \sum V_{jkl}\, t_j t_k t_l \qquad (j, k, l = 1, 2, \cdots m); \tag{22}$$

die Koeffizienten V_{jkl} mit nicht lauter gleichen Indizes denken wir uns dabei so eingeführt, daß sie bei Permutationen der Indizes sich nicht ändern. Ein jeder Koeffizient V_{jkl} ist allein von den drei zugehörigen Körpern $\mathfrak{K}_j$, $\mathfrak{K}_k$, $\mathfrak{K}_l$ abhängig; wir bezeichnen ihn auch mit $V(\mathfrak{K}_j, \mathfrak{K}_k, \mathfrak{K}_l)$ und nennen ihn das *gemischte Volumen* der Körper $\mathfrak{K}_j$, $\mathfrak{K}_k$, $\mathfrak{K}_l$.

18. Betrachten wir nun das gemischte Volumen $V_{123} = V(\mathfrak{K}_1, \mathfrak{K}_2, \mathfrak{K}_3)$ dreier vollkommener Ovaloide $\mathfrak{K}_1, \mathfrak{K}_2, \mathfrak{K}_3$. Schreiben wir

$$J_{123} = \frac{1}{3}\int\int \left| x_1, \frac{\partial x_2}{\partial \vartheta}, \frac{\partial x_3}{\partial \psi} \right| d\vartheta\, d\psi$$

und definieren die analogen Ausdrücke für die Permutationen der Indizes 1, 2, 3, so ist

$$6V_{123} = (J_{123}+J_{132}) + (J_{231}+J_{213}) + (J_{312}+J_{321}).$$

Nun gilt

$$\frac{1}{3}\int\int \frac{\partial}{\partial \vartheta}\left| x_1, x_2, \frac{\partial x_3}{\partial \psi} \right| d\vartheta\, d\psi = J_{123} - J_{213} + \frac{1}{3}\int\int \left| x_1, x_2, \frac{\partial^2 x_3}{\partial \vartheta\, \partial \psi} \right| d\vartheta\, d\psi,$$

$$\frac{1}{3}\int\int \frac{\partial}{\partial \psi}\left| x_1, x_2, \frac{\partial x_3}{\partial \vartheta} \right| d\vartheta\, d\psi = J_{231} - J_{132} + \frac{1}{3}\int\int \left| x_1, x_2, \frac{\partial^2 x_3}{\partial \vartheta\, \partial \psi} \right| d\vartheta\, d\psi.$$

Die linken Seiten in diesen zwei Gleichungen sind gleich Null, weil die Integranden Differentialquotienten nach ϑ, bez. ψ sind und die Integrationen sich über die ganze Kugelfläche $\mathfrak{E}$ erstrecken. Durch Subtraktion der damit hervorgehenden Relationen folgt nun

$$J_{123} + J_{132} = J_{231} + J_{213}, \tag{23}$$

und durch cyklische Vertauschung von 1, 2, 3 hier finden wir weiter diese Ausdrücke $= J_{312} + J_{321}$, sodaß sich

$$V_{123} = \frac{1}{2}(J_{123} + J_{132})$$

herausstellt.

Multiplizieren wir in J_{123} die Determinante $\left| x_1, \frac{\partial x_2}{\partial \vartheta}, \frac{\partial x_3}{\partial \psi} \right|$ zur linken Seite mit der Determinante 1 der Substitution (11), und bezeichnen wir die den Formeln (17) gemäß herzustellenden Ausdrücke R, S, T für $\mathfrak{K}_1, \mathfrak{K}_2, \mathfrak{K}_3$ mit den entsprechenden Indizes, so entsteht

$$J_{123} = \frac{1}{3}\int H_1(R_2 T_3 - S_2 S_3)\, d\omega;$$

analog drücken wir J_{132} aus, und wir erhalten endlich

$$V_{123} = \frac{1}{6}\int H_1(R_2 T_3 - 2S_2 S_3 + T_2 R_3)\, d\omega. \tag{24}$$

Nach der Gleichung (23) *besteht für diesen Ausdruck die wichtige Eigenschaft, daß er bei beliebigen Permutationen von* 1, 2, 3 *seinen Wert nicht ändert.*

19. Wir knüpfen an diese Formel einige einfache Bemerkungen an. Die Größen R_3, S_3, T_3 bleiben bei einer Translation von $\mathfrak{K}_3$ ungeändert, mithin bleibt dabei auch V_{123} ungeändert, und da $V_{123} = V_{231} = V_{132}$ ist, so folgt allgemein:

Der Wert $V(\mathfrak{K}_1, \mathfrak{K}_2, \mathfrak{K}_3)$ *bleibt bei beliebigen Translationen der einzelnen Körper* $\mathfrak{K}_1, \mathfrak{K}_2, \mathfrak{K}_3$ *ungeändert.*

Der Ausdruck $R_2 T_3 - 2 S_2 S_3 + T_2 R_3$ ist als die Simultaninvariante zweier positiver binärer quadratischer Formen stets > 0. Hat $\mathfrak{K}_1$ den Nullpunkt im Inneren liegen (was sich stets durch eine Translation von $\mathfrak{K}_1$ hervorrufen läßt), so ist durchweg $H_1(\vartheta, \psi) > 0$ und also dann auch $V_{123} > 0$. Mit Rücksicht auf den eben bewiesenen Satz gilt daher allgemein:

Die Größe $V(\mathfrak{K}_1, \mathfrak{K}_2, \mathfrak{K}_3)$ *ist stets* > 0.

Ist der Körper $\mathfrak{K}_1$ in einem anderen vollkommenen Ovaloide $\mathfrak{K}_1^*$ mit der Stützebenenfunktion H_1^* enthalten, so gilt stets $H_1(\vartheta, \psi) \leqq H_1^*(\vartheta, \psi)$ und entnehmen wir aus (24):

$$V(\mathfrak{K}_1, \mathfrak{K}_2, \mathfrak{K}_3) \leqq V(\mathfrak{K}_1^*, \mathfrak{K}_2, \mathfrak{K}_3). \tag{25}$$

Endlich bemerken wir die Regel: Ist t ein positiver Faktor, so gilt

$$V(t\mathfrak{K}_1, \mathfrak{K}_2, \mathfrak{K}_3) = t\, V(\mathfrak{K}_1, \mathfrak{K}_2, \mathfrak{K}_3). \tag{26}$$

20. Sind die Körper $\mathfrak{K}_1, \mathfrak{K}_2, \mathfrak{K}_3$ mit einem und demselben Körper $\mathfrak{K}$ identisch, so wird $V(\mathfrak{K}_1, \mathfrak{K}_2, \mathfrak{K}_3)$ das *Volumen* von $\mathfrak{K}$.

Die Stützebenenfunktion der Kugel $\mathfrak{G}(x^2 + y^2 + z^2 \leqq 1)$ ist für die Systeme α, β, γ auf $\mathfrak{E}$ konstant $= 1$. Beziehen sich H, R, S, T auf ein vollkommenes Ovaloid $\mathfrak{K}$ und bezeichnen wir das Oberflächenelement dieses Körpers mit df, seine ganze *Oberfläche* mit O, so folgt daher aus (24):

$$3V(\mathfrak{G}, \mathfrak{K}, \mathfrak{K}) = \int (RT - S^2)\, d\omega = \int df = O, \tag{27}$$

und durch (23) gelangen wir noch zu dem Ausdrucke

$$O = 3V(\mathfrak{K}, \mathfrak{G}, \mathfrak{K}) = \tfrac{1}{2} \int H(R + T)\, d\omega. \tag{28}$$

Andrerseits wird

$$3V(\mathfrak{G}, \mathfrak{G}, \mathfrak{K}) = \tfrac{1}{2} \int (R + T)\, d\omega = \int \frac{\frac{1}{2}(R+T)}{RT - S^2}\, df; \tag{29}$$

die Größe $\dfrac{\frac{1}{2}(R+T)}{RT - S^2}$ hier bedeutet die mittlere Krümmung am Flächenelement df und können wir danach $3V(\mathfrak{G}, \mathfrak{G}, \mathfrak{K})$ als *das Integral der mittleren Krümmung* von $\mathfrak{K}$ bezeichnen. Wir haben dann noch die Beziehung

$$3V(\mathfrak{G}, \mathfrak{G}, \mathfrak{K}) = 3V(\mathfrak{K}, \mathfrak{G}, \mathfrak{G}) = \int H\, d\omega. \tag{30}$$

21. Sind $\mathfrak{K}_1, \mathfrak{K}_2, \cdots \mathfrak{K}_m$ beliebige konvexe Körper, so können wir nach § 2 jeden dieser Körper $\mathfrak{K}_i$ als Grenze einer Reihe vollkommener

Ovaloide $\mathfrak{O}_i$ darstellen. Auf Grund der in 19. abgeleiteten Regeln läßt sich dann zeigen, daß dabei ein jeder Ausdruck $V(\mathfrak{O}_j, \mathfrak{O}_k, \mathfrak{O}_l)$ immer nach einer bestimmten, von der Wahl der annähernden Ovaloide unabhängigen Grenze konvergiert, die wir mit $V(\mathfrak{K}_j, \mathfrak{K}_k, \mathfrak{K}_l)$ bezeichnen und das *gemischte Volumen von* $\mathfrak{K}_j, \mathfrak{K}_k, \mathfrak{K}_l$ nennen. Es übertragen sich dann alle Regeln aus 19. und die Entwicklung (22) sofort auf beliebige konvexe Körper.

Für die gemischten Volumina bestehen einige fundamentale Ungleichungen, die in dem Satze gipfeln, daß irgend drei Körper vom Volumen 1 stets ein gemischtes Volumen $\geqq 1$ ergeben. Als Vorbereitung zum Nachweis dieser Ungleichungen behandeln wir zunächst die entsprechenden Fragen für die Ebene.

§ 5.

Ovale. Gemischter Flächeninhalt zweier Ovale.

22. Wir betrachten jetzt Figuren in einer Ebene $z = \text{const}$. Es sei $H(u, v)$ eine reelle Funktion zweier reeller Argumente mit den Eigenschaften:

$$H(0, 0) = 0, \quad H(tu, tv) = tH(u, v), \quad \text{wenn} \quad t > 0 \quad \text{ist},$$
$$H(u_1 + u_2,\ v_1 + v_2) \leqq H(u_1, v_1) + H(u_2, v_2),$$
$$H(u, v) + H(-u, -v) > 0, \quad \text{wenn} \quad u, v \neq 0, 0 \quad \text{ist}.$$

Den durch die sämtlichen Ungleichungen

$$ux + vy \leqq H(u, v)$$

für alle möglichen Systeme u, v definierten Bereich $\mathfrak{F}$ von Punkten x, y in der Ebene $z = \text{const}$. bezeichnen wir als ein *Oval* in dieser Ebene, und wir nennen $H(u, v)$ die *Stützgeradenfunktion* dieses Ovals. Jedem solchen Oval $\mathfrak{F}$ kommt ein bestimmter Flächeninhalt, ferner ein bestimmter Schwerpunkt zu; der Schwerpunkt wird stets ein innerer Punkt des Ovals.

Ist s ein positiver Wert > 0, so stellt $sH(u, v)$ wieder die Stützgeradenfunktion eines Ovals vor, das wir dann $s\mathfrak{F}$ nennen.

23. Wir bezeichnen ein Oval $\mathfrak{F}$ als ein *vollkommenes Oval*, wenn die Begrenzung von $\mathfrak{F}$ durch eine *analytische* Gleichung in x, y gegeben ist und in jedem Punkte eine *bestimmte* und immer nur eine *Berührung erster Ordnung* eingehende *Tangente* hat.

Ist $\mathfrak{F}$ ein beliebiges Oval mit dem Nullpunkt als Schwerpunkt, und ε eine beliebige positive Größe, so kann man stets ein vollkommenes Oval $\mathfrak{F}^*$, ebenfalls mit dem Nullpunkte als Schwerpunkt, finden, welches $\mathfrak{F}$ enthält und selbst ganz in $(1 + \varepsilon)\,\mathfrak{F}$ enthalten ist. Jedes Oval kann als *Grenze* vollkommener Ovale mit dem nämlichen Schwerpunkt dargestellt werden.

24. Es sei $\mathfrak{F}$ ein vollkommenes Oval, $H(u, v)$ seine Stützgeradenfunktion. Wir bezeichnen mit α, β die Koordinaten eines Punktes der Kreislinie $x^2 + y^2 = 1$ bez. die Richtung von $x = 0$, $y = 0$ nach diesem Punkte, führen $\alpha = \cos\vartheta$, $\beta = \sin\vartheta$, $0 \leqq \vartheta \leqq 2\pi$ ein und schreiben $H(\alpha, \beta) = H(\vartheta) = H$. Der Krümmungsradius der Begrenzung von $\mathfrak{F}$ in einem Punkte $\mathfrak{p}$, wo die äußere Normale die Richtung (α, β) hat, wird $R = H + \frac{\partial^2 H}{\partial \vartheta^2}$ und der Flächeninhalt von $\mathfrak{F}$ bekommt den Ausdruck:

$$F = \frac{1}{2}\int_0^{2\pi} H\left(H + \frac{\partial^2 H}{\partial \vartheta^2}\right) d\vartheta. \tag{31}$$

Wir haben nun in Bezug auf den Flächeninhalt $\mathfrak{F}$ noch einige Bemerkungen zu entwickeln, die bald Anwendung finden werden.

Es sei a der kleinste, A der größte Wert von x in $\mathfrak{F}$ und bezeichnen wir für ein $x \geqq a$ und $\leqq A$ mit $y(x)$ die Länge der zur y-Achse parallelen Sehne von $\mathfrak{F}$, auf welcher der betreffende Abszissenwert x konstant ist. Die Funktion $y(x)$ ist im Inneren des Intervalls $a \leqq x \leqq A$ regulär und an den Grenzen nähert sie sich stetig dem Werte Null. *Ferner ist darin* $\frac{dy}{dx}$ *eine mit wachsendem* x *stets abnehmende Funktion.* Infolgedessen ist weiter insbesondere

$$\frac{\int_a^x \frac{dy}{dx}\, dx}{\int_a^x dx} = \frac{y}{x - a}$$

eine stets abnehmende und analog $\frac{y}{A - x}$ eine stets wachsende Funktion von x.

Der Flächeninhalt F von $\mathfrak{F}$ besitzt nun auch den Ausdruck

$$F = \int_a^A y(x)\, dx. \tag{32}$$

Setzen wir, wenn $a \leqq x \leqq A$ ist,

$$\int_a^x y(x)\, dx = \tau F,$$

so ist $\tau = \tau(x)$ eine solche Funktion der oberen Grenze x dieses Integrals, welche *kontinuierlich* von 0 bis 1 *zunimmt,* während x von a bis A läuft, und *können wir* daher *umgekehrt die obere Grenze dieses Integrals als eine*

bestimmte Funktion $x(\tau)$ *des Wertes* τ *im Intervalle* $0 \leqq \tau \leqq 1$ *einführen.* Dabei gilt

$$y\frac{dx}{d\tau} = F, \qquad \frac{d(y^2)}{d\tau} = 2F\frac{dy}{dx}.$$

Nach der zweiten Gleichung hier wird $\frac{d(y^2)}{d\tau}$ eine mit wachsendem τ stets abnehmende Funktion von τ; infolgedessen ist weiter $\frac{y^2}{\tau}$ eine stets abnehmende, $\frac{y^2}{1-\tau}$ eine stets zunehmende Funktion von τ.

Die Länge der Sehne $\mathfrak{bc}$ von $\mathfrak{F}$ auf der Geraden $x = \frac{a+A}{2}$, also $y\left(\frac{a+A}{2}\right)$, sei $= h$. Die Tangenten an $\mathfrak{F}$ in den Endpunkten dieser Sehne bilden mit den Geraden $x = a$ und $x = A$ ein Trapez, welches $\mathfrak{F}$ ganz in sich enthält; also folgt

$$(A-a)h \geqq F. \tag{33}$$

Andrerseits enthält $\mathfrak{F}$ das Dreieck $\mathfrak{abc}$ mit jener Sehne $\mathfrak{bc}$ als Basis und der Spitze in dem Punkte $\mathfrak{a}$ von $\mathfrak{F}$, für den $x = a$ ist; daher gilt

$$\tfrac{1}{4}(A-a)h < \tau\left(\frac{a+A}{2}\right)F,$$

woraus mit Rücksicht auf (33) nun $\tau\left(\frac{a+A}{2}\right) < \frac{1}{4}$ hervorgeht; analog finden wir $\tau\left(\frac{a+A}{2}\right) > \frac{3}{4}$.

Für einen Wert $\tau > \frac{3}{4}$ fällt danach stets $x(\tau) > \frac{a+A}{2}$ aus; da $\frac{y}{A-x}$ und $\frac{y^2}{1-\tau}$ mit wachsendem x bez. τ zunehmen, haben wir alsdann

$$\frac{y}{A-x} > \frac{h}{\frac{1}{2}(A-a)}, \quad (1-\tau)F = \int_x^A y\,dx > \frac{(A-x)^2 h}{A-a},$$

woraus mit Rücksicht auf (33) sich

$$A - x(\tau) < (A-a)\sqrt{1-\tau} \tag{34}$$

ergibt, und erhalten wir andrerseits

$$\frac{y^2}{1-\tau} > \frac{h^2}{1-\tau\left(\frac{a+A}{2}\right)} > \frac{4}{3}h^2, \quad \frac{y^2}{\tau} > \frac{4}{3}\,\frac{(1-\tau)}{\tau}\,\frac{F^2}{(A-a)^2} \tag{35}$$

Nehmen wir an, der Schwerpunkt von $\mathfrak{F}$ liege im Nullpunkte, so führt die Betrachtung der x-Koordinate des Schwerpunktes zur Gleichung

$$0 = \frac{1}{F}\int_a^A xy\,dx = \int_0^1 x\,d\tau,$$

woraus durch partielle Integration

$$A = \int_a^A \tau\, dx, \quad A = F \int_0^1 \frac{\tau\, d\tau}{y} \tag{36}$$

folgt. Zerlegen wir $\mathfrak{F}$ in die Dreiecke mit $\mathfrak{a}$ als Spitze und den einzelnen Bogenelementen des Umfangs von $\mathfrak{F}$ als Grundlinien, so ist für den Schwerpunkt eines jeden dieser Dreiecke offenbar $A - x > \frac{1}{3}(A-a)$ und muß die gleiche Relation daher auch für den Schwerpunkt von $\mathfrak{F}$ selbst gelten, d. h. wir haben

$$A > \frac{A-a}{3}. \tag{37}$$

25. Es seien $\mathfrak{F}_1$ und $\mathfrak{F}_2$ zwei beliebige Ovale und $H_1(u, v)$, $H_2(u, v)$ ihre Stützgeradenfunktionen; alsdann bildet $(1-t)\,H_1(u, v) + tH_2(u, v)$, wenn $t > 0$ und < 1 ist, immer ebenfalls die Stützgeradenfunktion eines Ovals, das mit $\mathfrak{F} = (1-t)\mathfrak{F}_1 + t\mathfrak{F}_2$ bezeichnet werde. Dieser Herstellung von $\mathfrak{F}$ steht folgende Erzeugungsweise desselben Ovals dual gegenüber. Man verbinde jeden Punkt $\mathfrak{f}_1$ von $\mathfrak{F}_1$ mit jedem Punkte $\mathfrak{f}_2$ von $\mathfrak{F}_2$ und teile immer die Verbindungsstrecke $\mathfrak{f}_1\mathfrak{f}_2$ in einem Punkte $\mathfrak{f}$ so, daß

$$\mathfrak{f} = (1-t)\,\mathfrak{f}_1 + t\mathfrak{f}_2$$

ist (d. h. daß die Längen der Strecken $\mathfrak{f}_1\mathfrak{f}$ und $\mathfrak{f}\mathfrak{f}_2$ sich wie $t : 1-t$ verhalten). Die Menge aller verschiedenen Punkte $\mathfrak{f}$, die auf diese Weise gefunden werden, bildet dann genau den Bereich des Ovals $\mathfrak{F}$. Bei dieser Konstruktion von $\mathfrak{F}$ denken wir uns zweckmäßig $\mathfrak{F}_1$ und $\mathfrak{F}_2$ in zwei verschiedenen Ebenen $z = \text{const.}$, etwa $\mathfrak{F}_1$ in $z = 0$ und $\mathfrak{F}_2$ in $z = 1$ gelegen; alsdann stellt $\mathfrak{F} = (1-t)\mathfrak{F}_1 + t\mathfrak{F}_2$ den Schnitt des kleinsten, die beiden Ovale $\mathfrak{F}_1$ und $\mathfrak{F}_2$ ganz enthaltenden konvexen Körpers mit der Ebene $z = t$ vor.

Der Flächeninhalt des Ovals $\mathfrak{F}$ besitzt einen Ausdruck

$$F = (1-t)^2 F_{11} + 2(1-t)tF_{12} + t^2 F_{22}, \tag{38}$$

wobei F_{11} den Flächeninhalt von $\mathfrak{F}_1$, F_{22} den von $\mathfrak{F}_2$ und F_{12} eine weitere Konstante bedeutet, die wir den *gemischten Flächeninhalt* von $\mathfrak{F}_1$ und $\mathfrak{F}_2$ nennen. F_{12} ändert sich nicht bei beliebigen Translationen von $\mathfrak{F}_1$ oder von $\mathfrak{F}_2$.

Sind $\mathfrak{F}_1$ und $\mathfrak{F}_2$ vollkommene Ovale, so finden wir, von der Formel (31) ausgehend,

$$F_{12} = \frac{1}{2}\int_0^{2\pi} H_1\left(H_2 + \frac{\partial^2 H_2}{\partial \vartheta^2}\right) d\vartheta = \frac{1}{2}\int_0^{2\pi} H_2\left(H_1 + \frac{\partial^2 H_1}{\partial \vartheta^2}\right) d\vartheta,$$

worin H_1 für $H_1(\cos\vartheta, \sin\vartheta)$ und H_2 für $H_2(\cos\vartheta, \sin\vartheta)$ steht.

Stellt $\mathfrak{F}_2$ die Kreisfläche $x^2+y^2 \leqq 1$ vor, so ist H_2 hier konstant $= 1$, $F_{22} = \pi$ und wird $2F_{12}$ die *Länge des Umfangs* von $\mathfrak{F}_1$.

26. Wir wollen nun den Satz beweisen, *daß stets die Ungleichung gilt:*

$$F_{12} \geqq \sqrt{F_{11} F_{22}}. \tag{39}$$

Diese Ungleichung ist gleichbedeutend mit folgender Beziehung für den in (38) entwickelten Ausdruck F:

$$\sqrt{F} \geqq (1-t)\sqrt{F_{11}} + t\sqrt{F_{22}}. \tag{40}$$

Von besonderem Werte ist es, auch die Grenzfälle der Ungleichung (39) mit aufzuklären. Wir werden den Zusatz gewinnen, *daß in dieser Ungleichung dann und nur dann das Gleichheitszeichen eintritt, wenn* $\mathfrak{F}_1$ *und* $\mathfrak{F}_2$ *homothetisch sind* (d. h. aus einander durch Translation und Dilatation hervorgehen, mit einander ähnlich und ähnlich gelegen sind).

Wir denken uns der Einfachheit wegen den Schwerpunkt von $\mathfrak{F}_1$ wie den von $\mathfrak{F}_2$ im Nullpunkte gelegen (was stets durch Translation dieser Ovale zu erreichen ist). Alsdann sind $H_1(\alpha, \beta)$ und $H_2(\alpha, \beta)$ immer > 0. Auf der Kreislinie $\alpha^2 + \beta^2 = 1$ hat die daselbst stetige Funktion

$$\frac{\sqrt{F_{11}}\, H_2(\alpha, \beta)}{\sqrt{F_{22}}\, H_1(\alpha, \beta)} \tag{41}$$

ein bestimmtes *Maximum*, das wir D nennen. Dieser Wert hat die Bedeutung, daß das Oval $\frac{1}{\sqrt{F_{22}}}\mathfrak{F}_2$ vom Flächeninhalt 1 im Oval $\frac{s}{\sqrt{F_{11}}} = \mathfrak{F}_1$ vom Flächeninhalt s^2 enthalten ist, wenn $s \geqq D$ ist, aber nicht ganz darin enthalten, wenn $s < D$ ist. Sind $\mathfrak{F}_1$ und $\mathfrak{F}_2$ homothetisch, so decken sich die Ovale $\frac{1}{\sqrt{F_{22}}}\mathfrak{F}_2$ und $\frac{1}{\sqrt{F_{11}}}\mathfrak{F}_1$ und ist daher auch ihr gemischter Flächeninhalt $= 1$, also $F_{12} = \sqrt{F_{11} F_{22}}$ und wird andrerseits $D = 1$.

Jetzt verfolgen wir die Annahme, daß $\mathfrak{F}_1$ und $\mathfrak{F}_2$ *nicht homothetisch* sind. Alsdann muß $D > 1$ ausfallen. Wir werden nun eine Ungleichung aufstellen

$$\frac{F_{12}}{\sqrt{F_{11} F_{22}}} - 1 \geqq \Pi(D),$$

worin $\Pi(D)$ eine stetige Funktion von D sein wird, die für ein $D > 1$ stets > 0 ist. Diese Beziehung setzt dann in Evidenz, daß stets $F_{12} > \sqrt{F_{11} F_{22}}$ wird, wenn $\mathfrak{F}_1$ und $\mathfrak{F}_2$ nicht homothetisch sind.

Eine Beziehung von diesem Charakter mit einer stetigen Funktion $\Pi(D)$ *braucht offenbar nur für vollkommene Ovale erwiesen zu werden.* Durch unseren Hülfssatz in 23. über die Annäherung eines beliebigen Ovals durch vollkommene Ovale gilt sie dann sofort für alle Ovale.

27. Es seien nunmehr $\mathfrak{F}_1$ und $\mathfrak{F}_2$ zwei vollkommene Ovale und sie seien nicht homothetisch. Wir drehen die Koordinatenachsen um den Nullpunkt derart, daß die positive x-Achse in eine solche Richtung fällt, wofür die Funktion (40) ihren größten Wert D erhält, d. h. also, wir nehmen

$$\frac{\sqrt{F_{11}}\, H_2(1,0)}{\sqrt{F_{22}}\, H_1(1,0)} = D \tag{42}$$

an.

Es sei jetzt t irgend ein bestimmter Wert > 0 und < 1; wir gebrauchen für das Oval $\mathfrak{F} = (1-t)\mathfrak{F}_1 + t\mathfrak{F}_2$ die Zeichen a, A, $y(x)$ in derselben Weise, wie sie für ein Oval $\mathfrak{F}$ in 24. erklärt sind; die entsprechenden Größen für $\mathfrak{F}_1$ und $\mathfrak{F}_2$ bezeichnen wir mit a_1, A_1, $y_1(x)$, a_2, A_2, $y_2(x)$; insbesondere ist $A_1 = H_1(1, 0)$, $A_2 = H_2(1, 0)$. Alsdann bestehen für a und A, den kleinsten bez. größten Wert von x in $\mathfrak{F}$, die Ausdrücke

$$a = (1-t)a_1 + ta_2, \quad A = (1-t)A_1 + tA_2. \tag{43}$$

Die Flächeninhalte von $\mathfrak{F}_1$ und $\mathfrak{F}_2$ stellen wir gemäß der Formel (32) dar:

$$F_{11} = \int_{a_1}^{A_1} y_1(x)\, dx, \quad F_{22} = \int_{a_2}^{A_2} y_2(x)\, dx. \tag{44}$$

Wir setzen nun, wenn $a_1 \leqq x_1 \leqq A_1$, $a_2 \leqq x_2 \leqq A_2$ ist,

$$\int_{a_1}^{x_1} y_1(x)\, dx = \tau F_{11}, \quad \int_{a_2}^{x_2} y_2(x)\, dx = \tau F_{22} \tag{45}$$

und führen die oberen Grenzen dieser Integrale als Funktionen $x_1(\tau)$, $x_2(\tau)$ des Wertes τ ein, der sich im Intervalle $0 \leqq \tau \leqq 1$ bewegt. Indem wir unter τ in diesen beiden Funktionen ein und dasselbe Argument verstehen, wird ein gewisser Zusammenhang zwischen den zur y-Achse parallelen Sehnen von $\mathfrak{F}_1$ und von $\mathfrak{F}_2$ hergestellt*).

Wir ziehen jetzt die in 25. angegebene Methode zur Erzeugung des Ovals $\mathfrak{F}$ aus den Punkten von $\mathfrak{F}_1$ und $\mathfrak{F}_2$ heran und bringen sie zunächst auf die Punkte der Sehne $\mathfrak{p}_1\mathfrak{q}_1$ von $\mathfrak{F}_1$ auf der Geraden $x = x_1(\tau)$ und der Sehne $\mathfrak{p}_2\mathfrak{q}_2$ von $\mathfrak{F}_2$ auf der Geraden $x = x_2(\tau)$ in Anwendung; dadurch erkennen wir, daß zu $\mathfrak{F}$ auf der Geraden

$$x = (1-t)\, x_1(\tau) + t\, x_2(\tau) \tag{46}$$

*) Die Idee dieser Zuordnung der parallelen Sehnen in zwei Ovalen nach dem Verhältnis der je zwei Flächenstücke, in welche sie die Ovale zerschneiden, rührt von Herrn H. Brunn her (vgl. *Ovale und Eiflächen*, Inauguraldissertation, München, 1887, pag. 23).

jedenfalls alle diejenigen Punkte gehören müssen, welche diese Gerade aus dem Trapeze $\mathfrak{p}_1\mathfrak{q}_1\mathfrak{q}_2\mathfrak{p}_2$ herausschneidet. Die Längen der Sehnen $\mathfrak{p}_1\mathfrak{q}_1$ und $\mathfrak{p}_2\mathfrak{q}_2$ sind $y_1(x_1(\tau))$ bez. $y_2(x_2(\tau))$; danach muß für die Länge $y(x)$ der Sehne $\mathfrak{p}\mathfrak{q}$ von $\mathfrak{F}$ auf der durch (46) angewiesenen Geraden jedenfalls die Ungleichung

$$y(x) \geqq (1-t)\,y_1(x_1(\tau)) + t\,y_2(x_2(\tau)) \tag{47}$$

gelten.

Für den Flächeninhalt F des Ovals $\mathfrak{F}$ haben wir

$$F = \int_a^A y(x)\,dx.$$

Nun wächst die durch (46) gegebene Funktion x kontinuierlich und läuft nach (43) in den Grenzen a bis A, wenn τ von 0 bis 1 zunimmt, und können wir sie daher als Variable in dieses Integral für F einführen. Schreiben wir zur Abkürzung x_1, y_1 und x_2, y_2 für $x_1(\tau)$, $y_1(x_1(\tau))$ und $x_2(\tau)$, $y_2(x_2(\tau))$ und machen von (47) Gebrauch, so ergibt sich

$$F \geqq \int_0^1 ((1-t)\,y_1 + t\,y_2)\left((1-t)\,\frac{dx_1}{d\tau} + t\,\frac{dx_2}{d\tau}\right) d\tau.$$

Jetzt ziehen wir den Ausdruck (38) für F heran und benutzen die Gleichungen (44); dadurch erhalten wir

$$2F_{12} \geqq \int_0^1 \left(y_1\,\frac{dx_2}{d\tau} + y_2\,\frac{dx_1}{d\tau}\right) d\tau.$$

Hier führen wir gemäß (45):

$$\frac{dx_1}{d\tau} = \frac{F_{11}}{y_1}, \quad \frac{dx_2}{d\tau} = \frac{F_{22}}{y_2}$$

ein, und wir erzielen endlich

$$2\left(F_{12} - \sqrt{F_{11}\,F_{22}}\right) \geqq \int_0^1 \frac{\left(y_1\sqrt{F_{22}} - y_2\sqrt{F_{11}}\right)^2}{y_1\,y_2}\,d\tau. \tag{48}$$

Andrerseits haben wir der Formel (36) zufolge:

$$A_1 = F_{11}\int_0^1 \frac{\tau\,d\tau}{y_1}, \quad A_2 = F_{22}\int_0^1 \frac{\tau\,d\tau}{y_2},$$

mithin

$$\int_0^1 \frac{y_1\sqrt{F_{22}} - y_2\sqrt{F_{11}}}{y_1\,y_2}\,\tau\,d\tau = \frac{A_2}{\sqrt{F_{22}}} - \frac{A_1}{\sqrt{F_{11}}} = (D-1)\,\frac{A_1}{\sqrt{F_{11}}} > 0. \tag{49}$$

Mit Hülfe der letzteren Beziehung suchen wir eine positive untere Grenze für das Integral auf der rechten Seite in (48) herzuleiten; dabei entsteht eine Schwierigkeit durch den Umstand, daß $\frac{\tau}{\sqrt{y_1 y_2}}$ bei Annäherung an $\tau = 1$ über jede Grenze hinauswächst. Es sei nun δ eine positive Größe $< \frac{1}{4}$, so gilt

$$F_{22}\int_{1-\delta}^{1}\frac{\tau\, d\tau}{y_2} < F_{22}\int_{1-\delta}^{1}\frac{d\tau}{y_2} = A_2 - x_2(1-\delta);$$

mit Rücksicht auf (34) und (37) finden wir die rechte Seite hier $< 3A_2\sqrt{\delta}$, und wir erhalten aus (49) die Ungleichung

$$\int_0^{1-\delta}\frac{y_1\sqrt{F_{22}} - y_2\sqrt{F_{11}}}{y_1 y_2}\,\tau\, d\tau > \left(D(1-3\sqrt{\delta})-1\right)\frac{A_1}{\sqrt{F_{11}}}. \tag{50}$$

Die Ungleichung (48) bleibt bestehen, wenn wir die Integration rechts nur bis zur oberen Grenze $1-\delta$ erstrecken. Im Intervalle 0 bis $1-\delta$ sind zufolge einer in 24. gemachten Bemerkung $\frac{y_1}{\sqrt{\tau}}$ und $\frac{y_2}{\sqrt{\tau}}$ beständig abnehmende Funktionen und haben wir mit Rücksicht auf (35) und (37) und auf $\tau < 1$ durchweg

$$\frac{y_1 y_2}{\tau^2} > \frac{4}{27}\,\delta\,\frac{F_{11}F_{22}}{A_1 A_2};$$

damit erhalten wir aus (48) die Beziehung

$$2\left(F_{12} - \sqrt{F_{11}F_{22}}\right) \geqq \frac{4}{27}\,\delta\,\frac{F_{11}F_{22}}{A_1 A_2}\int_0^{1-\delta}\frac{\left(y_1\sqrt{F_{22}} - y_2\sqrt{F_{11}}\right)^2}{y_1^2 y_2^2}\,\tau^2\, d\tau.$$

Bezeichnen wir den Integranden in (50) zur Abkürzung mit Ψ, so ist

$$\int_0^{1-\delta}(\Psi + s)^2\, d\tau$$

für jeden reellen Wert von s stets $\geqq 0$ und gilt infolgedessen

$$\int_0^{1-\delta}\Psi^2\, d\tau \geqq \frac{1}{1-\delta}\left(\int_0^{1-\delta}\Psi\, d\tau\right)^2. \tag{51}$$

Diese Beziehung führt uns nun mit Rücksicht auf (50) und, wenn wir noch hier rechts $1-\delta$ im Nenner durch 1 ersetzen, zu

$$2\left(F_{12} - \sqrt{F_{11}F_{22}}\right) \geqq \frac{4}{27}\,\delta\,\frac{F_{11}F_{22}}{A_1 A_2}\,\frac{A_1^2}{F_{11}}\left(D(1-3\sqrt{\delta})-1\right)^2.$$

Das Maximum von $3\sqrt{\delta}(D-1-3D\sqrt{\delta})$ tritt für $3\sqrt{\delta}=\frac{D-1}{2D}$ ein, wobei $\delta<\frac{1}{36}$, also gewiß $<\frac{1}{4}$ ist, und wird $=\frac{(D-1)^2}{4D}$. Mit diesem Werte von δ entsteht, wenn wir noch von (42) Gebrauch machen:

$$\frac{F_{12}}{\sqrt{F_{11}F_{22}}}-1\geqq\frac{1}{2^3\cdot 3^5}\frac{(D-1)^4}{D^3}. \tag{52}$$

In der hier geschriebenen Form (mit dem Zeichen $\geqq$) überträgt sich diese Relation unmittelbar auf beliebige Ovale; sie liefert in der Tat den Satz, *daß stets* $F_{12}>\sqrt{F_{11}F_{22}}$ *ist, wenn* $\mathfrak{F}_1$ *und* $\mathfrak{F}_2$ *nicht homothetisch sind.*

28. Nehmen wir für $\mathfrak{F}_2$ eine Kreisfläche vom Radius 1, so bedeutet $2F_{12}$ die Länge des Umfangs von $\mathfrak{F}_1$, während $F_{22}=\pi$ zu setzen ist. Die für diesen Fall aus (39) entstehende Ungleichung

$$\frac{2F_{12}}{2\pi}\geqq\sqrt{\frac{F_{11}}{\pi}}$$

besagt, *daß jedes Oval, welches von einem Kreise verschieden ist, immer kleineren Inhalt besitzt als ein Kreis von demselben Umfange. Diese Aussage läßt sich sogleich auch auf nicht konvexe Flächen ausdehnen,* indem zu jeder abgeschlossenen und zusammenhängenden Figur, welche nicht ein Oval vorstellt und welcher ein bestimmter Flächeninhalt und eine bestimmte Länge des Umfanges zukommt, immer ein bestimmtes kleinstes, die Figur ganz enthaltendes Oval gehört, und für dieses der Flächeninhalt größer, der Umfang kleiner ausfällt als für die Ausgangsfigur.

§ 6.

Eine kubische Ungleichung für die gemischten Volumina.

29. Wir suchen jetzt die entsprechenden Tatsachen für den Raum abzuleiten. Zunächst schicken wir einige Hülfsbemerkungen voraus.

Es sei $\mathfrak{K}$ ein vollkommenes Ovaloid, c der kleinste, C der größte Wert von z in $\mathfrak{K}$; für jeden Wert $z\geqq c$ und $\leqq C$ bezeichnen wir mit $\mathfrak{F}(z)$ den Schnitt von $\mathfrak{K}$ mit der Ebene, in welcher der betreffende Wert z konstant ist, mit $(f(z))^2$ den Flächeninhalt von $\mathfrak{F}(z)$. Für die Werte im Inneren des Intervalls $c\leqq z\leqq C$ stellt $\mathfrak{F}(z)$ Ovale vor und ist die Funktion $f(z)$ immer regulär, an den Grenzen nähert sich $f(z)$ stetig dem Werte Null. Ist $c<z'<z<z''<C$, $z=(1-t)z'+tz''$, so enthält das Schnittoval $\mathfrak{F}(z)$, da $\mathfrak{K}$ ein konvexer Körper ist, jedenfalls das ganze durch $(1-t)\mathfrak{F}(z')+t\mathfrak{F}(z'')$ dargestellte Oval in sich und gilt daher zufolge der Ungleichung (40) sicherlich

$$f(z)\geqq(1-t)f(z')+tf(z'').$$

Auf Grund dieser Eigenschaften erkennen wir, wenn wir z und f als rechtwinklige Koordinaten in einer Ebene deuten, daß der Bereich

$$c \leqq z \leqq C, \quad 0 \leqq f \leqq f(z) \tag{53}$$

ein Oval in dieser Ebene vorstellt, und nimmt infolgedessen $\frac{df(z)}{dz}$ mit wachsendem z beständig ab.

Das Volumen V von $\mathfrak{R}$ drückt sich durch

$$V = \int_c^C (f(z))^2 dz \tag{54}$$

aus. Setzen wir nun, wenn $c \leqq z \leqq C$ ist,

$$\int_c^z (f(z))^2 dz = \tau V,$$

so wächst $\tau = \tau(z)$ kontinuierlich von 0 bis 1, während die obere Grenze z von c bis C zunimmt; wir können dann umgekehrt die obere Grenze z dieses Integrals als eine bestimmte Funktion $z(\tau)$ des Wertes τ einführen, die ihrerseits kontinuierlich von c bis C zunehmen wird, während τ von 0 bis 1 wächst. Dabei gilt, wenn wir zur Abkürzung $f(z(\tau)) = f$ setzen,

$$f^2 \frac{dz}{d\tau} = V.$$

Wir entnehmen daraus weiter

$$\frac{d(f^3)}{d\tau} = 3 \frac{df}{dz} V,$$

sodaß auch $\frac{d(f^3)}{d\tau}$ mit wachsendem τ beständig abnimmt; infolgedessen wird weiter $\frac{f^3}{\tau}$ eine beständig abnehmende und andrerseits $\frac{f^3}{1-\tau}$ eine beständig zunehmende Funktion von τ sein.

Betrachten wir wieder das durch (53) bestimmte Oval in seiner zf-Ebene. Es sei h die Länge derjenigen Sehne dieses Ovals, auf der $z = \frac{c+C}{2}$ ist, also $h = f\left(\frac{c+C}{2}\right)$. Die Tangente des Ovals im Endpunkte $f = h$ dieser Sehne bildet mit den Geraden $z = c$, $z = C$ und $f = 0$ ein Trapez, in welchem das Oval ganz enthalten ist; dadurch ergibt sich

$$V < \tfrac{4}{3}(C-c)h^2. \tag{55}$$

Andrerseits ist das Dreieck mit jener Sehne als Basis und der Spitze $z = c$, $f = 0$ ganz im Bereiche $z \leqq \frac{c+C}{2}$ des Ovals enthalten, und geht hieraus

$$\tfrac{1}{6}(C-c)h^2 < \tau\left(\tfrac{c+C}{2}\right) V$$

hervor; mit Rücksicht auf die Relation (55) erhalten wir sodann

$$\tau\left(\frac{c+C}{2}\right) > \frac{1}{8}.$$

Analog finden wir $1-\tau\left(\frac{c+C}{2}\right) < \frac{1}{8}$, also $\tau\left(\frac{c+C}{2}\right) > \frac{7}{8}$.

Für einen Wert $\tau > \frac{7}{8}$ wird demnach immer $z(\tau) > \frac{c+C}{2}$ sein; es folgt dann

$$\frac{f(z)}{C-z} > \frac{h}{\frac{1}{2}(C-c)}, \quad (1-\tau)V = \int_z^C (f(z))^2 dz > \frac{4}{3}\frac{(C-z)^3}{(C-c)^2}h^2,$$

woraus mit Hülfe von (55) die Ungleichung

$$C - z(\tau) < (C-c)\sqrt[3]{1-\tau} \tag{56}$$

hervorgeht, und es ergibt sich ferner

$$\frac{(f(z))^2}{1-\tau} > \frac{h^2}{1-\tau\left(\frac{c+C}{2}\right)} > \frac{8}{7}h^2, \quad \frac{(f(z))^2}{\tau} > \frac{8}{7}\frac{1-\tau}{\tau}\left(\frac{3}{4}\frac{V}{C-c}\right)^{\frac{2}{3}}, \tag{57}$$

Nehmen wir den Schwerpunkt von $\mathfrak{K}$ im Nullpunkt gelegen an, so führt die Betrachtung der z-Koordinate dieses Schwerpunkts zur Gleichung

$$0 = \frac{1}{V}\int_c^C z f^2 dz = \int_0^1 z\, d\tau, \quad C = \int_c^C \tau\, dz = V\int_0^1 \frac{\tau\, d\tau}{f^2}. \tag{58}$$

Zerlegen wir $\mathfrak{K}$ in lauter Pyramiden mit der Spitze in demjenigen Punkte von $\mathfrak{K}$, für den $z = c$ ist, und mit den einzelnen Oberflächenelementen von $\mathfrak{K}$ als Grundflächen, so ist für den Schwerpunkt einer jeden dieser Pyramiden $C - z > \frac{1}{4}(C-c)$ und gilt daher die gleiche Relation auch für den Schwerpunkt von $\mathfrak{K}$ selbst, d. h. man hat

$$C - c < 4C. \tag{59}$$

30. Es seien jetzt $\mathfrak{K}_1$ und $\mathfrak{K}_2$ zwei beliebige konvexe Körper mit den Stützebenenfunktionen H_1 und H_2 und t ein beliebiger Wert > 0 und < 1. Verbindet man jeden Punkt $\mathfrak{k}_1$ von $\mathfrak{K}_1$ mit jedem Punkte $\mathfrak{k}_2$ von $\mathfrak{K}_2$ und teilt die Strecke $\mathfrak{k}_1\mathfrak{k}_2$ immer in dem Punkte $\mathfrak{k} = (1-t)\mathfrak{k}_1 + t\mathfrak{k}_2$, so erfüllt die Gesamtheit aller verschiedenen in dieser Weise entstehenden Punkte $\mathfrak{k}$ genau den konvexen Körper $\mathfrak{K} = (1-t)\mathfrak{K}_1 + t\mathfrak{K}_2$, der als Stützebenenfunktion $H = (1-t)H_1 + tH_2$ besitzt (vgl. hierzu die Formel (21) in § 4). Das Volumen dieses Körpers $\mathfrak{K}$ wird durch einen Ausdruck

$$V = (1-t)^3 V_0 + 3(1-t)^2 t V_1 + 3(1-t)t^2 V_2 + t^3 V_3 \tag{60}$$

dargestellt, worin V_0, V_1, V_2, V_3 die gemischten Volumina

$$V(\mathfrak{K}_1, \mathfrak{K}_1, \mathfrak{K}_1),\quad V(\mathfrak{K}_1, \mathfrak{K}_1, \mathfrak{K}_2),\quad V(\mathfrak{K}_1, \mathfrak{K}_2, \mathfrak{K}_2),\quad V(\mathfrak{K}_2, \mathfrak{K}_2, \mathfrak{K}_2) \tag{61}$$

bedeuten, insbesondere also V_0 das Volumen von $\mathfrak{K}_1$ und V_3 das von $\mathfrak{K}_2$ vorstellt. Diese vier Konstanten bleiben bei beliebigen Translationen von $\mathfrak{K}_1$ und von $\mathfrak{K}_2$ ungeändert.

Wir wollen nun den Satz beweisen:

Für diese Konstanten im Ausdruck von V gilt stets die Ungleichung

$$V_1^3 \geqq V_0^2 V_3 \tag{62}$$

und zwar tritt hier das Gleichheitszeichen dann und nur dann ein, wenn $\mathfrak{K}_1$ *und* $\mathfrak{K}_2$ *homothetisch sind* (auseinander durch Translation und Dilatation hervorgehen).

Wir denken uns von vornherein mit $\mathfrak{K}_1$ und $\mathfrak{K}_2$ solche Translationen vorgenommen, daß sowohl der Schwerpunkt von $\mathfrak{K}_1$ wie der von $\mathfrak{K}_2$ in den Nullpunkt zu liegen kommt. Alsdann sind die Stützebenenfunktionen dieser Körper, $H_1(u,v,w)$ und $H_2(u,v,w)$, für alle Argumente $u, v, w \neq 0,0,0$ stets > 0. Es sei D das Maximum der Funktion

$$\frac{\sqrt[3]{V_0}\, H_2(\alpha,\beta,\gamma)}{\sqrt[3]{V_3}\, H_1(\alpha,\beta,\gamma)} \tag{63}$$

auf der ganzen Kugelfläche $\mathfrak{E}$ $(\alpha^2+\beta^2+\gamma^2=1)$; alsdann ist der Körper $\frac{1}{\sqrt[3]{V_3}}\,\mathfrak{K}_2$ vom Volumen 1 im Körper $\frac{s}{\sqrt[3]{V_0}}\,\mathfrak{K}_1$ vom Volumen s^3 enthalten, wenn $s \geqq D$ ist, aber nicht ganz darin enthalten, wenn $s < D$ ist. Wenn $\mathfrak{K}_1$ und $\mathfrak{K}_2$ homothetisch sind, gilt $D = 1$ und entnehmen wir aus der Regel (26) in 19., daß alsdann $\frac{V_1}{V_0} = \frac{V_2}{V_1} = \frac{V_3}{V_2}$ und daher $V_1^3 = V_0^2 V_3$ ist.

Sind $\mathfrak{K}_1$ und $\mathfrak{K}_2$ nicht homothetisch, was wir jetzt annehmen wollen, so fällt $D > 1$ aus, und wir werden zeigen, daß alsdann eine Ungleichung besteht:

$$\frac{V_1}{\sqrt[3]{V_0^2 V_3}} - 1 \geqq \Pi(D),$$

worin $\Pi(D)$ eine stetige Funktion von D vorstellt, welche für ein $D > 1$ stets > 0 ausfällt. Eine derartige Relation mit einer *stetigen* Funktion $\Pi(D)$ braucht nur für vollkommene Ovaloide $\mathfrak{K}_1$, $\mathfrak{K}_2$ bewiesen zu werden; vermöge unseres Hülfssatzes aus § 2 über die Annäherung beliebiger konvexer Körper durch vollkommene Ovaloide gilt sie dann sofort für alle konvexen Körper.

31. Es seien jetzt $\mathfrak{K}_1$ und $\mathfrak{K}_2$ zwei vollkommene Ovaloide und sie seien nicht einander homothetisch. Wir geben den Koordinatenachsen eine solche Lage, daß die positive z-Achse in eine Richtung fällt, wofür die Funktion (63) ihren größten Wert D annimmt. Wir verwenden die Zeichen c, C, $\mathfrak{F}(z)$, $f(z)$ für den Körper $\mathfrak{K} = (1-t)\,\mathfrak{K}_1 + t\mathfrak{K}_2$, wie sie für den Körper $\mathfrak{K}$ in 29. erklärt sind, und bezeichnen die entsprechenden Größen und Bereiche in Bezug auf $\mathfrak{K}_1$ oder $\mathfrak{K}_2$ analog unter Hinzufügung

des Index 1 oder 2. Alsdann ist $C_1 = H_1(1, 0, 0)$, $C_2 = H_2(1, 0, 0)$ und nach der eben gemachten Voraussetzung wird

$$\frac{\sqrt[3]{V_0 C_2}}{\sqrt[3]{V_3 C_1}} = D > 1. \tag{64}$$

Der kleinste und größte Wert von z in $\mathfrak{R}$ bestimmen sich gemäß

$$c = (1-t)c_1 + tc_2, \quad C = (1-t)C_1 + tC_2. \tag{65}$$

Wir setzen nun, wenn $c_1 \leqq z_1 \leqq C_1$, $c_2 \leqq z_2 \leqq C_2$ ist,

$$\int_{c_1}^{z_1} (f_1(z))^2 dz = \tau V_0, \qquad \int_{c_2}^{z_2} (f_2(z))^2 dz = \tau V_3, \tag{66}$$

und führen umgekehrt die oberen Grenzen dieser zwei Integrale als Funktionen $z_1(\tau)$, $z_2(\tau)$ der Variablen τ ein, die sich im Intervalle $0 \leqq \tau \leqq 1$ bewegt. Indem wir für τ in beiden Funktionen dasselbe Argument verwenden, erhalten wir eine gewisse Zuordnung der Schnitte $\mathfrak{F}_1(z_1(\tau))$ von $\mathfrak{R}_1$ und $\mathfrak{F}_2(z_2(\tau))$ von $\mathfrak{R}_2$.

Andrerseits stellen wir das Volumen von $\mathfrak{R}$ in der Formel

$$V = \int_c^C (f(z))^2 dz \tag{67}$$

dar. Setzen wir

$$z = (1-t)z_1(\tau) + tz_2(\tau), \tag{68}$$

so nimmt diese Funktion von τ, wenn τ von 0 bis 1 läuft, kontinuierlich wachsend die Werte von c bis C an. Wir wenden nun die in 30. erörterte Konstruktion, welche aus den Punkten von $\mathfrak{R}_1$ und von $\mathfrak{R}_2$ die Punkte von $\mathfrak{R}$ herzuleiten gestattet, speziell auf die Punkte $\mathfrak{f}_1$ von $\mathfrak{R}_1$ in seinem Schnitte $\mathfrak{F}_1(z_1(\tau))$ und die Punkte $\mathfrak{f}_2$ von $\mathfrak{R}_2$ in seinem Schnitte $\mathfrak{F}_2(z_2(\tau))$ an, wobei τ irgend ein Wert > 0 und < 1 sei. Die Menge der dabei hervorgehenden Punkte $\mathfrak{f} = (1-t)\mathfrak{f}_1 + t\mathfrak{f}_2$ bildet alsdann genau den Bereich

$$(1-t)\mathfrak{F}_1(z_1(\tau)) + t\mathfrak{F}_2(z_2(\tau)) \tag{69}$$

in derjenigen Ebene $z = \text{const.}$, die durch den Wert z in (68) bestimmt ist; danach muß der zu diesem Werte z gehörige Schnitt $\mathfrak{F}(z)$ von $\mathfrak{R}$ gewiß den ganzen Bereich (69) in sich enthalten. Ziehen wir die Relation (40) aus 26. heran, so geht daraus

$$f(z) \geqq (1-t)f_1(z_1(\tau)) + tf_2(z_2(\tau)) \tag{70}$$

hervor. Aus (67) erhalten wir nunmehr, wenn wir für $z_1(\tau)$, $f_1(z_1(\tau))$, $z_2(\tau)$, $f_2(z_2(\tau))$ zur Abkürzung z_1, f_1, z_2, f_2 schreiben:

$$V \geqq \int_0^1 ((1-t)f_1 + tf_2)^2 \left((1-t)\frac{dz_1}{d\tau} + t\frac{dz_2}{d\tau}\right) d\tau.$$

Wir verwenden jetzt den Ausdruck (60) für V, machen noch von

$$V_0 = \int_0^1 f_1^2 \frac{dz_1}{d\tau}\, d\tau$$

Gebrauch und lassen endlich in der entstehenden Ungleichung die Größe t sich der Grenze Null nähern; dadurch kommen wir zur Ungleichung

$$3V_1 \geqq \int_0^1 \left(f_1^2 \frac{dz_2}{d\tau} + 2f_1 f_2 \frac{dz_1}{d\tau}\right) d\tau.$$

Nach den Gleichungen (66) haben wir

$$f_1^2 \frac{dz_1}{d\tau} = V_0, \quad f_2^2 \frac{dz_2}{d\tau} = V_2,$$

und so ergibt sich weiter

$$3V_1 \geqq \int_0^1 \left(V_2 \frac{f_1^2}{f_2^2} + 2V_0 \frac{f_2}{f_1}\right) d\tau.$$

Setzen wir

$$\frac{f_1}{\sqrt[3]{V_0}} = \varphi_1, \quad \frac{f_2}{\sqrt[3]{V_2}} = \varphi_2, \tag{71}$$

so läßt sich diese letzte Ungleichung in

$$3\left(\frac{V_1}{\sqrt[3]{V_0^2 V_2}} - 1\right) \geqq \int_0^1 \left(\frac{\varphi_1^2}{\varphi_2^2} - 3 + \frac{2\varphi_2}{\varphi_1}\right) d\tau = \int_0^1 \frac{(\varphi_1 - \varphi_2)^2(\varphi_1 + 2\varphi_2)}{\varphi_1 \varphi_2^2}\, d\tau \tag{72}$$

umwandeln.

Andrerseits haben wir gemäß (58):

$$\frac{C_1}{\sqrt[3]{V_0}} = \int_0^1 \frac{\tau\, d\tau}{\varphi_1^2}, \quad \frac{C_2}{\sqrt[3]{V_2}} = \int_0^1 \frac{\tau\, d\tau}{\varphi_2^2},$$

mithin

$$\int_0^1 \frac{(\varphi_1 - \varphi_2)(\varphi_1 + \varphi_2)\tau}{\varphi_1^2 \varphi_2^2}\, d\tau = \frac{C_2}{\sqrt[3]{V_2}} - \frac{C_1}{\sqrt[3]{V_0}} = (D-1)\frac{C_1}{\sqrt[3]{V_0}} > 0. \tag{73}$$

Nehmen wir jetzt eine positive Größe $\delta < \frac{1}{8}$ an, so wird unter Verwendung von (56) und (59):

$$\int_{1-\delta}^1 \frac{\tau\, d\tau}{\varphi_2^2} < \int_{1-\delta}^1 \frac{d\tau}{\varphi_2^2} = \frac{C_2 - z_2(1-\delta)}{\sqrt[3]{V_2}} < 4\sqrt[3]{\delta}\, \frac{C_2}{\sqrt[3]{V_2}},$$

und mit Rücksicht hierauf folgt aus (73):

$$\int_0^{1-\delta} \frac{(\varphi_1-\varphi_2)(\varphi_1+\varphi_2)\tau}{\varphi_1^2\varphi_2^2}\,d\tau > \left(D\left(1-4\sqrt[3]{\delta}\right)-1\right)\frac{C_1}{\sqrt[3]{V_0}}. \tag{74}$$

Die Ungleichung (72) bleibt gültig, wenn wir auf der rechten Seite die Integration nur bis zur oberen Grenze $1-\delta$ erstrecken. Bezeichnen wir den Integranden in (74) mit Ψ, so wird der Integrand in (72):

$$\frac{(\varphi_1+2\varphi_2)\,\varphi_1^2\varphi_2^2}{(\varphi_1+\varphi_2)^2\tau^2}\,\Psi^2. \tag{75}$$

Nun ist im Intervalle $0<\tau\leqq 1-\delta$ zufolge (57) und (59):

$$\frac{\varphi_1^2}{\tau^{\frac{3}{2}}} > \frac{3}{7^{\frac{3}{2}}\cdot 4}\,\delta^{\frac{3}{2}}\frac{\sqrt[3]{V_0}}{C_1}, \qquad \frac{\varphi_2^2}{\tau^{\frac{3}{2}}} > \frac{3}{7^{\frac{3}{2}}\cdot 4}\,\delta^{\frac{3}{2}}\frac{\sqrt[3]{V_2}}{C_2},$$

wobei von den zwei unteren Grenzen hier wegen (64) die erste die größere ist; andrerseits hat man $\frac{\varphi_1(\varphi_1+2\varphi_2)}{(\varphi_1+\varphi_2)^2}\geqq\frac{3}{4}$, wenn $\varphi_1\geqq\varphi_2$ ist, und $\frac{\varphi_2(\varphi_1+2\varphi_2)}{(\varphi_1+\varphi_2)^2}\geqq\frac{3}{4}$, wenn $\varphi_2\geqq\varphi_1$ ist. Danach fällt der Faktor von Ψ^2 in (75) im Intervalle $0<\tau\leqq 1-\delta$ stets

$$> \frac{27}{7^{\frac{3}{2}}\cdot 64}\,\frac{\sqrt[3]{V_0V_2}}{C_1C_2}\,\delta^{\frac{3}{2}}$$

aus. Auf Grund der auch schon früher verwandten Hülfsformel (51) erhalten wir nunmehr:

$$3\left(\frac{V_1}{\sqrt[3]{V_0^2V_2}}-1\right) > \frac{3^3}{7^{\frac{3}{2}}\cdot 2^{14}}\left(4\sqrt[3]{\delta}\right)^4\frac{\left(D(1-4\sqrt[3]{\delta})-1\right)^2}{D}.$$

Das Produkt $\left(4\sqrt[3]{\delta}\right)^2\left(D-1-4\sqrt[3]{\delta}\,D\right)$ nimmt seinen größten Wert für $4\sqrt[3]{\delta}=\frac{2(D-1)}{3D}$ an, wobei $\delta<\frac{1}{216}$, also sicher $<\frac{1}{8}$ ist, und wird dann $=\frac{4(D-1)^3}{27D^2}$. Mit diesem Werte für δ folgt endlich

$$\frac{V_1}{\sqrt[3]{V_0^2V_2}}-1 \geqq \frac{1}{2^{10}\cdot 3^4\cdot 7^{\frac{3}{2}}}\,\frac{(D-1)^6}{D^5}. \tag{76}$$

In solcher Form überträgt sich diese Ungleichung sofort auf zwei beliebige konvexe Körper $\mathfrak{K}_1$ und $\mathfrak{K}_2$ und setzt in der Tat in Evidenz, *daß, wenn $\mathfrak{K}_1$ und $\mathfrak{K}_2$ nicht homothetisch sind, stets*

$$V_1 > \sqrt[3]{V_0^2V_2}$$

ausfällt.

32. Vertauschen wir die Rollen von $\mathfrak{K}_1$ und $\mathfrak{K}_2$, so treten, wie aus (61) zu ersehen ist, an Stelle von V_0, V_1, V_2, V_3 diese Größen in um-

gekehrter Folge und geht aus $V_1 \geqq \sqrt[3]{V_0^2 V_3}$ die Ungleichung $V_2 \geqq \sqrt[3]{V_0 V_3^2}$ hervor. Diese zwei Ungleichungen zusammen ergeben für den Ausdruck V in (60) die Abschätzung

$$\sqrt[3]{V} \geqq (1-t)\sqrt[3]{V_0} + t\sqrt[3]{V_3}. \tag{77}$$

Bezeichnen wir das *Minimum* der Funktion (63) auf der Kugelfläche $\mathfrak{E}$ mit d, so ist der Körper $\frac{d}{\sqrt[3]{V_0}}\mathfrak{K}_1 = \mathfrak{Q}_1$ ganz im Körper $\frac{1}{\sqrt[3]{V_3}}\mathfrak{K}_2 = \mathfrak{Q}_2$ enthalten; infolgedessen gilt:

$$V(\mathfrak{Q}_2, \mathfrak{Q}_2, \mathfrak{Q}_2) \geqq V(\mathfrak{Q}_1, \mathfrak{Q}_1, \mathfrak{Q}_2),$$

d. h.

$$1 \geqq \frac{d^2 V_1}{\sqrt[3]{V_0^2 V_3}}, \qquad \frac{1}{d^2} - 1 \geqq \frac{V_1}{\sqrt[3]{V_0^2 V_3}} - 1.$$

Verbinden wir hiermit die Ungleichung (76), so folgt

$$\frac{1}{d^2} - 1 \geqq \frac{1}{2^{10} \cdot 3^4 \cdot 7^{\frac{1}{2}}} \frac{(D-1)^6}{D^5}. \tag{78}$$

Vertauschen wir die Rollen von $\mathfrak{K}_1$ und $\mathfrak{K}_2$, so ist D durch $\frac{1}{d}$ und d durch $\frac{1}{D}$ zu ersetzen und dürfen wir mithin in dieser Relation (78) noch D und $\frac{1}{d}$ mit einander vertauschen.

33. Nehmen wir für $\mathfrak{K}_2$ eine Kugel vom Radius 1, so ist $V_3 = \frac{4\pi}{3}$ und $3V_1$ definiert uns die *Oberfläche* von $\mathfrak{K}_1$. Die aus (62) entstehende Ungleichung

$$\sqrt[2]{\frac{3V_1}{4\pi}} \geqq \sqrt[3]{\frac{V_0}{\frac{4\pi}{3}}}$$

besagt:

*Jeder konvexe Körper, welcher nicht eine Kugel ist, besitzt immer eine größere Oberfläche als eine Kugel von demselben Volumen**).

Es sei jetzt $\mathfrak{K}_1$ zunächst ein vollkommenes Ovaloid. Wir bezeichnen mit df ein Element der Begrenzung von $\mathfrak{K}_1$, mit α, β, γ die äußere Normale dieses Elements, mit $d\omega^*$ ein Element der Kugelfläche $\mathfrak{E}$, mit $\alpha^*, \beta^*, \gamma^*$ die äußere Normale von $d\omega^*$. Alsdann hat die orthogonale Projektion der Begrenzung von $\mathfrak{K}_1$ auf eine zur Richtung $\alpha^*, \beta^*, \gamma^*$ senkrechte Ebene einen Flächeninhalt

$$P(\alpha^*, \beta^*, \gamma^*) = \frac{1}{2}\int |\alpha\alpha^* + \beta\beta^* + \gamma\gamma^*| \, df.$$

---

*) Von der Literatur über diesen Satz seien erwähnt: Steiner, Ueber Maximum und Minimum bei den Figuren etc., Crelles Journ. Bd. 24, 1842 (auch Werke Bd. II). — H. A. Schwarz, Gött. Nachr. 1884 (auch Ges. Abh. Bd. II). — J. O. Müller, Inauguraldissertation, Göttingen 1903.

Das arithmetische Mittel aller Größen $P(\alpha^*, \beta^*, \gamma^*)$ *in Bezug auf alle möglichen Richtungen* $(\alpha^*, \beta^*, \gamma^*)$ *wird nun*

$$\frac{\int P(\alpha^*, \beta^*, \gamma^*)\, d\omega^*}{\int d\omega^*} = \frac{1}{8\pi}\int\int |\alpha\alpha^* + \beta\beta^* + \gamma\gamma^*|\, df\, d\omega^* = \frac{1}{4}\int df = \frac{3}{4} V_1,$$

d. i. gleich dem vierten Teile der Oberfläche von $\mathfrak{K}_1$. Dieses Resultat überträgt sich sofort von vollkommenen Ovaloiden auf beliebige konvexe Körper. Verbinden wir damit den vorhin gefundenen Satz, so ergibt sich die Folgerung:

Jeder konvexe Körper, der nicht eine Kugel ist, besitzt stets unter den ihm umbeschriebenen Cylindern solche, welche einen größeren Querschnitt haben als die einer Kugel von demselben Volumen wie der Körper umbeschriebenen Cylinder.

34. Wir nehmen ferner für $\mathfrak{K}_2$ den Würfel von der Kante 1:

$$-\frac{1}{2} \leqq x \leqq \frac{1}{2}, \quad -\frac{1}{2} \leqq y \leqq \frac{1}{2}, \quad -\frac{1}{2} \leqq z \leqq \frac{1}{2};$$

für diesen Körper ist $H_2(\alpha, \beta, \gamma) = \frac{1}{2}(|\alpha| + |\beta| + |\gamma|)$ und stellt infolgedessen $3V_1 = 3V(\mathfrak{K}_2, \mathfrak{K}_1, \mathfrak{K}_1)$ nach (24) und (18) die Summe der Flächeninhalte der drei senkrechten Projektionen des Körpers $\mathfrak{K}_1$ auf die drei Koordinatenebenen dar, während $V_3 = 1$ ist. Aus unserer allgemeinen Ungleichung (62) folgt hier der Satz:

Wird ein konvexer Körper vom Volumen V senkrecht auf drei zu einander orthogonale Ebenen projiziert, so ist die Summe der Flächeninhalte dieser drei Projektionen stets $\geqq 3V^{\frac{2}{3}}$ *und nur dann* $= 3V^{\frac{2}{3}}$, *wenn der Körper ein Würfel mit Seitenflächen parallel den drei Ebenen ist.* Unter solchen drei zu einander orthogonalen Projektionen des Körpers befindet sich dann gewiß wenigstens eine von einem Flächeninhalt $\geqq V^{\frac{2}{3}}$.

§ 7.

Weitere Ungleichungen für die gemischten Volumina.

35. Es seien wieder $\mathfrak{K}_1$ und $\mathfrak{K}_2$ zwei beliebige konvexe Körper und es mögen für sie V_0, V_1, V_2, V_3 die bisherige Bedeutung (s. (61)) haben. Das Volumen eines Körpers $s_1\mathfrak{K}_1 + s_2\mathfrak{K}_2$, wobei $s_1 > 0$ und $s_2 > 0$ ist, hat den Ausdruck

$$s_1^3 V_0 + 3s_1^2 s_2 V_1 + 3s_1 s_2^2 V_2 + s_2^3 V_3.$$

Wenden wir diese Formel auf einen Körper

$$(1+t)\mathfrak{K}_1 + ts\mathfrak{K}_2 = \mathfrak{K}_1 + t(\mathfrak{K}_1 + s\mathfrak{K}_2)$$

an, wo t und $s > 0$ seien, und ordnen die entstehende Formel nach t, so kommen wir zu folgender Bemerkung:

Wenn $\mathfrak{R}_1$, $\mathfrak{R}_2$ durch $\mathfrak{R}_1$, $\mathfrak{R}_1 + s\mathfrak{R}_2$ ersetzt werden, so treten an die Stelle von V_0, V_1, V_2, V_3 die Größen

$$V_0,\ V_0 + sV_1,\quad V_0 + 2sV_1 + s^2V_2,\quad V_0 + 3sV_1 + 3s^2V_2 + s^3V_3.$$

Aus der Ungleichung $V_1^3 - V_0^2V_3 \geqq 0$ entsteht nun bei dieser Substitution die Ungleichung

$$\begin{aligned}&(V_0+sV_1)^3 - V_0^2(V_0+3sV_1+3s^2V_2+s^3V_3)\\ &= s^2(3V_0(V_1^2-V_0V_2)+s(V_1^3-V_0^2V_3)) \geqq 0.\end{aligned}$$

Lassen wir hierin die positive Größe s nach Null abnehmen, so gewinnen wir die folgende in den Größen V_i quadratische Ungleichung:

$$V_1^2 \geqq V_0V_2. \tag{79}$$

36. Vertauschen wir die Rollen der Körper $\mathfrak{R}_1$ und $\mathfrak{R}_2$, so treten an die Stelle von V_0, V_1, V_2, V_3 diese Größen in umgekehrter Folge und aus (79) geht die andere Ungleichung

$$V_2^2 \geqq V_1V_3 \tag{80}$$

hervor.

Andrerseits führen die zwei quadratischen Ungleichungen (79) und (80) bei Elimination von V_2 zu

$$V_1^3 \geqq \frac{V_0^2V_2^2}{V_1} \geqq V_0^2V_3,$$

mithin zurück zu der kubischen Ungleichung, von der wir ausgegangen sind, sodaß jene kubische Ungleichung und die quadratische (79) einander gegenseitig zur Folge haben.

Doch besteht in der Abhängigkeit dieser Ungleichungen von einander ein wesentlicher Unterschied, insofern als die Grenzfälle der quadratischen Ungleichung sofort auch die Grenzfälle der kubischen ergeben, dagegen nicht umgekehrt aus den Bedingungen, unter welchen in der kubischen Ungleichung das Gleichheitszeichen statthat, vollkommen zu ersehen ist, wann das Gleichheitszeichen in der quadratischen eintritt.

37. Man kann nun die quadratische Ungleichung $V_1^2 \geqq V_0V_2$ auch auf einem direkten Wege durch analoge Überlegungen, wie sie zu der genaueren Ungleichung (76) führten, herleiten und gelangt alsdann auch zur Kenntnis der Grenzfälle dieser quadratischen Ungleichung. Wir begnügen uns hier, das bezügliche Resultat ohne Beweis anzugeben.

Wir bezeichnen eine Stützebene $\varphi \leqq 0$ an einen konvexen Körper $\mathfrak{K}$ als eine *Eckstützebene* an $\mathfrak{K}$, wenn wir $\varphi = t_1\varphi_1 + t_2\varphi_2 + t_3\varphi_3$ setzen können, sodaß t_1, t_2, t_3 sämtlich > 0 und $\varphi_1 \leqq 0$, $\varphi_2 \leqq 0$, $\varphi_3 \leqq 0$ drei solche Stützebenen an $\mathfrak{K}$ sind, deren äußere Normalenrichtungen *unabhängig* sind, d. h. nicht einer einzigen Ebene angehören. Ein konvexer Körper $\mathfrak{K}$ heiße ein *Kappenkörper* eines konvexen Körpers $\mathfrak{K}'$, wenn mit Ausnahme

nur von gewissen Eckstützebenen alle anderen Stützebenen an $\mathfrak{K}$ zugleich auch Stützebenen an $\mathfrak{K}'$ bilden. Der allgemeinste *Kappenkörper einer Kugel* wird erhalten, indem man die Kugel als Grundbestandteil nimmt, auf ihrer Oberfläche eine endliche oder unendliche Anzahl von Kalotten bezeichnet, von denen keine die Größe einer halben Kugelfläche erreicht oder überschreitet und die untereinander höchstens in den Randpunkten zusammenstoßen, und sodann die Kugel auf jeder dieser Kalotten mit der Kegelkappe versieht, bei der die Kalotte als Basis dient und die Erzeugenden des Mantels die Kugel in dem Rande der Kalotte berühren.

Es besteht nun der Satz:

In der Ungleichung $V_1^2 \geqq V_0 V_2$ *für zwei beliebige konvexe Körper* $\mathfrak{K}_1$ *und* $\mathfrak{K}_2$ *hat dann und nur dann das Gleichheitszeichen statt, wenn* $\mathfrak{K}_1$ *homothetisch mit* $\mathfrak{K}_2$ *oder mit einem Kappenkörper von* $\mathfrak{K}_2$ *ist.*

Bei einem vollkommenen Ovaloide kommen keine Eckstützebenen vor und kann ein solches daher niemals Kappenkörper eines anderen konvexen Körpers sein. Wenn also $\mathfrak{K}_1$ ein vollkommenes Ovaloid ist, gilt in $V_1^2 \geqq V_0 V_2$ das Gleichheitszeichen nur dann, wenn $\mathfrak{K}_2$ und $\mathfrak{K}_1$ selbst homothetisch sind.

Nehmen wir für $\mathfrak{K}_2$ eine Kugel vom Radius 1, so ist V_0 das Volumen, $3V_1$ die Oberfläche, $3V_2$ das Integral der mittleren Krümmung von $\mathfrak{K}_1$ und $V_3 = \frac{4\pi}{3}$. Alsdann gilt $V_1^2 \geqq V_0 V_2$ und hat hier das Gleichheitszeichen dann und nur dann statt, wenn $\mathfrak{K}_1$ eine Kugel oder ein Kappenkörper einer Kugel ist. Zweitens gilt $V_2^2 \geqq V_1 V_3$ und in dieser Ungleichung hat das Gleichheitszeichen dann und nur dann statt, wenn $\mathfrak{K}_1$ selbst eine Kugel ist.

Danach liefern unter allen konvexen Körpern von gleicher Oberfläche die Kugeln und die Kappenkörper von Kugeln das Maximum des Produkts aus Volumen und Integral der mittleren Krümmung und andrerseits allein die Kugeln das Minimum des Integrals der mittleren Krümmung. Aus diesen beiden Tatsachen zusammen folgt, daß unter allen konvexen Körpern von gleicher Oberfläche die Kugeln das größte Volumen darbieten.

38. Es seien jetzt $\mathfrak{K}_1$, $\mathfrak{K}_2$, $\mathfrak{K}_3$ drei beliebige konvexe Körper; das Volumen eines Körpers $\mathfrak{K} = s_1\mathfrak{K}_1 + s_2\mathfrak{K}_2 + s_3\mathfrak{K}_3$, wobei $s_1, s_2, s_3 \geqq 0$, aber nicht durchweg 0 sind, stellt sich durch eine ternäre kubische Form

$$V = \sum V_{jkl} s_j s_k s_l$$

dar, wo jeder der Indizes die Werte 1, 2, 3 zu durchlaufen hat. Der Koeffizient V_{jkl} bedeutet das gemischte Volumen $V(\mathfrak{K}_j, \mathfrak{K}_k, \mathfrak{K}_l)$.

Wir wenden nun die für zwei konvexe Körper nachgewiesene Ungleichung $V_1^2 - V_0 V_2 \geqq 0$ derart an, daß wir für den ersten Körper

$p_1\mathfrak{R}_1 + p_2\mathfrak{R}_2 + p_3\mathfrak{R}_3$, für den zweiten $q_1\mathfrak{R}_1 + q_2\mathfrak{R}_2 + q_3\mathfrak{R}_3$ nehmen, wobei $p_1, \cdots q_3$ lauter positive Parameter seien. Setzen wir

$$V_{jk1}p_1 + V_{jk2}p_2 + V_{jk3}p_3 = P_{jk},$$

so wird hier

$$V_0 = \sum P_{jk}p_jp_k, \quad V_1 = \sum P_{jk}p_jq_k, \quad V_2 = \sum P_{jk}q_jq_k.$$

Wir nehmen noch

$$q_1 = tp_1 + r_1, \quad q_2 = tp_2 + r_2, \quad q_3 = tp_3 + r_3$$

an; *dabei können* r_1, r_2, r_3 *beliebige reelle Werte bedeuten* und bei positiven p_1, p_2, p_3 kann stets t so groß gewählt werden, daß auch q_1, q_2, q_3 sämtlich > 0 sind. Die in Rede stehende Ungleichung verwandelt sich nunmehr in

$$\left(\sum P_{jk}p_jr_k\right)^2 - \left(\sum P_{jk}p_jp_k\right)\left(\sum P_{jk}r_jr_k\right) \geqq 0.$$

Wir nehmen jetzt $p_3 = 1$ an und lassen die positiven Werte p_1, p_2 sich der Grenze Null nähern; es entsteht dann hieraus:

$$(V_{133}r_1 + V_{233}r_2)^2 - V_{333}(V_{113}r_1^2 + 2V_{123}r_1r_2 + V_{223}r_2^2) \geqq 0$$

und dabei muß diese Ungleichung für beliebige Werte r_1, r_2 gelten. Setzen wir nun

$$\Delta^{(3)} = \begin{vmatrix} V_{113}, & V_{123}, & V_{133} \\ V_{213}, & V_{223}, & V_{233} \\ V_{313}, & V_{323}, & V_{333} \end{vmatrix}$$

und bezeichnen die adjungierte Unterdeterminante zum Element V_{jk3} hier mit $W_{jk}^{(3)}$, so schreibt sich diese Ungleichung

$$-W_{22}^{(3)}r_1^2 + 2W_{21}^{(3)}r_1r_2 - W_{11}^{(3)}r_2^2 \geqq 0. \tag{81}$$

Die Determinante der binären quadratischen Form rechts hier ist $V_{333}\Delta^{(3)}$ und folgt daher

$$\Delta^{(3)} \geqq 0.$$

Ferner haben wir insbesondere $-W_{22}^{(3)} \geqq 0$, $-W_{11}^{(3)} \geqq 0$. Ist nun etwa $-W_{22}^{(3)} > 0$, so geht vermöge der Beziehung

$$W_{22}^{(3)}W_{33}^{(3)} - (W_{23}^{(3)})^2 = V_{113}\Delta^{(3)}$$

die Ungleichung

$$-W_{33}^{(3)} = V_{123}^2 - V_{113}V_{223} \geqq 0$$

hervor. Analog erschließt man diese Ungleichung, wenn $-W_{11}^{(3)} > 0$ ist.

Hat man jedoch sowohl $-W_{22}^{(3)} = 0$ wie $-W_{11}^{(3)} = 0$, so muß, da die Ungleichung (81) für beliebige r_1 und r_2 statthaben soll, durchaus auch $W_{12}^{(3)} = 0$ sein, und dann sind in $\Delta^{(3)}$ die erste und dritte und ferner die zweite und dritte Reihe proportional und folgt dadurch

$$\Delta^{(3)} = 0, \quad -W_{33}^{(3)} = 0.$$

In allen Fällen gilt hiernach

$$V_{123}^2 \geqq V_{113} V_{223}. \tag{82}$$

Verbinden wir diese Ungleichung mit den zwei Ungleichungen

$$V_{113}^3 \geqq V_{111}^2 V_{333}, \quad V_{223}^3 \geqq V_{222}^2 V_{333}, \tag{83}$$

welche die Beziehung $V_1^3 \geqq V_0^2 V_3$ für $\mathfrak{K}_1$ und $\mathfrak{K}_3$ bez. für $\mathfrak{K}_2$ und $\mathfrak{K}_3$ vorstellen, so gelangen wir durch Elimination von V_{113} und V_{223} zu

$$V_{123}^3 \geqq V_{111} V_{222} V_{333}. \tag{84}$$

Dabei kann in dieser Ungleichung das Gleichheitszeichen nur statthaben, wenn in *beiden* Ungleichungen (83) das Gleichheitszeichen gilt. Damit kommen wir zu folgendem Satze:

Drei beliebige konvexe Körper vom Volumen 1 $\left(\text{hier } \frac{1}{\sqrt[3]{V_{111}}}\mathfrak{K}_1, \frac{1}{\sqrt[3]{V_{222}}}\mathfrak{K}_2, \frac{1}{\sqrt[3]{V_{333}}}\mathfrak{K}_3\right)$ *ergeben stets ein gemischtes Volumen* $\left(\text{nämlich } \frac{V_{123}}{\sqrt[3]{V_{111} V_{222} V_{333}}}\right)$, *das* $\geqq 1$ *und nur dann* $= 1$ *ist, wenn alle drei Körper einander homothetisch sind.*

Die frühere Ungleichung $V_1^3 \geqq V_0^2 V_3$ geht aus diesem Satze, ebenso die Ungleichung $V_1^2 \geqq V_0 V_2$ aus (82) als spezieller Fall hervor, wenn der zweite und dritte Körper identisch gesetzt werden.

39. Es seien $\mathfrak{K}_1, \mathfrak{K}_2, \cdots \mathfrak{K}_m$ m beliebige konvexe Körper. Wir wenden die Ungleichung (82) für drei konvexe Körper an, indem wir für den ersten einen Körper $\sum p_i \mathfrak{K}_i$, für den zweiten einen Körper $\sum (tp_i + r_i)\mathfrak{K}_i$, für den dritten einen Körper $\sum s_i \mathfrak{K}_i$ $(i = 1, 2, \cdots m)$ nehmen, wobei die r_i beliebige Größen und die Werte p_i, $tp_i + r_i$, s_i sämtlich positiv sind. Setzen wir

$$V(\mathfrak{K}_j, \mathfrak{K}_k, \mathfrak{K}_l) = V_{jkl}, \quad V_{jk1} s_1 + V_{jk2} s_2 + \cdots + V_{jkm} s_m = S_{jk},$$

so wird die betreffende Ungleichung

$$\left(\sum S_{jk} p_j r_k\right)^2 - \left(\sum S_{jk} p_j p_k\right)\left(\sum S_{jk} r_j r_k\right) \geqq 0;$$

sie bedeutet, daß die quadratische Form $\sum S_{jk} r_j r_k$ bei einer Transformation in ein Aggregat von Quadraten reeller unabhängiger linearer Formen mit positiven oder negativen Vorzeichen *ein einziges Quadrat mit positivem und im übrigen lauter Quadrate mit negativem Vorzeichen* darbieten muß. Im besonderen muß danach die Determinante dieser Form mit $(-1)^{m-1}$ multipliziert, stets $\geqq 0$ sein, d. h. für beliebige positive Werte $s_1, s_2, \cdots s_m$ muß stets die Ungleichung

$$(-1)^{m-1} |V_{jk1} s_1 + V_{jk2} s_2 + \cdots + V_{jkm} s_m| \geqq 0 \tag{85}$$

bestehen.

§ 8.

Stetig gekrümmte konvexe Körper.

40. Das allgemeine Theorem $V_1^3 \geqq V_0^2 V_3$ für zwei beliebige konvexe Körper ist aufs engste mit gewissen Fragen über die Krümmung konvexer Körper verknüpft.

Sind $\mathfrak{K}$ und $\mathfrak{K}'$ zwei beliebige konvexe Körper, so wollen wir den Wert $3V(\mathfrak{K}', \mathfrak{K}, \mathfrak{K})$ die *Relativoberfläche von* $\mathfrak{K}$ *in Bezug auf* $\mathfrak{K}'$ nennen. Es seien H und H' die Stützebenenfunktionen von $\mathfrak{K}$ und $\mathfrak{K}'$. Wir nehmen $\mathfrak{K}$ zunächst als ein vollkommenes Ovaloid an und verwenden dafür die in § 3 eingeführten Bezeichnungen; alsdann gilt nach (24) und (18) der Ausdruck

$$3V(\mathfrak{K}', \mathfrak{K}, \mathfrak{K}) = \int H'(RT - S^2)\, d\omega = \int H' df; \tag{86}$$

darin bedeutet df das Flächenelement der Begrenzung von $\mathfrak{K}$, welches durch parallele Normalen dem Element $d\omega$ der Kugelfläche $\mathfrak{E}$ entspricht, und $RT - S^2$ das Produkt der Hauptkrümmungsradien, die reziproke Gaußsche Krümmung, an der Stelle von df.

Setzen wir $H' = H + \delta H$, so hat der Körper $(1-t)\mathfrak{K} + t\mathfrak{K}'$, wenn $t > 0$ und < 1 ist, die Stützebenenfunktion $H + t\delta H$. Die Differenz aus dem Volumen dieses Körpers und dem Volumen von $\mathfrak{K}$ ist dann bis auf Größen von der Ordnung t^2 gleich

$$t \int \delta H (RT - S^2)\, d\omega = t \int \delta H\, df.$$

41. Diese Beziehungen, die jedenfalls bei einem vollkommenen Ovaloide $\mathfrak{K}$ statthaben, veranlassen uns nun zu folgender Definition:

Ein konvexer Körper $\mathfrak{K}$ *soll stetig gekrümmt heißen, wenn für ihn eine auf der Kugeloberfläche* $\mathfrak{E}$ *stetige und durchweg positive Funktion* $F = F(\alpha, \beta, \gamma)$ *existiert derart, daß die Relativoberfläche von* $\mathfrak{K}$ *in Bezug auf einen beliebigen konvexen Körper* $\mathfrak{K}'$ *mit der Stützebenenfunktion* H' *immer den Ausdruck hat:*

$$3V(\mathfrak{K}', \mathfrak{K}, \mathfrak{K}) = \int H' F\, d\omega. \tag{87}$$

Diese Funktion $F(\alpha, \beta, \gamma)$ (oder $F(\vartheta, \psi)$) wollen wir dann die *Krümmungsfunktion* des Körpers $\mathfrak{K}$ nennen. Zunächst leuchtet ein, daß bei einem stetig gekrümmten Körper $\mathfrak{K}$ diese Funktion jedenfalls eine durchaus bestimmte ist. Denn nehmen wir an, es gäbe für $\mathfrak{K}$ noch eine zweite auf $\mathfrak{E}$ stetige und positive Funktion $F^*(\alpha, \beta, \gamma)$, welche in derselben

Weise wie F in (87) eintreten könnte, so wäre dann für jeden beliebigen konvexen Körper $\mathfrak{K}'$ stets

$$(88) \qquad \int H' F^* d\omega = \int H' F d\omega, \quad \int H'(F^* - F) d\omega = 0.$$

Da $F^* - F$ auf $\mathfrak{E}$ nicht durchweg Null ist, können wir auf $\mathfrak{E}$ einen Punkt finden, wo $F^* - F + 0$ ist, und hernach können wir, da $F^* - F$ auf $\mathfrak{E}$ stetig ist, eine ganze Kalotte um diesen Punkt bestimmen, (die wir kleiner als eine Halbkugel wählen), sodaß $F^* - F$ daselbst überall $+ 0$ und also von konstantem Vorzeichen, etwa stets > 0 ist. Wir setzen auf die Kalotte die Kegelkappe, bei welcher die Kalotte die Basis bildet und die Erzeugenden des Mantels die Kugelfläche $\mathfrak{E}$ im Rande der Kalotte berühren, und nehmen nun in der Gleichung (88) für $\mathfrak{K}'$ einmal den Körper, der aus der Kugel $\mathfrak{E}$ und dieser Kappe besteht, ein andres Mal $\mathfrak{E}$ selbst, so hat das Integral $\int H'(F^* - F) d\omega$ im ersten Falle einen größeren Wert als im zweiten Falle und kann daher nicht in beiden Fällen Null sein.

42. Nehmen wir mit dem Körper $\mathfrak{K}'$, für den (87) gebildet ist, die Translation vom Nullpunkte nach einem Punkte a, b, c vor, so ist $H'(\alpha, \beta, \gamma)$ durch

$$H'(\alpha, \beta, \gamma) + a\alpha + b\beta + c\gamma$$

zu ersetzen. Da nun hierbei der Wert $3V(\mathfrak{K}', \mathfrak{K}, \mathfrak{K})$ sich nicht ändert und die Größen a, b, c völlig beliebig sind, so ersehen wir:

Die Krümmungsfunktion F für einen stetig gekrümmten Körper muß stets die drei Bedingungsgleichungen erfüllen:

$$(89) \qquad \int \alpha F d\omega = 0, \quad \int \beta F d\omega = 0, \quad \int \gamma F d\omega = 0.$$

Andrerseits erhellt, daß, wenn wir mit $\mathfrak{K}$ eine Translation vornehmen, dabei die Krümmungsfunktion invariant ist. Unter den sämtlichen, aus $\mathfrak{K}$ durch Translationen abzuleitenden Körpern können wir einen bestimmten Körper durch die Lage des Schwerpunkts fixieren.

Ist t ein positiver Parameter, so hat $t\mathfrak{K}$ die Krümmungsfunktion $t^2 F$, wenn F die Krümmungsfunktion von $\mathfrak{K}$ ist; dieses folgt unmittelbar aus der Formel

$$3V(\mathfrak{K}', t\mathfrak{K}, t\mathfrak{K}) = 3t^2 V(\mathfrak{K}', \mathfrak{K}, \mathfrak{K}).$$

43. Unsere weiteren Entwicklungen nun werden darauf gerichtet sein, den folgenden sehr bemerkenswerten Satz zu beweisen:

Ist $F(\alpha, \beta, \gamma)$ eine auf der Kugelfläche $\mathfrak{E}$ beliebig vorgeschriebene, daselbst stetige und durchweg positive Funktion, welche die drei Bedingungsgleichungen

$$\int \alpha F d\omega = 0, \quad \int \beta F d\omega = 0, \quad \int \gamma F d\omega = 0$$

erfüllt, so gibt es immer einen stetig gekrümmten konvexen Körper $\mathfrak{K}$ *mit* $F(\alpha, \beta, \gamma)$ *als Krümmungsfunktion, und dieser Körper ist bestimmt bis auf eine willkürliche Translation, durch die man ihn noch abändern kann,* also eindeutig festgelegt, wenn noch zusätzlich gefordert wird, daß sein Schwerpunkt im Nullpunkte liegen soll.

Wir beweisen zunächst den Nachsatz, daß den hier gestellten Forderungen, wenn überhaupt, jedenfalls nur durch einen einzigen Körper genügt werden kann. In der Tat, nehmen wir an, es sei ein konvexer Körper $\mathfrak{K}$ gefunden mit F als Krümmungsfunktion und mit dem Schwerpunkte im Nullpunkte, und es sei H die Stützebenenfunktion von $\mathfrak{K}$. Zunächst ist klar, daß unter den mit $\mathfrak{K}$ homothetischen Körpern kein anderer diese beiden Eigenschaften mit $\mathfrak{K}$ teilt.

Das Volumen von $\mathfrak{K}$ ist durch

$$V = \frac{1}{3}\int H F d\omega$$

dargestellt. Ist sodann $\mathfrak{K}'$ mit der Stützebenenfunktion H' und dem Volumen V' ein beliebiger konvexer Körper, der mit $\mathfrak{K}$ nicht homothetisch ist, so ergibt das allgemeine Theorem $\frac{V_1}{\sqrt[3]{V_3}} > \frac{V_0}{\sqrt[3]{V_0}}$ auf die Körper $\mathfrak{K}$ und $\mathfrak{K}'$ angewandt:

$$\frac{1}{3}\int \frac{H'}{\sqrt[3]{V'}} F d\omega > \frac{1}{3}\int \frac{H}{\sqrt[3]{V}} F d\omega. \tag{90}$$

Darin sind nun $\frac{H}{\sqrt[3]{V}}$ und $\frac{H'}{\sqrt[3]{V'}}$ die Stützebenenfunktionen der Körper

$$\mathfrak{L} = \frac{1}{\sqrt[3]{V}}\mathfrak{K} \quad \text{und} \quad \mathfrak{L}' = \frac{1}{\sqrt[3]{V'}}\mathfrak{K}',$$

und diese zwei mit $\mathfrak{K}$ bez. $\mathfrak{K}'$ homothetischen Körper sind dadurch charakterisiert, daß sie ein Volumen $= 1$ haben.

Damit kommen wir zu folgendem Ergebnisse, welches zeigt, daß der Körper $\mathfrak{K}$ eindeutig bestimmt ist.

Man betrachte für alle möglichen konvexen Körper $\mathfrak{L}$ *vom Volumen* 1 *das Integral*

$$J(\mathfrak{L}) = \frac{1}{3}\int L F d\omega,$$

wobei $L = L(\alpha, \beta, \gamma)$ *die Stützebenenfunktion von* $\mathfrak{L}$ *und* $F = F(\alpha, \beta, \gamma)$ *die gegebene Funktion für die Argumente* α, β, γ, *die Normale in* $d\omega$, *bedeute; gibt es einen stetig gekrümmten konvexen Körper* $\mathfrak{K}$ *mit* F *als Krümmungsfunktion, so hat dieses Integral* $J(\mathfrak{L})$ *für einen ganz bestimmten Körper* $\mathfrak{L}$ *mit dem Nullpunkte als Schwerpunkt (und für die aus ihm durch*

Translationen hervorgehenden Körper) einen kleinsten Wert J, und alsdann ist $\mathfrak{R}$ identisch mit $\sqrt{J}\,\Omega$ oder geht aus letzterem Körper durch eine Translation hervor.

44. Zugleich werden wir hierdurch auf ein gewisses Variationsproblem hingewiesen, das in nahem Zusammenhange mit der von uns zu behandelnden Aufgabe steht; und in der Tat erkennen wir sofort, daß die Differentialgleichung zu diesem Variationsproblem

$$RT - S^2 = F(\vartheta, \psi)$$

wird, worin F die gegebene, den Gleichungen (89) genügende Funktion ist, und die in R, S, T auftretende Funktion $H(\vartheta, \psi)$ gefunden werden soll. Diese Gleichung ist nach den Ausdrücken von R, S, T in (17) für $H(\vartheta, \psi)$ eine quadratische Differentialgleichung zweiter Ordnung von dem Monge-Ampèreschen Typus; sie transformiert sich, wenn wir auf der Oberfläche des gesuchten Körpers die Koordinate z als Funktion von x, y einführen, in die Gleichung:

$$rt - s^2 = f(p, q)$$

für diese Funktion $z(x, y)$, wobei

$$\frac{\partial z}{\partial x} = p, \quad \frac{\partial z}{\partial y} = q, \quad \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = r, \quad \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = s, \quad \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = t$$

gesetzt ist und

$$\frac{f(p, q)}{(1 + p^2 + q^2)^2} = F$$

als eine beliebige eindeutige und stetige Funktion in

$$\alpha = \frac{-p}{\sqrt{1 + p^2 + q^2}}, \quad \beta = \frac{-q}{\sqrt{1 + p^2 + q^2}}, \quad \gamma = \frac{1}{\sqrt{1 + p^2 + q^2}}$$

vorgeschrieben sein kann, die nur den Gleichungen (89) zu genügen hat.

Wir werden jetzt ein gewisses Problem mit einer nur *endlichen* Anzahl von Parametern, sozusagen eine Art von Differenzengleichung erledigen und hernach von diesem Probleme aus durch einen Grenzübergang zur Lösung der hier gestellten Aufgabe, die von einer kontinuierlichen Funktion F handelt, gelangen.

§ 9.

Bestimmung eines Polyeders durch die Normalen und die Inhalte der Seitenflächen.

45. Es sei $\mathfrak{P}$ ein beliebiges Polyeder mit n Seitenflächen, die in irgend einer Ordnung numeriert seien. Wir wollen annehmen, der Nullpunkt liege in $\mathfrak{P}$ selbst, sei es im Inneren, sei es auf der Begrenzung von $\mathfrak{P}$. Wir bezeichnen für $i = 1, 2, \cdots n$ mit $(\alpha_i, \beta_i, \gamma_i)$ die äußere

Normale, mit F_i den Flächeninhalt der i^{ten} Seitenfläche von $\mathfrak{P}$, mit p_i die Länge des vom Nullpunkt auf die Ebene dieser Fläche gefällten Lotes, endlich mit V das Volumen von $\mathfrak{P}$.

Die Richtungen $(\alpha_i, \beta_i, \gamma_i)$ sind gewiß so beschaffen, daß sie nicht sämtlich *einer* Ebene angehören; die Größen F_i sind sämtlich > 0. Bei einer Translation des Polyeders $\mathfrak{P}$ bleiben alle Größen $\alpha_i, \beta_i, \gamma_i, F_i$ ungeändert.

Indem wir das Polyeder $\mathfrak{P}$ nach der in § 2 entwickelten Methode als Grenze von vollkommenen Ovaloiden darstellen und die Formel (86) heranziehen, gewinnen wir die folgende Regel:

Ist $\mathfrak{Q}$ ein beliebiger konvexer Körper, Q seine Stützebenenfunktion und setzen wir allgemein $Q(\alpha_i, \beta_i, \gamma_i) = q_i$, so wird das gemischte Volumen

$$V(\mathfrak{Q}, \mathfrak{P}, \mathfrak{P}) = \frac{1}{3}(F_1 q_1 + F_2 q_2 + \cdots + F_n q_n). \tag{91}$$

Insbesondere entnehmen wir daraus für das Volumen von $\mathfrak{P}$ den Ausdruck

$$V = \frac{1}{3}(F_1 p_1 + F_2 p_2 + \cdots + F_n p_n). \tag{92}$$

Genau so, wie wir aus (87) die drei Gleichungen (89) folgerten, schließen wir aus (91) durch beliebige Translation des Körpers $\mathfrak{Q}$ auf das notwendige Bestehen der drei Gleichungen:

$$\sum F_i \alpha_i = 0, \quad \sum F_i \beta_i = 0, \quad \sum F_i \gamma_i = 0 \quad (i = 1, 2, \cdots n). \tag{93}$$

Bezeichnen wir das Volumen von $\mathfrak{Q}$ mit V_* und bilden wir unsere allgemeine Ungleichung $\frac{3V_1}{\sqrt[3]{V_3}} \geqq \frac{3V_0}{\sqrt[3]{V_0}}$ in Bezug auf das Polyeder $\mathfrak{P}$ als ersten und den Körper $\mathfrak{Q}$ als zweiten Körper, so finden wir, daß stets

$$\frac{F_1 q_1 + F_2 q_2 + \cdots + F_n q_n}{V_*^{\frac{1}{3}}} \geqq \frac{F_1 p_1 + F_2 p_2 + \cdots + F_n p_n}{V^{\frac{1}{3}}} \tag{94}$$

ist und hierin das Gleichheitszeichen nur dann gilt, wenn $\mathfrak{Q}$ mit $\mathfrak{P}$ homothetisch ist.

Wir werden nunmehr den folgenden Satz beweisen*):

Es seien n beliebige Richtungen $(\alpha_i, \beta_i, \gamma_i)$ für $i = 1, 2, \cdots n$ gegeben, die nicht sämtlich einer Ebene angehören, und dazu n beliebige positive Größen F_i, sodaß die drei Gleichungen bestehen

$$\sum F_i \alpha_i = 0, \quad \sum F_i \beta_i = 0, \quad \sum F_i \gamma_i = 0 \qquad (i = 1, 2, \cdots n);$$

*) Diesen Satz habe ich zuerst in dem Aufsatze: *Allgemeine Lehrsätze über die konvexen Polyeder*, Gött. Nachr. 1897 publiziert.

alsdann gibt es stets ein Polyeder $\mathfrak{P}$ mit n Seitenflächen, wofür die Richtungen $(\alpha_i, \beta_i, \gamma_i)$ die äußeren Normalen und die Größen F_i die Flächeninhalte dieser Seitenflächen bilden, und dieses Polyeder $\mathfrak{P}$ ist vollkommen bestimmt bis auf eine beliebige Translation, durch die man dasselbe noch variieren kann, also eindeutig festgelegt, wenn ferner noch die Lage seines Schwerpunktes beliebig vorgeschrieben wird.

46. Um zu einem Beweise dieses Satzes zu gelangen, fassen wir jetzt die Gesamtheit aller möglichen Polyeder mit n oder weniger Seitenflächen ins Auge, welche die äußeren Normalen der Seitenflächen nur unter den n Richtungen $(\alpha_i, \beta_i, \gamma_i)$ besitzen und welche ferner den Nullpunkt in sich schließen.

Sind $q_1, q_2, \cdots q_n$ irgend welche n Größen, sämtlich $\geqq 0$ und derart, daß die n Ungleichungen

$$\alpha_i x + \beta_i y + \gamma_i z \leqq q_i \qquad (i = 1, 2, \cdots n) \tag{95}$$

ein wirkliches Polyeder definieren, so bezeichnen wir dieses Polyeder mit $\mathfrak{R}(q_1, q_2, \cdots q_n)$ oder $\mathfrak{R}(q_i)$, sein Volumen mit $V(q_1, q_2, \cdots q_n)$ oder $V(q_i)$. Dabei kann auch ein Teil dieser Ungleichungen eine Folge der übrigen sein, das Polyeder also weniger als n wirkliche Seitenflächen besitzen. Wir bezeichnen ferner mit q_i^* den größten Wert von $\alpha_i x + \beta_i y + \gamma_i z$ in $\mathfrak{R}(q_i)$; für diejenigen Indizes i, wobei $\mathfrak{R}$ eine wirkliche Seitenfläche mit der Normale $(\alpha_i, \beta_i, \gamma_i)$ besitzt, ist immer $q_i^* = q_i$, während wir bei den anderen Indizes nur $q_i \geqq q_i^*$ behaupten können. Wir nennen $q_1^*, q_2^*, \cdots q_n^*$ die *tangentialen Parameter* von $\mathfrak{R}(q_1, q_2, \cdots q_n)$; offenbar ist

$$\mathfrak{R}(q_1, q_2, \cdots q_n) = \mathfrak{R}(q_1^*, q_2^*, \cdots q_n^*).$$

Existiert nun ein Polyeder $\mathfrak{P} = \mathfrak{R}(p_1, p_2, \cdots p_n)$ gemäß den Forderungen unseres Satzes, so zeigt die Ungleichung (94), daß unter allen vorhandenen Körpern $\mathfrak{R}(q_1, q_2, \cdots q_n)$ eben dieses Polyeder $\mathfrak{P}$ und die ihm homothetischen Körper den kleinsten Wert des Ausdrucks

$$\frac{F_1 q_1 + F_2 q_2 + \cdots + F_n q_n}{\left(V(q_1, q_2, \cdots q_n)\right)^{\frac{1}{3}}}$$

liefern. Daraus erhellt zunächst der letzte Teil jenes Satzes, daß nämlich das gesuchte Polyeder $\mathfrak{P}$ gewiß nur auf eine Art, abgesehen von einer Translation, bestimmt werden kann.

Nunmehr wollen wir die wirkliche Existenz jenes Polyeders $\mathfrak{P}$ dartun.

47. Wir zeigen vor allem, daß, wie die n Richtungen $(\alpha_i, \beta_i, \gamma_i)$ vorausgesetzt sind, gewiß irgend welche Polyeder $\mathfrak{R}(q_1, q_2, \cdots q_n)$ vorhanden sind. In der Tat, der durch die n Ungleichungen

$$\alpha_i x + \beta_i y + \gamma_i z \leqq 1 \qquad (i = 1, 2, \cdots n) \tag{96}$$

definierte Bereich $\mathfrak{R}(1, 1, \cdots 1) = \mathfrak{R}(1)$ stellt ein solches Polyeder, und

zwar wirklich mit n Seitenflächen vor. Denn diese Ungleichungen sind die Bedingungen von n *verschiedenen* Tangentialebenen an die Kugel $\mathfrak{G}$; der Bereich enthält daher die Kugel $\mathfrak{G}$ in sich und besitzt jene n Ebenen als extreme Stützebenen. Andrerseits kann dieser Bereich $\mathfrak{R}(1)$ sich nicht ins Unendliche erstrecken; denn der Abstand eines beliebigen Punktes x, y, z in ihm von der i^{ten} jener Stützebenen wird

$$t_i = 1 - \alpha_i x - \beta_i y - \gamma_i z \geqq 0$$

und entnehmen wir aus den Gleichungen (93) dann

$$\sum F_i t_i = \sum F_i \qquad (i = 1, 2, \cdots n).$$

Da die Werte F_i sämtlich > 0 sind, besteht hiernach für eine jede Größe t_i eine obere Grenze. Nun können wir unter den Stützebenen (96) gewiß drei solche herausgreifen, die sich in einem Punkte schneiden; durch die oberen Grenzen der drei zugehörigen Größen t_i werden dann drei zu ihnen parallele Ebenen angewiesen, welche mit den ersteren zusammen ein Parallelepipedum bestimmen, in dem der Bereich $\mathfrak{R}(1)$ ganz enthalten sein muß. Danach liegt dieser Bereich ganz im Endlichen. Das Volumen von $\mathfrak{R}(1)$ setzen wir $= \frac{1}{l^3}$, alsdann hat $\mathfrak{R}(l, l, \cdots l)$ das Volumen 1. Weiter wird überhaupt für beliebige endliche Werte $q_1, q_2, \cdots q_n$ der durch die Ungleichungen (95) bestimmte Bereich ganz im Endlichen liegen und bei lauter positiven Werten q_i stets ein wirkliches Polyeder, wenn auch nicht immer mit n Seitenflächen, vorstellen.

48. Wir betrachten jetzt in der n-fachen Mannigfaltigkeit $\mathfrak{M}$ von n beliebig veränderlichen reellen Größen $q_1, q_2, \cdots q_n$ den Bereich $\mathfrak{B}$ aller solchen Systeme $q_1, q_2, \cdots q_n$, „Punkte“ (q_i), *wobei* $q_1 \geqq 0, q_2 \geqq 0, \cdots q_n \geqq 0$ *ist und den Größen* $q_1, q_2, \cdots q_n$ *ein Polyeder* $\mathfrak{R}(q_1, q_2, \cdots q_n)$ *von einem Volumen*

$$V(q_1, q_2, \cdots q_n) \geqq 1$$

entspricht.

Sind (r_i) und (s_i) $(i = 1, 2, \cdots n)$ zwei beliebige Punkte dieses Bereichs $\mathfrak{B}$ und (r_i^*) bez. (s_i^*) die tangentialen Parameter von $\mathfrak{R}(r_i)$ und $\mathfrak{R}(s_i)$ und ist t ein Werth > 0 und < 1, so besitzt der aus diesen zwei Polyedern abzuleitende Bereich $(1-t)\,\mathfrak{R}(r_i) + t\,\mathfrak{R}(s_i)$ nach (77) ein Volumen

$$\geqq \left((1-t)\sqrt[3]{V(r_i)} + t\sqrt[3]{V(s_i)}\right)^3 \geqq \left((1-t) + t\right)^3 = 1.$$

Die Stützebenenfunktion des letzteren Bereichs hat für die Argumente $\alpha_i, \beta_i, \gamma_i$ den Wert $(1-t)r_i^* + ts_i^*$, und danach ist dieser Bereich entweder identisch, oder, wenn nicht identisch, so doch jedenfalls ganz enthalten in dem Bereich

$$\alpha_i x + \beta_i y + \gamma_i z \leqq (1-t)r_i^* + ts_i^* \qquad (i = 1, 2, \cdots n),$$

der dadurch gewiß auch ein Polyeder vorstellt, und um so mehr dann enthalten im Polyeder $\mathfrak{R}((1-t)r_i + ts_i)$. Mithin ist für das letztere Polyeder notwendig ebenfalls das Volumen $\geqq 1$, also

$$V((1-t)r_i + ts_i) \geqq 1.$$

Der Bereich $\mathfrak{B}$ hat danach die Eigenschaft, mit irgend zwei Punkten (r_i), (s_i) stets die ganze sie verbindende „Strecke" von Punkten $((1-t)r_i + ts_i)$ zu enthalten, und ist deshalb als ein *„konvexes Gebilde"* in der Mannigfaltigkeit $\mathfrak{M}$ anzusprechen. Da $V(q_1, q_2, \cdots q_n)$ eine stetige Function der Argumente ist, wird ferner der Bereich $\mathfrak{B}$ *abgeschlossen* sein und wird seine Begrenzung von denjenigen Punkten (q_i) gebildet werden, für welche

$$V(q_1, q_2, \cdots q_n) = 1$$

ist. Wir haben jetzt nach dem kleinsten Werte des mit den gegebenen positiven Größen F_i zu bildenden linearen Ausdrucks

$$F_1 q_1 + F_2 q_2 + \cdots + F_n q_n \tag{97}$$

im ganzen Bereiche $\mathfrak{B}$ zu fragen. Der Bereich $\mathfrak{B}$ erstreckt sich ins Unendliche. Insbesondere ist $q_1 = q_2 = \cdots = q_n = l$ ein Punkt aus $\mathfrak{B}$. Nun wird durch die Ungleichung

$$F_1 q_1 + F_2 q_2 + \cdots + F_n q_n \leqq l(F_1 + F_2 + \cdots + F_n)$$

ein Teil von $\mathfrak{B}$ bestimmt, der ganz im Endlichen liegt und zum mindesten jenen speziellen Punkt enthält. In diesem Teile hat der Ausdruck (97) sicher einen bestimmten kleinsten Wert, welcher nun zugleich das Minimum dieses Ausdrucks (97) im ganzen Bereiche $\mathfrak{B}$ sein wird.

Dieser kleinste Wert von (97) in $\mathfrak{B}$ sei $3V^{\frac{2}{3}}$, und es sei $r_1, r_2, \cdots r_n$ ein Punkt in $\mathfrak{B}$, für den dieser Wert eintritt. Der Punkt (r_i) liegt dann jedenfalls auf der Begrenzung von $\mathfrak{B}$, es stellt also $\mathfrak{R}(r_i)$ ein Polyeder vom Volumen 1 vor. Nehmen wir mit diesem Polyeder diejenige Translation vor, wodurch sein Schwerpunkt in den Nullpunkt fällt, so treten an Stelle der Parameter r_i gewisse Werte $r_i + a\alpha_i + b\beta_i + c\gamma_i$; für diese hat dann aber der Ausdruck (97) genau denselben Wert, da wir für die Größen F_i die Gleichungen (93) als bestehend angenommen haben. Danach können wir auch von vornherein uns die Parameter r_i so beschaffen denken, daß der Schwerpunkt von $\mathfrak{R}(r_i)$ sich im Nullpunkte befindet. Alsdann sind notwendig die Größen $r_1, r_2, \cdots r_n$ sämtlich > 0. Für alle Punkte (q_i) in $\mathfrak{B}$ gilt nun die Ungleichung

$$F_1 q_1 + F_2 q_2 + \cdots + F_n q_n \geqq 3V^{\frac{2}{3}} \tag{98}$$

und haben wir hierin also die Bedingung einer „Stützebene" an $\mathfrak{B}$ durch den Punkt (r_i), d. h. einer solchen Ebene, welche auf einer Seite von sich gar keinen Punkt von $\mathfrak{B}$ liegen hat.

Für das Polyeder $\mathfrak{R}(r_1, r_2, \cdots r_n)$ bedeute allgemein Φ_i den Flächeninhalt der Seitenfläche mit der äußeren Normale $(\alpha_i, \beta_i, \gamma_i)$, wobei wir $\Phi_i = 0$ zu setzen hätten, falls eine solche Seitenfläche im Polyeder nicht wirklich vorkäme. Alsdann können wir zeigen, daß die Ebene

$$\frac{1}{3}(\Phi_1 q_1 + \Phi_2 q_2 + \cdots + \Phi_n q_n) = 1,$$

die jedenfalls durch den Punkt (r_i) geht, die *einzige* Stützebene an $\mathfrak{B}$ durch diesen Punkt vorstellt, daß mithin die n Gleichungen

$$\Phi_i = \frac{F_i}{V^{\frac{2}{3}}} \qquad (i = 1, 2, \cdots n) \tag{99}$$

gelten müssen. Denn hätten nicht diese n Gleichungen sämtlich statt, so könnten wir in der durch (98) dargestellten Stützebene an $\mathfrak{B}$ einen Punkt $(r_i + s_i)$ finden, für den

$$\frac{1}{3}(\Phi_1 s_1 + \Phi_2 s_2 + \cdots + \Phi_n s_n) > 0$$

ausfällt und noch alle Werte $r_i + s_i > 0$ sind. Nun ist $V(r_i) = 1$ und nach (91) das gemischte Volumen

$$V(\mathfrak{R}(r_i + s_i),\ \mathfrak{R}(r_i),\ \mathfrak{R}(r_i)) = 1 + \frac{1}{3}\sum \Phi_i s_i > 1;$$

infolgedessen wird das Volumen von $(1-t)\mathfrak{R}(r_i) + t\mathfrak{R}(r_i + s_i)$ dem Ausdrucke (60) zufolge bei hinreichend kleinen positiven Werten t sicher > 1 und umsomehr nach den oben gemachten Bemerkungen dann

$$V((1-t)r_i + t(r_i + s_i)) = V(r_i + ts_i) > 1.$$

Dieses könnte aber nicht der Fall sein, weil der Punkt $(r_i + ts_i)$ in einer Stützebene an $\mathfrak{B}$ liegt, somit gewiß nicht ein innerer Punkt von $\mathfrak{B}$ sein kann.

Damit ist in der Tat bewiesen, daß die n Gleichungen (99) gelten müssen. Setzen wir $V^{\frac{1}{3}} r_i = p_i$, so besitzt alsdann das Polyeder $\mathfrak{R}(p_i)$ zu den Normalen $(\alpha_i, \beta_i, \gamma_i)$ die Inhalte F_i der Seitenflächen, entspricht mithin genau den Forderungen unseres Satzes in 45.

§ 10.

Bestimmung eines konvexen Körpers zu einer gegebenen Krümmungsfunktion.

49. Auf den soeben gewonnenen Satz über Polyeder gründen wir nun den Beweis des Satzes in 43. über die Existenz eines stetig gekrümmten konvexen Körpers zu einer gegebenen Krümmungsfunktion. Dabei wird

uns namentlich die in (76) abgeleitete untere Grenze für die Differenz $V_1 - \sqrt[3]{V_0^2 V_3}$ von Nutzen sein.

Zunächst haben wir eine Bemerkung über gewisse Einteilungen auf der Kugelfläche $\mathfrak{E}$ $(x^2+y^2+z^2=1)$ vorauszuschicken. Unter der *Winkeldistanz* zweier Punkte $\mathfrak{r}$ und $\mathfrak{r}^*$ auf $\mathfrak{E}$ wollen wir den Winkel $\mathfrak{r}\mathfrak{o}\mathfrak{r}^*$ der Radien vom Nullpunkte $\mathfrak{o}$ nach diesen Punkten verstehen. Es sei θ ein beliebiger positiver Wert, den wir $< \frac{\pi}{4}$ annehmen. Wir bestimmen auf $\mathfrak{E}$ successive Punkte $\mathfrak{r}_1, \mathfrak{r}_2, \cdots$ derart, daß die Winkeldistanz jedes folgenden Punktes von allen vorhergehenden $> \theta$ ist. Da die Oberfläche von $\mathfrak{E}$ eine endliche Größe hat, können wir eine solche Reihe von Punkten nicht unbegrenzt bilden, sondern *wir gelangen* schließlich *zu einer endlichen Reihe* $\mathfrak{r}_1, \mathfrak{r}_2, \cdots \mathfrak{r}_n$ *derart, daß* nun *für jeden beliebigen Punkt* $\mathfrak{r}$ *auf* $\mathfrak{E}$ *unter den n Winkeldistanzen von* $\mathfrak{r}$ *nach* $\mathfrak{r}_1, \mathfrak{r}_2, \cdots \mathfrak{r}_n$ *immer wenigstens eine* $\leqq \theta$ *ausfällt.*

Es seien ξ_i, η_i, ζ_i die Koordinaten von $\mathfrak{r}_i$ $(i=1,2,\cdots n)$. Die n Ungleichungen

$$\xi_i x + \eta_i y + \zeta_i z \leqq 1 \qquad (i=1,2,\cdots n)$$

bestimmen alsdann ein Polyeder mit n Seitenflächen $\mathfrak{R}_i$, das ganz in der Kugel mit $\mathfrak{o}$ als Mittelpunkt vom Radius $\frac{1}{\operatorname{tg}\theta}$ enthalten ist. Die Pyramide $\mathfrak{o}\mathfrak{R}_i$ mit $\mathfrak{o}$ als Spitze und $\mathfrak{R}_i$ als Basis schneidet aus der Kugelfläche $\mathfrak{E}$ eine Partie $\mathfrak{E}_i$ heraus, den Bereich aller der Punkte $\mathfrak{r}$ auf $\mathfrak{E}$, für welche die Winkeldistanz von dem betreffenden Punkte $\mathfrak{r}_i$ nicht größer als von irgend einem der anderen $n-1$ Punkte $\mathfrak{r}_j$ $(j \gtrless i)$ ist. Es sei E_i der Flächeninhalt von $\mathfrak{E}_i$; das Gebiet $\mathfrak{E}_i$ enthält gewiß alle Punkte auf $\mathfrak{E}$ mit einer Winkeldistanz $\leqq \frac{\theta}{2}$ von $\mathfrak{r}_i$ und ist selbst ganz enthalten im Gebiet aller Punkte auf $\mathfrak{E}$ mit einer Winkeldistanz $\leqq \theta$ von $\mathfrak{r}_i$; daraus folgt

$$2\pi\left(1-\cos\frac{\theta}{2}\right) < E_i < 2\pi(1-\cos\theta).$$

Da überdies

$$E_1 + E_2 + \cdots + E_n = 4\pi$$

ist, so haben wir

$$\frac{1}{2}n\left(1-\cos\frac{\theta}{2}\right) < 1 < \frac{1}{2}n(1-\cos\theta).$$

50. Es sei nun $F(\alpha,\beta,\gamma)$ die gegebene auf $\mathfrak{E}$ durchweg stetige und positive Funktion, welche die drei Gleichungen

$$\int \alpha F d\omega = 0, \quad \int \beta F d\omega = 0, \quad \int \gamma F d\omega = 0 \tag{100}$$

erfüllt und als Krümmungsfunktion eines gewissen konvexen Körpers erkannt werden soll.

Verstehen wir unter $\alpha^*, \beta^*, \gamma^*$ ebenfalls einen beliebigen Punkt auf $\mathfrak{E}$, so stellt

$$(101) \qquad S(\alpha^*, \beta^*, \gamma^*) = \frac{1}{2}\int |\alpha\alpha^* + \beta\beta^* + \gamma\gamma^*| \, F(\alpha, \beta, \gamma)\, d\omega$$

eine Funktion der Argumente $\alpha^*, \beta^*, \gamma^*$ dar, welche gleichfalls auf $\mathfrak{E}$ durchweg stetig und positiv sein wird, und besitzt diese Funktion dann auf $\mathfrak{E}$ ein bestimmtes *Minimum*, das wir S_0 nennen und das auch noch > 0 sein wird.

51. Wir denken uns jetzt eine Massenbelegung der Kugelfläche $\mathfrak{E}$ vorgenommen, wobei die Flächendichtigkeit an einem Punkte α, β, γ durch $F(\alpha, \beta, \gamma)$ dargestellt ist. Der Schwerpunkt der Belegung des Gebiets $\mathfrak{E}_i$ wird alsdann, da der Sektor $\mathfrak{o}\mathfrak{E}_i$ mit $\mathfrak{o}$ als Spitze und $\mathfrak{E}_i$ als Basis ein konvexer Körper ist und die Punkte auf $\mathfrak{E}_i$ eine Winkeldistanz $\leqq \theta$ von $\mathfrak{r}_i$ haben, ein Punkt $\mathfrak{q}_i$ sein, der eine Entfernung $\varrho_i > \cos\theta$ und < 1 von $\mathfrak{o}$ besitzt und so gelegen ist, daß der Strahl $\mathfrak{o}\mathfrak{q}_i$ in seiner Verlängerung einen Punkt $\mathfrak{p}_i$ innerhalb $\mathfrak{E}_i$ trifft. Wir bezeichnen mit $\alpha_i, \beta_i, \gamma_i$ die Koordinaten von $\mathfrak{p}_i$, sodaß $\varrho_i\alpha_i, \varrho_i\beta_i, \varrho_i\gamma_i$ die von $\mathfrak{q}_i$ sind. Setzen wir noch

$$(102) \qquad \int_{(\mathfrak{E}_i)} F\, d\omega = \frac{F_i}{\varrho_i},$$

so wird

$$(103) \qquad \int_{(\mathfrak{E}_i)} \alpha F\, d\omega = \alpha_i F_i, \quad \int_{(\mathfrak{E}_i)} \beta F\, d\omega = \beta_i F_i, \quad \int_{(\mathfrak{E}_i)} \gamma F\, d\omega = \gamma_i F_i;$$

darin sind die vier Integrale über den Bereich $\mathfrak{E}_i$ zu erstrecken. Für die damit eingeführten n Richtungen $\alpha_i, \beta_i, \gamma_i$ und n positiven Größen F_i werden nunmehr auf Grund der Gleichungen (100) die Beziehungen

$$(104) \qquad \sum \alpha_i F_i = 0, \quad \sum \beta_i F_i = 0, \quad \sum \gamma_i F_i = 0 \quad (i = 1, 2, \cdots n)$$

statthaben.

Jeder Punkt auf $\mathfrak{E}$ besitzt von wenigstens einem der Punkte $\mathfrak{r}_i$ eine Winkeldistanz $\leqq \theta$, und sodann von dem zugehörigen Punkte $\mathfrak{p}_i$ gewiß eine Winkeldistanz $< 2\theta$, weil immer $\mathfrak{r}_i$ von $\mathfrak{p}_i$ eine Winkeldistanz $< \theta$ hat. Da wir nun $2\theta < \frac{\pi}{2}$ vorausgesetzt haben, können hiernach die n Richtungen $\alpha_i, \beta_i, \gamma_i$ gewiß nicht sämtlich in einer Ebene liegen.

Nach dem Satze in 45. wird es nunmehr ein ganz bestimmtes Polyeder $\mathfrak{P}$ geben mit n Seitenflächen, den Richtungen $(\alpha_i, \beta_i, \gamma_i)$ als äußeren Normalen und den Größen F_i als Flächeninhalten dieser Seitenflächen, und zudem noch mit dem Schwerpunkte im Nullpunkte.

52. Wir haben jetzt noch einige allgemeinere Abschätzungen zur Sprache zu bringen.

Ist $\mathfrak{K}$ ein beliebiger konvexer Körper mit dem Schwerpunkte im Nullpunkte, H die Stützebenenfunktion von $\mathfrak{K}$, so wollen wir das Integral

$$\frac{1}{3}\int H(\alpha, \beta, \gamma)\, F(\alpha, \beta, \gamma)\, d\omega = J(\mathfrak{K}) \tag{105}$$

schreiben. Es sei G das Maximum unter den Werten $H(\alpha, \beta, \gamma)$ auf $\mathfrak{E}$, also der Radius der kleinsten, den Körper $\mathfrak{K}$ ganz in sich enthaltenden Kugel mit dem Nullpunkte als Mittelpunkt, und etwa $G\alpha^*$, $G\beta^*$, $G\gamma^*$ ein solcher Punkt der Begrenzung von $\mathfrak{K}$, der vom Nullpunkte die Entfernung G hat. Nach der Definition der Stützebenenfunktion ist dann sicherlich immer

$$G(\alpha\alpha^* + \beta\beta^* + \gamma\gamma^*) \leqq H(\alpha, \beta, \gamma). \tag{106}$$

Andrerseits haben wir, weil der Schwerpunkt von $\mathfrak{K}$ sich im Nullpunkte befindet, mit Rücksicht auf die Ungleichung (59) stets

$$H(\alpha, \beta, \gamma) \leqq 3H(-\alpha, -\beta, -\gamma). \tag{107}$$

Wir wenden nun auf das Integral (105) die Ungleichung (106) für alle diejenigen Richtungen α, β, γ an, wobei $\alpha\alpha^* + \beta\beta^* + \gamma\gamma^* \geqq 0$ ist, und machen für die anderen Richtungen von (107) Gebrauch; beachten wir noch, daß zufolge der Gleichungen (100) das Integral

$$\frac{1}{2}\int |\alpha\alpha^* + \beta\beta^* + \gamma\gamma^*|\, F(\alpha, \beta, \gamma)\, d\omega,$$

erstreckt über die halben Kugelflächen von $\mathfrak{E}$, wo $\alpha\alpha^* + \beta\beta^* + \gamma\gamma^* \geqq 0$ bez. $\leqq 0$ gilt, beide Male denselben Wert hat, mithin, nach der in 50. erklärten Bedeutung der Größe S_0, jedesmal $\geqq \frac{1}{2} S_0$ sein muß, so folgt

$$J(\mathfrak{K}) \geqq \frac{1}{3}\left(S_0 + \frac{1}{3} S_0\right) G = \frac{4}{9} S_0 G. \tag{108}$$

Setzen wir

$$\int F(\alpha, \beta, \gamma)\, d\omega = O_0, \tag{109}$$

so wird andrerseits

$$\frac{1}{3} O_0 G \geqq J(\mathfrak{K}). \tag{110}$$

Bei der Annahme $F(\alpha, \beta, \gamma) = 1$, wobei die Relationen (100) jedenfalls erfüllt sind, geht auf diese Weise insbesondere

$$\frac{4\pi}{3} G \geqq \frac{1}{3}\int H d\omega \geqq \frac{4\pi}{9} G \tag{111}$$

hervor.

Setzen wir $H(\alpha_i, \beta_i, \gamma_i) = q_i$, so ist nach (91) das gemischte Volumen

$$V(\mathfrak{K}, \mathfrak{P}, \mathfrak{P}) = \frac{1}{3}(F_1 q_1 + F_2 q_2 + \cdots + F_n q_n). \tag{112}$$

Jeder Punkt α, β, γ auf $\mathfrak{E}$ besitzt von wenigstens einem Punkte $\alpha_i, \beta_i, \gamma_i$ eine Winkeldistanz $< 2\theta$, also eine geradlinige Distanz $< 2 \sin \theta$ und gilt alsdann nach der Ungleichung (6) in § 1 immer:

$$|H(\alpha, \beta, \gamma) - H(\alpha_i, \beta_i, \gamma_i)| < 2 \sin \theta \cdot G.$$

Mit Hülfe dieser Beziehung und der Formeln (102) gewinnen wir aus (105) und (112) einerseits:

$$J(\mathfrak{K}) > V(\mathfrak{K}, \mathfrak{P}, \mathfrak{P}) - 2 \sin \theta \cdot O_0 G, \tag{113}$$

andrerseits:

$$\frac{1}{\cos \theta} V(\mathfrak{K}, \mathfrak{P}, \mathfrak{P}) > J(\mathfrak{K}) - 2 \sin \theta \cdot O_0 G. \tag{114}$$

53. Die abgeleiteten Ungleichungen benutzen wir zunächst, um in Betreff der Ausdehnung des in 51. konstruierten Polyeders $\mathfrak{P}$ gewisse Grenzen nachzuweisen. Es sei $P(u, v, w)$ die Stützebenenfunktion von $\mathfrak{P}$, N das Maximum unter den Werten $P(\alpha, \beta, \gamma)$, ferner V das Volumen von $\mathfrak{P}$. Aus (111) entnehmen wir

$$\frac{4\pi}{3} N \geqq \frac{1}{3} \int P(\alpha, \beta, \gamma)\, d\omega \geqq \frac{4\pi}{9} N. \tag{115}$$

Die Oberfläche von $\mathfrak{P}$ ist

$$F_1 + F_2 + \cdots + F_n < O_0 \quad \text{und} \quad > \cos \theta \cdot O_0. \tag{116}$$

Wenden wir nun die allgemeinen Ungleichungen $V_1^3 \geqq V_0^2 V_3$, $V_2^3 \geqq V_0 V_3^2$ für zwei beliebige konvexe Körper auf das Polyeder $\mathfrak{P}$ und die Kugel $\mathfrak{E}$ an, so erhalten wir mit Rücksicht hierauf:

$$\frac{1}{27} O_0^3 > \frac{4\pi}{3} V^2, \qquad \frac{4\pi}{3} N^3 > V. \tag{117}$$

Aus (113) gewinnen wir

$$J(\mathfrak{P}) > V - 2 \sin \theta \cdot O_0 N \tag{118}$$

und aus (114) und (108):

$$\frac{V}{\cos \theta} > J(\mathfrak{P}) - 2 \sin \theta \cdot O_0 N \geqq \left(\frac{4}{9} S_0 - 2 \sin \theta \cdot O_0\right) N. \tag{119}$$

Mit Hülfe der zweiten Ungleichung in (117) folgt hieraus

$$V^{\frac{2}{3}} > \left(\frac{3}{4\pi}\right)^{\frac{1}{3}} \cos \theta \left(\frac{4}{9} S_0 - 2 \sin \theta \cdot O_0\right). \tag{120}$$

Wir nehmen nun einen Winkel θ_0 so klein an, daß jedenfalls

$$\sin \theta_0 < \frac{2}{9} \frac{S_0}{O_0}$$

ist, und gewinnen dann aus (120) eine von θ unabhängige positive Größe V_0

und hernach aus der zweiten Ungleichung in (117) eine von θ unabhängige Größe N_0 derart, daß immer

$$V \geqq V_0, \qquad N_0 \geqq N \tag{121}$$

statthat, wenn $\theta \leqq \theta_0$ ist, was wir von nun an voraussetzen.

Das Polyeder $\frac{1}{V^{\frac{1}{3}}}\mathfrak{P}$ hat das Volumen 1. Aus (119) entnehmen wir

$$J\left(\frac{\mathfrak{P}}{V^{\frac{1}{3}}}\right) = \frac{1}{V^{\frac{1}{3}}} J(\mathfrak{P}) < \left(\frac{4\pi}{3}\right)^{\frac{2}{3}} \frac{1}{\cos\theta_0} N_0^2 + 2 \sin\theta_0 \cdot \frac{O_0 N_0}{V_0^{\frac{1}{3}}}; \tag{122}$$

die hier rechts stehende Größe setzen wir $= \frac{4}{9} S_0 M_0$, dann ist also

$$J\left(\frac{\mathfrak{P}}{V^{\frac{1}{3}}}\right) < \frac{4}{9} S_0 M_0. \tag{123}$$

54. Es sei jetzt $\mathfrak{Q}$ ein beliebiger konvexer Körper vom Volumen 1 und mit dem Nullpunkte als Schwerpunkt, $L(u, v, w)$ die Stützebenenfunktion von $\mathfrak{Q}$. Wir fragen, unter welchen Umständen sich

$$J(\mathfrak{Q}) \leqq J\left(\frac{\mathfrak{P}}{V^{\frac{1}{3}}}\right) \tag{124}$$

herausstellen kann. Nach der Formel (108) und infolge der Ungleichung (123) wird hierzu jedenfalls nötig sein, daß $\mathfrak{Q}$ ganz im Inneren der Kugel vom Radius M_0 mit dem Nullpunkt als Mittelpunkt enthalten ist, daß also stets $L(\alpha, \beta, \gamma) < M_0$ gilt. Nach (113) ist sodann

$$J(\mathfrak{Q}) > V(\mathfrak{Q}, \mathfrak{P}, \mathfrak{P}) - 2 \sin\theta \cdot O_0 M_0. \tag{125}$$

Jetzt ziehen wir die Resultate des § 6 heran. Bezeichnen wir mit D das Maximum unter den Quotienten

$$\frac{V^{\frac{1}{3}} L(\alpha, \beta, \gamma)}{P(\alpha, \beta, \gamma)}, \tag{126}$$

so gilt nach (76) die Ungleichung

$$\frac{V(\mathfrak{Q}, \mathfrak{P}, \mathfrak{P})}{V^{\frac{2}{3}}} - 1 \geqq \varkappa \frac{(D-1)^6}{D^5}, \tag{127}$$

worin $\varkappa$ die numerische Konstante $\frac{1}{2^{10} \cdot 3^4 \cdot 7^{\frac{1}{2}}}$ bedeutet. Aus (125), (124), (119) und (121) schließen wir nun

$$\left(\frac{1}{\cos\theta} - 1\right) + 2 \sin\theta \cdot O_0 \left(\frac{M_0}{V_0^{\frac{2}{3}}} + \frac{N_0}{V_0}\right) > \varkappa \frac{(D-1)^6}{D^5}. \tag{128}$$

Aus dieser Ungleichung entnehmen wir für $D-1$ eine obere Grenze, die nach Null konvergiert, wenn θ nach Null abnimmt.

Andrerseits haben wir, wenn d das Minimum der Funktion (126) bedeutet, nach (78) und der an diese Ungleichung angeschlossenen Bemerkung:

$$D^3 - 1 \geqq \varkappa \frac{(1-d)^6}{d}, \tag{129}$$

und hieraus ergibt sich weiter für $1-d$ eine obere Grenze, die mit θ zugleich nach Null konvergiert. Wir werden somit auch eine Größe ε, die zugleich mit θ nach Null konvergiert, angeben können, sodaß

$$1+\varepsilon \geqq D, \quad d \geqq \frac{1}{1+\varepsilon}$$

gilt, und wir haben damit das Resultat erlangt:

Soll

$$J(\mathfrak{L}) \leqq J\left(\frac{\mathfrak{P}}{V^{\frac{1}{3}}}\right)$$

ausfallen, so muß jedenfalls $\mathfrak{L}$ *ganz in* $(1+\varepsilon)\frac{\mathfrak{P}}{V^{\frac{1}{3}}}$ *enthalten sein und selbst das Polyeder* $\frac{1}{1+\varepsilon}\frac{\mathfrak{P}}{V^{\frac{1}{3}}}$ *in sich enthalten, wobei* ε *eine gewisse vom Winkel* θ *abhängende Größe bedeutet, die mit nach Null abnehmendem* θ *ebenfalls nach Null konvergiert.*

55. Dieses Resultat zeigt uns sofort (s. 9.), daß, wenn wir den Winkel θ nach Null abnehmen lassen, das Polyeder $\frac{\mathfrak{P}}{V^{\frac{1}{3}}}$ nach einem bestimmten konvexen Körper $\mathfrak{L}$ als Grenze konvergieren muß, welchem die Eigenschaft zukommen wird, daß für ihn unter allen konvexen Körpern vom Volumen 1 und dem Nullpunkt als Schwerpunkt das Integral

$$J(\mathfrak{L}) = \frac{1}{3}\int L(\alpha, \beta, \gamma)\, F(\alpha, \beta, \gamma)\, d\omega,$$

unter L die Stützebenenfunktion von $\mathfrak{L}$ verstanden, den kleinsten Wert hat. Bezeichnen wir das betreffende Minimum dieses Integrals mit J, so konvergiert gleichzeitig $V^{\frac{1}{3}}$ nach J (s. (118) und (119)) und das Polyeder $\mathfrak{P}$ nach dem Körper $\mathfrak{K} = J^{\frac{1}{3}}\mathfrak{L}$.

Ist jetzt $\mathfrak{K}'$ ein beliebiger konvexer Körper, H' seine Stützebenenfunktion, G' das Maximum der Werte $H'(\alpha, \beta, \gamma)$, so folgt aus (113), (114) und (110):

$$|J(\mathfrak{K}') - V(\mathfrak{K}', \mathfrak{P}, \mathfrak{P})| < \left(\frac{1}{3}(1-\cos\theta) + 2\sin\theta\right) O_0 G'.$$

Da nun für ein nach Null abnehmendes θ die Größe $V(\mathfrak{K}', \mathfrak{P}, \mathfrak{P})$ nach

$V(\mathfrak{K}', \mathfrak{K}, \mathfrak{K})$ konvergiert, so ersehen wir hieraus, daß allgemein die Darstellung

$$V(\mathfrak{K}', \mathfrak{K}, \mathfrak{K}) = J(\mathfrak{K}'), \quad \text{d. i.} \quad = \frac{1}{3}\int H' F \, d\omega$$

gilt. Danach ist in der Tat der gefundene konvexe Körper $\mathfrak{K}$ ein stetig gekrümmter mit $F(\alpha, \beta, \gamma)$ als Krümmungsfunktion, mithin der Beweis für den Satz in 43. vollständig erbracht.

56. Wir können diesen Satz über die Bestimmung eines konvexen Körpers zu einer gegebenen Krümmungsfunktion F auch auf Fälle ausdehnen, wo diese vorgelegte Funktion F nicht durchweg stetig ist. Insbesondere lassen sich alle konvexen Körper, welche in der Regel *konstante* positive Krümmung und nur an singulären Stellen unendliche Krümmung besitzen, durch folgende Aussage charakterisieren:

Es seien auf der Kugelfläche $\mathfrak{E}$ beliebige Partien $\mathfrak{N}$ abgegrenzt, denen ein bestimmter und von Null verschiedener Flächeninhalt zukommt und so, daß der Schwerpunkt dieser Partien $\mathfrak{N}$ für sich, wie der der ganzen Kugelfläche $\mathfrak{E}$, im Nullpunkte liegt. Alsdann gibt es stets einen und nur einen konvexen Körper $\mathfrak{K}$ mit dem Nullpunkte als Schwerpunkt, derart daß für jeden beliebigen konvexen Körper $\mathfrak{K}'$ die Darstellung

$$V(\mathfrak{K}', \mathfrak{K}, \mathfrak{K}) = \frac{1}{3}\int_{(\mathfrak{N})} H' \, d\omega$$

gilt, wo H' die Stützebenenfunktion von $\mathfrak{K}'$ bedeutet und das Integral nur über die Partien $\mathfrak{N}$ der Kugelfläche $\mathfrak{E}$ zu erstrecken ist.

Über den Rauminhalt der Polyeder.

Von

S. O. SCHATUNOVSKY in Odessa.*)

1. In dem vorliegenden Aufsatze will ich eine Theorie der Rauminhalte von Polyeder darlegen, welche ich schon früher in russischer Sprache veröffentlicht habe**).

Es sei vorweg bemerkt, daß diese Theorie sich von derjenigen der Flächeninhalte in der Ebene wesentlich unterscheidet: Die Kriteria, welche zur Vergleichung der Rauminhalte dienen, sind von denjenigen, mittelst deren die Vergleichung der Flächeninhalte geschieht, gänzlich verschieden. M. Dehn***) hat ja auch gezeigt, daß ein solcher Unterschied sich notwendigerweise herausstellen muß, wenn man in den betreffenden Untersuchungen jedwede Stetigkeitsbetrachtungen von vornherein ausschließt.

Ich gehe dabei von folgenden Betrachtungen aus: Die in den Lehrbüchern der Elementargeometrie gegebene Lehre vom Rauminhalte geometrischer Körper setzt stillschweigend voraus, daß dieser Rauminhalt eine Größe darstellt. Wir verstehen hier unter dem Begriff „Größe", wie allgemein angenommen, das Folgende:

Definition 1. *Wir nennen eine Mannigfaltigkeit eine skalare Größe (oder schlechtweg eine Größe) und ihre Elemente Werte dieser Größe, wenn*

*) Aus dem Russischen übersetzt von D. Schor mit den vom Verfasser genehmigten Veränderungen.

**) Diese Theorie habe ich in den Jahren 1895—6 der mathematischen Abteilung der Neurussischen Naturforscher-Gesellschaft (in Odessa) vorgelegt und nachher dieselbe dem X. Kongreß der Russischen Naturforscher und Ärzte (in Kieff) im Jahre 1898 mitgeteilt. Eine Notiz über den letztgenannten Vortrag befindet sich in den Berichten dieser Versammlung abgedruckt. Im Zusammenhang gab ich damals eine Theorie der Flächenmessung in der Ebene, welche mit der von D. Hilbert im Jahre 1899 in seinen „Grundlagen der Geometrie" veröffentlichten identisch ist.

***) M. Dehn. Ueber den Rauminhalt; Math. Ann. Bd. 55.

für diese Elemente durch ein bestimmtes Vergleichungskriterium festgesetzt ist, daß

1) *Zwischen zwei beliebigen Elementen a und b der Mannigfaltigkeit wenigstens eine der drei Bezeichnungen $a = b$; $a > b$; $a < b$ besteht.*

2) *Ist $a = b$, so ist nicht $a > b$.*

3) *Ist $a = b$, so ist nicht $a < b$.*

4) *Es ist $a = a$.*

5) *Wenn $a = b$ ist, so ist auch $b = a$.*

6) *Wenn $a = b$ und $b = c$, so ist auch $a = c$.*

7) *Wenn $a > b$ und $b > c$, so ist auch $a > c$.*

8) *Wenn $a < b$ und $b < c$, so ist auch $a < c$**).

Es fragt sich nun, ob die Voraussetzung, daß der Rauminhalt eine Größe in diesem Sinne darstellt, als ein neues Axiom ausgesprochen werden muß oder ob dieser Satz sich aus den Axiomen der Euklidischen Geometrie ohne Grenzbetrachtungen ableiten läßt. Es trifft in der Tat das letzte zu und in dem vorliegenden Artikel wollen wir einen dazu nötigen Beweis geben.

2. Sei $ABCD$ ein Tetraeder; wir bezeichnen die von den Eckpunkten A, B, C, D auf die gegenüberliegenden Flächen gefällten Senkrechten resp. mit h_a, h_b, h_c, h_d; die Flächeninhalte dieser Dreiecke sollen resp. a, b, c, d heißen. Weiter bezeichnen wir mit μ eine positive Konstante, deren numerischer Wert im Späteren festgesetzt werden soll.

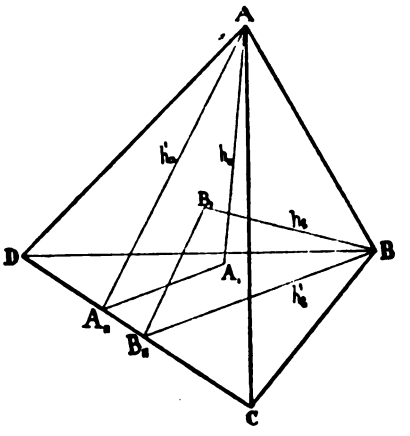


Fig. 1.

Satz 1. *Nun wollen wir zeigen, daß der Wert des Produktes*

$$\mu a h_a$$

unverändert bleibt, wenn man anstatt a einen beliebigen der Buchstaben b, c, d setzt, d. h. daß die Gleichungen

$$\mu a h_a = \mu b h_b = \mu c h_c = \mu d h_d$$

gelten.

Zu diesem Zwecke konstruieren wir die Höhen $AA_1 = h_a$ und $BB_1 = h_b$ (s. Fig. 1). Weiter fällen wir von den Punkten A_1 und B_1 die Senkrechten A_1A_{11} und B_1B_{11} auf die Kante DC, längs welcher die beiden

*) Ich habe in einer Sitzung der mathematischen Abteilung der Neurussischen Naturforscher-Gesellschaft gezeigt, daß diese acht Postulate von einander logisch unabhängig, widerspruchslos und hinreichend sind. Dieser Vortrag wird demnächst im Druck erscheinen.

Flächen a und b zusammenstoßen, und ziehen die Strecken $AA_{11} = h_a'$ und $BB_{11} = h_b'$. Dann sind die Dreiecke AA_1A_{11} und BB_1B_{11} ähnlich und folglich ist

$$h_a \cdot h_b' = h_b \cdot h_a'.$$

Multipliziert man die beiden Seiten dieser Gleichung mit $\frac{1}{2}\mu CD$, unter Berücksichtigung der Beziehungen $a = \frac{1}{2}h_b' \cdot CD$ und $b = \frac{1}{2}h_a' \cdot CD$, so erhält man die gesuchte Relation:

$$\mu a h_a = \mu b h_b.$$

Auf analoge Weise folgt, daß auch

$$\mu a h_a = \mu c h_c = \mu d h_d \text{ ist.}$$

Definition 2. *Das Produkt $\mu a h_a$, welches sich von der Wahl der Tetraederecke als unabhängig erwiesen hat, nennen wir die Invariante des Tetraeders und bezeichnen es mit $J(ABCD)$.*

2. Fundamentalsatz. *Bei jeder beliebigen Zerlegung eines Tetraeders in Teiltetraeder ist die Summe der Invarianten der so erhaltenen Teiltetraeder gleich der Invariante des ursprünglichen Tetraeders.*

Um den Beweis dieses Satzes möglichst übersichtlich zu gestalten, betrachten wir zunächst eine Reihe von Spezialfällen der Tetraederzerlegungen.

Zerlegungsart I. Wir zerlegen eine Fläche, z. B. DBC (s. Fig. 2) des vorliegenden Tetraeders in eine endliche Anzahl n von Dreiecken, und verbinden die Ecken der letzteren mit dem Scheitelpunkt A. Die so erhaltenen Teiltetraeder haben einen gemeinsamen Eckpunkt A und die demselben gegenüberliegenden Flächen liegen in einer Ebene DBC (in der Fig. 2 ist der Übersichtlichkeit halber nur *ein* solches Teiltetrader gezeichnet).

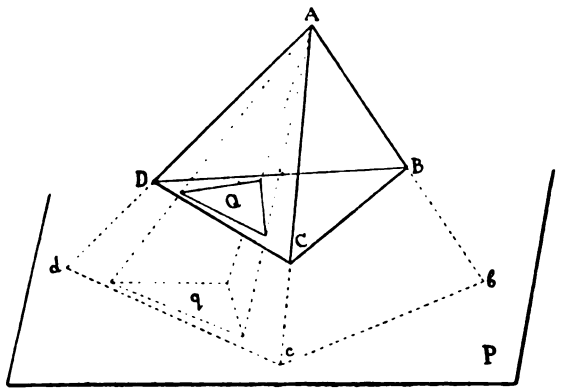


Fig. 2.

Es ist ganz evident, daß in diesem Spezialfall die Invariante des Tetraeders gleich der Summe der Invarianten $i_1, i_2, \cdots i_n$ aller Teiltetraeder ist.

Korollar 1. Diese Zerlegungsart enthält als Spezialfall (nämlich für $n = 2$) die Zerschneidung des Tetraeders durch eine Ebene, welche durch eine seiner Kanten hindurchgeht.

Zerlegungsart II. Wir können das Tetraeder $ABCD$ so zerschneiden, daß die sämtlichen Ecken der Teiltetraeder auf den drei an denselben Scheitel anstoßenden Kanten liegen, z. B. auf den Kanten AB, AC und AD.

Dabei liegen auf der Fläche BCD außer den Punkten B, C, D keine weiteren Eckpunkte der Teiltetraeder; und folglich ist die Fläche BCD eine Seitenfläche eines der Teiltetraeder, etwa des Tetraeders P_n; die vierte Ecke E dieses Teiltetraeders möge auf der Kante AB liegen (s. Fig. 3).

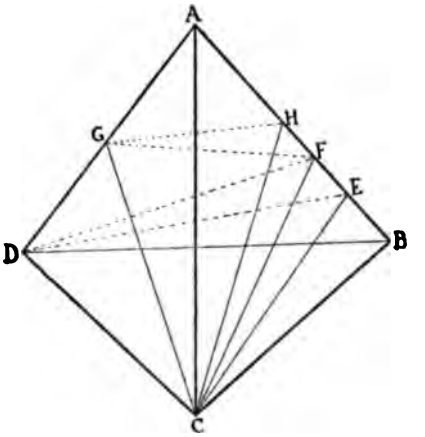


Fig. 3.

Wir können also die Zerlegung in n Teiltetraeder in der Weise erhalten, daß wir zuerst das Tetraeder $ABCD$ durch eine Ebene, welche durch eine Kante (wir haben DC gewählt) hindurchgeht, in zwei Tetraeder

$$EDBC = P_n \quad \text{und} \quad ADCE = P_n'$$

zerlegen, und alsdann $ADCE$ auf gleiche Weise in $n-1$ Teiltetraeder zerschneiden.

Da aber die Zerschneidung des $ABCD$ in P_n und P_n' mit Hülfe einer durch eine Kante gehenden Ebene geschieht, so ist nach Korollar 1

$$J(ABCD) = J(P_n) + J(P_n').$$

Wenn $n = 2$ ist, so sind P_n und P_n' schon die Teiltetraeder von $ABCD$, und der Satz gilt also in diesem Fall. Ist aber $n > 2$, so beweisen wir durch den Schluß von $n-1$ auf n seine Allgemeingültigkeit.

Zerlegungsart III. Wir zerlegen jetzt das gegebene Tetraeder in Teiltetraeder

$$P_1, P_2, \cdots P_m, \cdots P_n$$

nach der Zerlegungsart I. Jedes dieser Teiltetraeder P_m wird seinerseits in weitere Teiltetraeder nach der Zerlegungsart II zerschnitten; diese letzten Teiltetrader von P_m bezeichnen wir mit

$$p_m^{(1)}, p_m^{(2)}, \cdots p_m^{(s_m)}.$$

Dann haben wir einerseits

$$J(ABCD) = J(P_1) + J(P_2) + \cdots + J(P_n),$$

anderseits

$$J(P_1) = \sum_{k=1}^{k=s_1} J(p_1^{(k)}),\ J(P_2) = \sum_{k=1}^{k=s_2} (p_2^{(k)}), \cdots J(P_n) = \sum_{k=}^{k=s_n} (p_n^{(k)}),$$

und folglich

$$J(ABCD) = \sum_{n=1}^{n} \sum_{k=1}^{k=s_n} J(p_n^{(k)});$$

d. h. die Invariante des Tetraeders $ABCD$ ist gleich der Summe der Invarianten der Teiltetraeder.

Wir können auf diesen so erledigten Fall den allgemeinsten überhaupt möglichen Fall der Tetraederzerlegung zurückführen. Aber bevor wir es tun, müssen wir noch eine Zerlegungsart kennen lernen, welche wir als Zerlegung mit Hülfe der Zentralprojektion bezeichnen wollen.

Zerlegungsart IV. *(Zerlegung mit Hülfe der Zentralprojektion.)* Wir nehmen im Raume einen Punkt O, welcher entweder *außerhalb* des Tetraeders $ABCD$ liegt oder mit einer seiner Ecken, z. B. mit A zusammenfällt, und projizieren $ABCD$ vom Punkte O aus auf eine Ebene P, welche von jedem der Strahlen OA, OB, OC, OD in einem Punkte getroffen wird. Die so erhaltenen Projektionen a, b, c, d der Tetraederecken A, B, C, D können nicht alle zugleich auf einer geraden Linie liegen, da A, B, C, D nicht einer und derselben Ebene angehören. Daher ist die von den Projektionen der Kanten des Tetraeders $ABCD$ gebildete Figur im allgemeinen (die Spezialfälle, die dabei eintreten können, werden unten ausführlich behandelt) ein Viereck mit seinen zwei Diagonalen, welche dasselbe in Dreiecke zerlegen.

Wir zerlegen nun jedes dieser letzten Dreiecke auf beliebige Weise in weitere Teildreiecke, deren Gesamtzahl n sein soll. Die Ecken dieser Teildreiecke (in unseren Figuren ist immer nur ein solches Dreieck q gezeichnet) verbinden wir mit dem Projektionszentrum O, wodurch n Tetraeder Oq_1, Oq_2, $\cdots$ Oq_n entstehen*), die einen gemeinsamen Scheitelpunkt O haben, und deren Grundflächen $q_1, q_2, \cdots q_n$ die sämtlichen Teildreiecke der Projektionsfigur $abcd$ sind. Wenn O mit A zusammenfällt, so zerlegen die Kanten der Tetraeder Oq_1, Oq_2, $\cdots$ Oq_n das ursprüngliche Tetraeder $ABCD$ in n Teiltetraeder. Wenn O dagegen von A verschieden ist, so teilen die Kanten von Oq_1, Oq_2, $\cdots$ Oq_n das Tetraeder $ABCD$ in eine Anzahl abgestumpfter Tetraeder, zu denen im speziellen die viereckigen Pyramiden und die vollständigen Tetraeder hinzutreten können. Viereckige Pyramiden kommen dann vor, wenn ein Eckpunkt des entsprechenden Dreiecks q, auf eine der Geraden ab, ac, $\cdots$ fällt; vollständige Tetraeder erscheinen, wenn zwei Ecken des Dreiecks q auf eine der genannten Geraden fallen.

Die abgestumpften Tetraeder und die viereckigen Pyramiden zerlegen wir jedes Mal in drei bezw. zwei vollständige Tetraeder dadurch, daß wir

*) Wir bezeichnen ein Tetraeder mit der Spitze O und der Grundfläche f mit Of.

in jeder der viereckigen Seitenflächen je eine Diagonale ziehen. Durch diese letzten Zerlegungen erhalten wir keine neuen Tetraederecken.

Die auf diese Weise gewonnene Zerlegung des Tetraeders in Teiltetraeder nennen wir Zerlegung mit Hülfe der Zentralprojektion.

Nun wollen wir die verschiedenen Fälle der Zerlegung mit Hülfe der Zentralprojektion näher auseinandersetzen.

Fall α. *O fällt mit A zusammen.* Dieser Fall ergibt nichts anderes, als die erste Zerlegungsart. Vgl. Fig. 2.

Fall β. *O liegt auf der Verlängerung einer der Kanten*, z. B. DA (s. Fig. 4). Die Projektionspunkte a und d fallen zusammen und wir haben auf der Ebene P ein Dreieck abc. Wir bezeichnen die durch die oben angegebene Konstruktion erhaltenen Grundflächen der abgestumpften Tetraeder (ev. der viereckigen Pyramiden und der vollständigen Tetraeder), welche durch die Projektion q_m auf die Flächen DCB bezw. ACB entstanden sind, resp. mit Q_m und Q_{Im}; die Tetraeder, welche durch die Zerlegung dieser abgestumpften Tetraeder erhalten werden, bezw. durch

$$p'_m,\ p''_m,\ p'''_m.$$

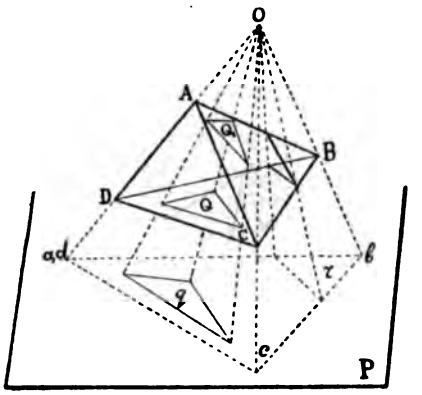


Fig. 4.

Dann ist die Invariante von $ABCD$ gleich der Summe der Invarianten aller p. Denn jedes Tetraeder OQ_m zerfällt in höchstens vier Teiltetraeder OQ_{Im}, p'_m, p''_m, p'''_m, deren sämtliche Ecken auf den drei an eine Spitze O anstoßenden Kanten liegen, d. h. jedes OQ_m wird nach der *Zerlegungsart II* zerschnitten. Also ist:

$$\begin{aligned}
J(OQ_1) &= J(OQ_{I1}) + J(p'_1) + J(p''_1) + J(p'''_1),\\
J(OQ_2) &= J(OQ_{I2}) + J(p'_2) + J(p''_2) + J(p'''_2),\\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\
J(OQ_n) &= J(OQ_{In}) + J(p'_n) + J(p''_n) + J(p'''_n).
\end{aligned}$$

Indem wir diese Gleichungen zu einander addieren und bemerken, daß (vgl. die Zerlegungsart I, S. 498) einerseits

$$J(OQ_1) + J(OQ_2) + \cdots + J(OQ_n) = J(OBCD),$$

anderseits

$$J(OQ_I) + J(OQ_{I2}) + \cdots + J(OQ_{In}) = J(OBCA) \text{ ist,}$$

finden wir

$$J(OBCD) = J(OBCA) + \sum_{n=1}^{n=n} [J(p_n') + J(p_n'') + J(p_n''')].$$

Weiter wird das Tetraeder $OBCD$ durch die Ebene ABC in zwei Tetraeder $OABC$ und $ABCD$ zerlegt, folglich gilt (nach Korollar 1, vgl. S. 498)

$$J(OBCD) = J(OABC) + J(ABCD).$$

Die letzten zwei Gleichungen ergeben schließlich:

$$J(ABCD) = \sum_{n=1}^{n=n} [J(p_n') + J(p_n'') + J(p_n''')];$$

also ist unser Satz auch für diesen Fall bewiesen.

Fall γ. *O liegt außerhalb des Tetraeders auf einer seiner Begrenzungsebenen*, z. B. auf der Ebene ABD (s. Fig 5).

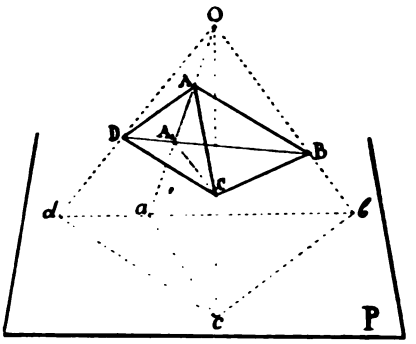


Fig. 5.

Dann liegen die Projektionen a, b, d der Ecken A, B, D auf einer Geraden; also eine von ihnen, sie sei a, liegt zwischen den beiden anderen; d, b und c bilden dabei ein Dreieck, welches durch die Gerade ac in zwei Teildreiecke adc und abc zerlegt wird. Dementsprechend teilt die Ebene Oac das Tetraeder $ABCD$ in zwei Teiltetraeder AA_1BC und AA_1CD; und da diese Ebene durch die Kante AC geht, so haben wir nach Korollar 1 (s. S. 498)

$$J(ABCD) = J(AA_1BC) + J(AA_1CD).$$

Da aber O auf der Verlängerung der Kante A_1A liegt, so ist nach dem Fall β (s. S. 501)

$$J(AA_1BC) = \sum J(p_b)$$

und

$$J(AA_1CD) = \sum J(p_d),$$

wo p_b resp. p_d sämtliche Teiltetraeder sind, in welche nach der oben angeführten Methode die Tetraeder AA_1BC bezw. AA_1CD zerlegt werden.

Diese letzten drei Gleichungen ergeben nun

$$J(ABCD) = \sum (p),$$

wo p sämtliche Teiltetraeder von $ABCD$ sind.

Fall δ. *Wenn O auf keiner der Begrenzungsflächen des Tetraeders $ABCD$ liegt*, so liegen keine drei Projektionspunkte a, b, c, d der Ecken A, B, C, D auf einer geraden Linie. Wir wollen zunächst den Fall betrachten, daß *einer dieser Punkte (sagen wir a) in das Innere des von den drei anderen gebildeten Dreiecks (bcd) fällt* (s. Fig. 6).

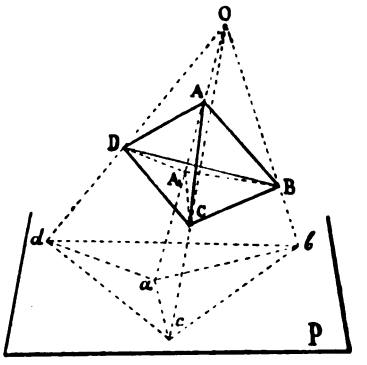


Fig. 6.

Die Verbindungslinien ab, ac, ad zerlegen das Dreieck dbc in drei Teildreiecke, und dementsprechend wird das Tetraeder $ABCD$ in drei Teiltetraeder

$$AA_1BC,\ AA_1BD \text{ und } AA_1CD$$

zerschnitten, was einen Fall der ersten Zerlegungsart (s. oben S. 498) darstellt; daher ist

$$J(ABCD) = J(AA_1BC) + J(AA_1BD) + J(AA_1CD).$$

Wenn wir jetzt, wie oben, die Dreiecke abd, abc und acd in Teildreiecke zerteilen, auf die entsprechenden Teiltetraeder zurückprojizieren und die auf oben angegebene Weise erhaltenen Teiltetraeder der Tetraeder AA_1BC, AA_1BD und AA_1CD mit p_d resp. p_c, p_b bezeichnen, so erhalten wir drei Gleichungen:

$$J(AA_1BC) = \sum J(p_d),\ J(AA_1BD) = \sum J(p_c),\ J(AA_1CD) = \sum J(p_b),$$

da O auf dem Strahl AA_1 liegt, d. h. es liegt hier jedesmal der Fall β vor.

Diese letzten vier Gleichungen ergeben nun

$$J(ABCD) = \sum J(p),$$

wo p sämtliche Teiltetraeder von $ABCD$ sind.

Fall ε. Wenn schließlich *abermals O in keiner der Begrenzungsflächen des Tetraeders $ABCD$ liegt, aber jede der Projektionen a, b, c, d außerhalb des Dreiecks fällt, das von den übrigen Projektionspunkten gebildet wird*, so ergeben die Projektionen der Kanten des Tetraeders ein konvexes Viereck mit seinen zwei Diagonalen. Dieses Viereck wird durch seine Diagonalen in vier Dreiecke mac, mbd, mbc, mad (s. Fig. 7) geteilt.

Die Ebene Oab teilt das Tetraeder $ABCD$ nach der ersten Zerlegungsart (s. Korollar 1 auf S. 498) in zwei Teile, so daß wir haben

$$J(ABCD) = J(AMBD) + J(AMBC),$$

wo M der dem Schnittpunkte m der Diagonalen ab und cd entsprechende Punkt ist.

Wenn wir jetzt die schon oft angewandte Konstruktion ausführen, indem wir jedes Dreieck mac, mbd, mbc, mad in Teildreiecke zerlegen und auf die Seiten des Tetraeders $ABCD$ zurückprojizieren, so zerfallen die Tetraeder $AMBC$ und $AMBD$ jedes in Teiltetraeder, die allgemein p_c bezw. p_d heißen mögen. Da nun dabei O in der Ebene AMB liegt, so gelten nach Fall γ (s. S. 502) die Gleichungen

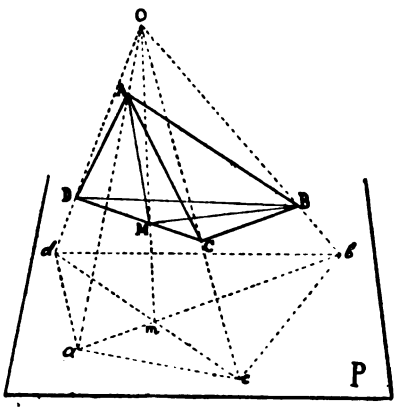


Fig. 7.

$$J(AMBC) = \sum J(p_c)$$

und

$$J(AMBD) = \sum J(p_d).$$

Folglich ist auch in diesem Falle

$$J(ABCD) = \sum J(p).$$

Auf solche Weise haben wir den Beweis des Satzes erbracht, daß bei jeder Zerlegung eines Tetraeders durch die Zentralprojektion die Summe der Invarianten der Teiltetraeder gleich der Invariante des ganzen Tetraeders ist.

Aus den genannten vier Zerlegungen läßt sich nun die allgemeinste Zerlegung zusammensetzen, wodurch dann unser Fundamentalsatz (s. S. 498) *bewiesen ist.*

Sei nämlich $ABCD$ ein Tetraeder und $P_1, P_2, \cdots P_m, \cdots P_k$ die Teiltetraeder, welche durch eine beliebige Zerlegung des ersteren entstanden sind. Wenn wir jetzt alle diese Tetraeder vom Punkte A aus auf die Fläche BCD projizieren, so überdecken sich ihre Projektionen, welche notwendig sämtlich ins Innere des Dreiecks BCD fallen, im allgemeinen gesprochen, vielfach und zerlegen einander in Vielecke. Indem wir diese Vielecke in Dreiecke zerlegen und ihre Ecken mit A verbinden, zerschneiden wir jedes Tetraeder $P_m (m = 1, 2, \cdots k)$ in eine Zahl abgestumpfter Tetraeder (ev. viereckiger Pyramiden und vollständiger Tetraeder), die in bekannter Weise ihrerseits in weitere Teiltetraeder zerlegt werden. Da die auf solche Weise erhaltene Zerlegung jedes Teiltetraeders P_m in weitere Teiltetraeder, welche $p'_m, p''_m, \cdots p_m^{(s_m)}$ heißen mögen, mit Hülfe der Zentralprojektion vorgenommen wurde — denn jedes Projektionszentrum liegt außerhalb eines jeden der Tetraeder, nur diejenigen mit der Ecke A ausgenommen — so ist

$$J(P_m) = J(p'_m) + J(p''_m) + \cdots + J(p_m^{(s_m)}).$$

Wenn wir jetzt m successive die Werte $1, 2, \cdots k$ geben, erhalten wir k solche Gleichungen, welche addiert die folgende ergeben:

$$\sum J(P_m) = \sum J(p_m^{(t)}) \begin{pmatrix} m = 1, 2, \cdots k \\ t = 1, 2, \cdots n_m \end{pmatrix}.$$

Anderseits aber sondert jedes Tetraeder Aq, wo q ein Teildreieck von BCD ist, aus der Gesamtheit der Teiltetraeder p eine Reihe aus, und jedes Tetraeder dieser Reihe kommt in der obigen Summe ein und nur einmal vor. Dabei liegen alle Ecken dieser letzten Teiltetraeder auf den drei an A anstoßenden Kanten des zugehörigen Tetraeders Aq, d. h. Aq wird durch diese Reihe von Tetraedern p nach der Zerlegungsart II (s. S. 499) zerlegt; weiter ist das ganze Tetraeder $ABCD$ auf die erste Art in Tetraeder Aq zerlegt (s. S. 498), so daß es nach der dritten Zerlegungsart (s. S. 499) in Teiltetraeder p zerschnitten worden ist.

Nun ist es klar, daß dieser Komplex von Tetraedern p mit dem Komplex $p_m^{(t)}$, wo $t = 1, 2, \cdots n_m$; $m = 1, 2, \cdots k$ ist, übereinstimmt. Folglich ist

$$J(ABCD) = \sum J(p_m^{(t)}) \begin{pmatrix} m = 1, 2, \cdots k \\ t = 1, 2, \cdots n_m \end{pmatrix},$$

was mit der obigen Gleichung kombiniert den gesuchten Beweis des Fundamentalsatzes liefert:

$$J(ABCD) = \sum_{m=1}^{m=k} J(P_m).$$

3. Satz 3. *Wenn ein Polyeder Q auf verschiedene Weise in eine Anzahl von Tetraedern zerlegt wird, so ist bei jeder Zerlegung die Summe der Invarianten der Teiltetraeder die gleiche.*

Denn gesetzt, es ist uns gelungen das Polyeder Q einmal in m Teiltetraeder $Q_1, Q_2, \cdots Q_m$, ein andres Mal in n Teiltetraeder $q_1, q_2, \cdots q_n$ zu zerlegen; dann konstruieren wir ein Tetraeder P, welches das Polyeder Q enthält, und zerlegen das Polyeder, das begrenzt ist einerseits durch die Oberfläche des Polyeders Q und anderseits des Tetraeders P, auf irgend welche bestimmte Weise in Teiltetraeder $p_1, p_2, \cdots$. Damit erhalten wir zwei Zerlegungen des Tetraeders P:

$$1) \quad Q_1, Q_2, \cdots Q_m, p_1, p_2, \cdots,$$

$$2) \quad q_1, q_2, \cdots q_n, p_1, p_2, \cdots;$$

und nach dem oben Erwiesenen gelten die Gleichungen:

$$J(P) = J(Q_1) + J(Q_2) + \cdots + J(Q_m) + J(p_1) + J(p_2) + \cdots,$$

$$J(P) = J(q_1) + J(q_2) + \cdots + J(q_n) + J(p_1) + J(p_2) + \cdots,$$

aus welchen ohne weiteres folgt, daß

$$J(Q_1) + J(Q_2) + \cdots + J(Q_m) = J(q_1) + J(q_2) + \cdots + J(q_n),$$

w. z. b. w.

Definition 3. *Die konstante Summe der Invarianten der Teiltetraeder, in welche ein Polyeder geteilt wird, wollen wir seine „Invariante" nennen.*

Satz 4. *Wie man auch ein Polyeder Q in Teilpolyeder $Q_1, Q_2, \cdots$ zerlegen mag, die Invariante von Q ist immer gleich der Summe der Invarianten der Teilpolyeder $Q_1, Q_2, \cdots$.*

Zerlegen wir

Q_1 in eine Reihe von Tetraedern $q_1, r_1, s_1, \cdots$,
Q_2 „ „ „ „ „ $q_2, r_2, s_2, \cdots$,
. . . . . .
. . . . . .

Damit wird auch das Polyeder Q in Tetraeder $q_1, r_1, s_1, \cdots, q_2, r_2, s_2, \cdots$ zerlegt, so daß wir erhalten:

$$J(Q_1) = J(q_1) + J(r_1) + J(s_1) + \cdots$$
$$J(Q_2) = J(q_2) + J(r_2) + J(s_2) + \cdots \quad \text{u. s. f.}$$

Durch die Addition dieser Gleichungen bekommen wir dann den Beweis unseres Satzes:

$$J(Q_1) + J(Q_2) + \cdots = J(Q).$$

4. Es sollen noch folgende Sätze angeführt werden, deren Beweise ihrer Einfachheit halber an dieser Stelle übergangen werden können.

Satz 5. *Die Invarianten zweier Polyeder, die aus einer und derselben Anzahl resp. kongruenter Polyeder zusammengesetzt sind, sind gleich.*

Satz 6. *Wenn, wie vorausgesetzt, die Konstante μ eine positive Zahl ist, so ist die Invariante eines Polyeders immer größer, als diejenige seines Teiles.*

Satz 7. *Zerlegt man ein Polyeder M auf eine beliebige Weise in Teilpolyeder und setzt diese zu einem neuen Polyeder M_1 zusammen, so ist*

$$J(M) = J(M_1).$$

Bezeichnen wir mit M_1 (bezw. N_1) ein Polyeder, welches durch irgend welche Zerlegung des Polyeders M (bezw. N) in Stücke und beliebige Zusammensetzung derselben entsteht, so haben wir:

Satz 8. *Sind M_1 und N_1 einander kongruent, so kann keines der Polyeder M, N einen Teil des anderen bilden.*

Satz 9. *Wenn N_1 ein Teil von M_1 ist, so können die Polyeder M und N nicht kongruent sein und M kann nicht ein Teil von N sein.*

5. Nachdem wir in den vorangehenden Paragraphen ein Vergleichungskriterium für die Polyeder aufgestellt haben, wenden wir uns jetzt zum

eigentlichen Ziel dieses Aufsatzes, zur Untersuchung des Verhältnisses zwischen dem Begriff „Rauminhalt" und dem allgemeinen Größenbegriff.

In den Lehrbüchern werden folgende Definitionen der Begriffe „gleich", „kleiner", „größer" in Bezug auf die Rauminhalte gegeben, ev. stillschweigend vorausgesetzt:

a) Die Polyeder M und N haben gleiche Inhalte, wenn es ein Paar zugehörige Polyeder M_1 und N_1 (die Bezeichnung ist hier dieselbe, wie in 4., vgl. S. 506) gibt, welche einander kongruent sind;

b) der Inhalt M ist $>$ als derjenige von N, wenn es ein solches Paar M_1, N_1 gibt, daß N_1 einem Teil von M_1 kongruent ist;

c) der Inhalt M ist $<$ als derjenige von N, wenn es ein Paar M_1, N_1 gibt, so daß M_1 ein Teil von N_1 bildet.

Aus den Sätzen 8 und 9 folgt, daß diese Definitionen zulässig sind, insofern als sie den allgemeinen Definitionen der Begriffe „größer", „kleiner", „gleich" (s. oben S. 497) nicht widersprechen; d. h. es kann nicht vorkommen, daß zwei Polyeder M und N auf Grund dieser Definitionen gleichzeitig mehr als eine der Beziehungen

$$\text{Inh. } M = \text{Inh. } N,\quad \text{Inh. } M > \text{Inh. } N,\quad \text{Inh. } M < \text{Inh. } N$$

befriedigen. Die Definitionen a), b), c) erfüllen somit die Forderung, daß eine Disjunktion der Begriffe „gleich", „größer", „kleiner" stattfindet. Jedoch ist diese Disjunktion keine vollständige, d. h. man kann zwei Polyeder M und N angeben von der Beschaffenheit, daß weder zwei zugehörige Polyeder M_1 und N_1 kongruent sein können, noch ein Polyeder M_1 ein Teil eines Polyeders N_1 oder umgekehrt sein kann. Daher fügt man in der üblichen Darstellung der Lehre vom Rauminhalte noch eine Definition hinzu, welche lautet:

d) Wenn ein Polyeder P in zwei Teile M und m zerlegt wird, ein anderes ihm kongruentes Polyeder Q in Teile N und n, und wenn m und n einander kongruent sind, so sind die Rauminhalte von M und N einander gleich.

Da aber die Annahme dieser letzten Definition d) die Begriffe „gleich", „größer", „kleiner" in Bezug auf die Rauminhalte der Polyeder doch nicht vollständig disjunkt macht*), so benutzt man noch eine fünfte Definition der Gleichheit zweier Rauminhalte, welche auf dem Grenzbegriffe beruht.

Wir lassen hier die Frage nach der gegenseitigen Widerspruchslosigkeit dieser fünf Definitionen außer acht, da die oben bewiesenen Sätze uns in Stand setzen, solche Definitionen der Begriffe „gleich", „größer", „kleiner" in Bezug auf die Rauminhalte der Polyeder zu geben, daß dabei der Begriff „Rauminhalt" eine Größe wird, im Sinne der am

*) Dehn, l. c.

Anfang dieses Aufsatzes (s. oben Definition 1, S. 496—497) aufgestellten Definition.

Um eine genaue Übereinstimmung mit der üblichen Theorie zu erzielen, wählen wir den Wert der willkürlichen Konstante μ, welche in dem Ausdruck der Invariante $J(ABCD) = \mu a h_a$ jedes Polyeders eintritt, so, daß die Invariante des Würfels mit der Kante 1 gleich der Einheit sein würde. Hieraus ergibt sich

$$\mu = \frac{1}{3}.$$

Jetzt geben wir folgende Definition:

A. — *Inh.* $M =$ *Inh.* N, *wenn* $J(M) = J(N)$.

B. — *Inh.* $M >$ *Inh.* N, *wenn* $J(M) > J(N)$.

Γ. — *Inh.* $M <$ *Inh.* N, *wenn* $J(M) < J(N)$.

Δ. — *Als Zahlenwert des Rauminhaltes eines Polyeders soll der Zahlenwert seiner Invariante gelten.*

Die ersten drei dieser Definitionen A, B, Γ stellen eine vollständige Disjunktion der Begriffe „gleich", „größer", „kleiner" fest, was aus dem Obigen ohne weiteres folgt. Wir können leicht zeigen, daß unser Vergleichungskriterium den sechs Bedingungen der Definition 1 (s. S. 496—497) Genüge leistet.

Bei Annahme dieser Definitionen A, B, Γ, Δ werden weiterhin: erstens, die Rauminhalte zweier kongruenter Polyeder einander gleich; zweitens, der Rauminhalt eines jeden Polyeders, das nicht in eine ebene Figur ausartet, von Null verschieden; drittens, der Inhalt des Ganzen wird größer, als derjenige seines Teiles; viertens, der Rauminhalt der Summe von Polyedern wird gleich der Summe der Rauminhalte von allen Summanden; und schließlich fünftens, kraft der Definition Δ werden die Zahlenwerte der Rauminhalte mit denjenigen Zahlenwerten in Übereinstimmung sein, welche die gewöhnliche Theorie ableitet.

Daraus folgt, daß die Lehre vom Rauminhalte der Polyeder in der Euklidischen Geometrie von drei Dimensionen ohne Benutzung des Grenzbegriffes aufgebaut werden kann.

Über Tchebychefsche Annäherungsmethoden*).

Von

Paul Kirchberger in Weilburg an der Lahn.

Inhalt.

Seite

I. Einleitung 509
II. Die Grundgedanken der Theorie 511
III. Ein Hilfssatz 515
§ 1. Polyeder 516
§ 2. Konvexe Polyeder 520
§ 3. Anordnung zu konvexen Polyedern 524
§ 4. Trennung zweier konvexen Polyeder 528
§ 5. Zerlegung in Elementarpolyeder 530
§ 6. Auswahl der $(n+2)$ Punkte bei Unmöglichkeit der Trennung . . 533
IV. Aufstellung der Annäherungsfunktion 535

I. Einleitung.

Mit dem Begriff der Funktion ist das Postulat der numerischen Berechnung der Funktionswerte für irgendwelche Werte der unabhängigen Variabeln gegeben. Da aber die vier elementaren Spezies der Addition, Subtraktion, Multiplikation und Division, oder streng genommen nur die ersten drei derselben, die einzigen numerisch ausführbaren Rechnungsarten, alle andern aber nur insoweit durchführbar sind, als sie sich auf diese zurückführen lassen, so folgt hieraus, daß wir sämtliche Funktionen nur insoweit numerisch beherrschen, als sie sich durch rationale Funktionen ersetzen, d. h. angenähert darstellen lassen. Hieraus erhellt die große Bedeutung der Annäherungsprobleme für die gesamte Mathematik und die ausgezeichnete Stellung, die die Probleme der Annäherung durch rationale oder ganze rationale Funktionen einnehmen. In der Tat setzt,

*) Diese Arbeit ist ein Auszug aus der Inaugural-Dissertation des Verfassers, Göttingen 1902.

wenigstens für die numerische Berechnung, jede Annäherung durch andere, z. B. trigonometrische, Funktionen die annäherungsweise Ersetzbarkeit dieser Funktionen durch rationale voraus.

Die sämtlichen Probleme der Annäherung können wir von verschiedenem Gesichtspunkt aus einteilen. Die *verschiedene Natur der anzunähernden Funktion*, die entweder stetig sein, oder auch aus diskreten Wertepaaren bestehen kann, läßt die eigentlichen Annäherungsprobleme und die Interpolationsprobleme unterscheiden. Ferner können wir einteilen nach der *Art der annähernden Funktion*, die ein Polynom, eine rationale oder eine transcendente Funktion sein kann. Vor allem aber können wir nach der Natur der Annäherung selber, d. h. nach dem *Gesichtspunkt, von dem aus die gesuchte Funktion als die am besten annähernde betrachtet werden soll*, verschiedene Gruppen von Problemen unterscheiden. Es kann ein bestimmter *Punkt bevorzugt* und hier z. B. in der Übereinstimmung möglichst vieler Ableitungen das Kriterium der besten Annäherung gesehen werden, wie dies bei den abgebrochenen Potenzreihen und Kettenbrüchen der Fall ist. Es kann aber auch *ein ganzes Intervall gleichberechtigt erscheinen*. Dann können entweder alle gemachten Fehler gleichmäßig berücksichtigt werden, indem verlangt wird, daß die Summe ihrer absoluten Beträge, die Summe ihrer Quadrate u. s. w. möglichst klein sei. Dies führt, wenn die anzunähernde Funktion stetig ist, auf ein Problem der Variationsrechnung. Oder aber, es kann gefordert werden, *daß der größte Fehler*, der bei der Ersetzung der anzunähernden Funktion durch die annähernde gemacht wird, *möglichst klein sei*.

Dies letzte Kriterium wurde zuerst von Poncelet aufgestellt und von Tchebychef*) systematisch ausgearbeitet.

Vergleichen wir diese Methode mit der gewöhnlichen, nach der Potenzreihen nach einer endlichen Anzahl Glieder abgebrochen werden, so leuchtet sofort ein Vorzug der Tchebychefschen Methode ein: Jede Annäherung hat nur Sinn in einem endlichen Intervall, und in einem solchen erfüllen die abgebrochenen Potenzreihen keine Minimalbedingung. Die Tchebychefsche Methode hat dagegen den Nachteil, daß bei ihr der Grad der annähernden Funktion fest vorgeschrieben sein muß, es also nicht, wie bei den Potenzreihen, möglich ist, durch Erhöhung des Grades mit Benutzung des vorangegangenen Resultates eine Besserung der Annäherung zu erzielen.

Im folgenden soll die von Tchebychef für Funktionen einer Variabeln aufgestellte Theorie auf Funktionen mehrerer Variabeln übertragen werden.

*) Tchebychef, Oeuvres complètes, herausgegeben von Markoff und Sonin, Sur les questions de minima qui se rattachent à la représentation approximative des fonctions und Theorie des mécanismes connus sous le nom de parallelogrammes.

Dabei soll nicht, wie bei Tchebychef, von der Annäherung stetiger Funktionen, sondern vom Interpolationsproblem ausgegangen werden, wodurch die ganze Theorie eine andere Gestalt gewinnt.

Im nächsten Abschnitt werden wir uns das Wesentliche des Verfahrens durch einige anschauliche wenn auch nicht strenge Erwägungen klar zu machen haben, in den folgenden Abschnitten folgt dann der abstrakte und strenge Beweis.

Die vorliegende Arbeit ist aus einem Vortrag im Seminar des Herrn Professor Hilbert entstanden. Auch weiterhin hat ihr Herr Professor Hilbert sein freundliches Interesse bewahrt und seine Ratschläge waren mehrfach von durchgreifendem Erfolg begleitet. Ich sage ihm dafür auch an dieser Stelle meinen herzlichsten Dank.

II. Die Grundgedanken der Theorie.

Unter einer Tchebychefschen Annäherung einer beliebigen gegebenen Funktion $\varphi(x)$ durch ein Polynom n^{ten} Grades $f_n(x)$ in einem gegebenen Intervall verstehen wir die Annäherung durch diejenige Funktion $f_n(x)$, die das Maximum von

$$|f_n(x) - \varphi(x)|$$

im gegebenen Intervall möglichst klein macht. Es sei das Maximum des absoluten Betrages der Differenz „Abweichung“ genannt und mit L bezeichnet; es ist dann L eine Funktion der Koeffizienten von $f_n(x)$

$$L = L(p_0, p_1, \cdots, p_n)$$

wenn etwa

$$f_n(x) = p_n x^n + p_{n-1} x^{n-1} + \cdots + p_0.$$

Die p sollen so bestimmt werden, daß L ein Minimum wird.

Man überzeugt sich leicht von der Existenz dieses Minimums. L ist eine stetige Funktion der p. Denn eine genügend kleine Änderung der p hat an jeder Stelle des Intervalls eine beliebig kleine Änderung von $f_n(x)$, daher auch des Maximums von

$$|f_n(x) - \varphi(x)|$$

zur Folge. Hierbei braucht Stetigkeit von $\varphi(x)$ nicht vorausgesetzt zu werden, nur Eindeutigkeit und Endlichkeit von $\varphi(x)$ müssen wir verlangen, damit die Definition von L ihren Sinn nicht verliert. Hingegen wollen wir Fälle, in denen $\varphi(x)$ für endliche Teile des Intervalls nicht definiert ist, nicht ausschließen.

Stetige Funktionen nehmen im Endlichen stets ihr Minimum an, wir haben demnach nur das Unendliche auszuschließen. Es ist zu zeigen,

daß L beliebig groß wird, wenn eins der Argumente p über alle Grenzen wächst. Dies können wir statt von L auch von dem Maximum von $|f_n(x)|$ nachweisen, da dies sich ja nur um eine endliche Größe, deren größter möglicher Betrag bekannt ist, von L unterscheidet. Betrachten wir die Wurzeln von $x^{n+1} + f_n(x) = 0$, so wird mindestens eine derselben beliebig groß, wenn einer oder mehrere Koeffizienten von $f_n(x)$ wachsen, wie dies aus dem Zusammenhang zwischen Wurzeln und Koeffizienten einer Gleichung folgt. Denken wir uns $x^{n+1} + f_n(x)$ in Faktoren zerlegt, so ist klar, daß das Produkt an mindestens einer Stelle des Intervalls über alle Grenzen wachsen muß, wenn eine oder mehrere Wurzeln genügend groß werden. $|f_n(x)|$ kann aber nur um eine bestimmt angebbare Zahl kleiner sein als $|x^{n+1} + f_n(x)|$. Hieraus folgt dann die Existenz des Minimums von

$$L = L(p_0, p_1, \cdots p_n).$$

Der hier angedeutete Existenzbeweis läßt sich auch auf den Fall ausdehnen, daß die annäherungsweise Darstellung einer Funktion mehrerer Variabeln verlangt wird, etwa die Annäherung von $\varphi(x, y)$ durch

$$f_n(x, y) = p_1 x^n + p_2 x^{n-1} y + \cdots + p_{n-1} y + p_n$$

in einem gegebenen Intervall. Auch hier ist nur zu zeigen, daß das Maximum von $|f_n(x, y)|$ im gegebenen Intervall mit jedem der Koeffizienten p zugleich unendlich wird. Schreiben wir:

$$f_n(x, y) = Cx^n + g_1(y)\, x^{n-1} + g_2(y)\, x^{n-2} + \cdots + g_n(y),$$

so sind die Koeffizienten von $f_n(x, y)$ auch die Koeffizienten der $g(y)$. Das Maximum jeder Funktion $g(y)$ wird beliebig groß, wenn einer ihrer Koeffizienten hinreichend wächst. Halten wir diesen Wert von y fest und betrachten nun $f_n(x, y)$ als Funktion von x, so wird alsdann einer ihrer Koeffizienten, also nach dem Vorangegangenen auch ihr Maximum beliebig groß.

Nach dieser Methode läßt sich der Existenzbeweis der Annäherungsfunktion bei beliebig vielen Variabeln führen. Von der gegebenen anzunähernden Funktion ist dabei nur Eindeutigkeit und Endlichkeit vorausgesetzt. Den im folgenden zu behandelnden Fall des Interpolationsproblems, bei dem diskrete Wertsysteme durch rationale Funktionen angenähert werden sollen, können wir als speziellen Fall des Problems begreifen, bei dem φ nur an diskreten Stellen definiert ist.

Nehmen wir etwa zwei unabhängige Variable und machen wir uns das Wesentliche des Problems an einem möglichst einfachen Beispiel geometrisch klar. Es seien eine Anzahl Punkte im Raum

$$(x_1 y_1 z_1),\ (x_2 y_2 z_2), \cdots, (x_\nu y_\nu z_\nu), \cdots$$

gegeben und diejenige Ebene

$$z = a_1 x + a_2 y + a_3$$

gesucht, die die größte der Differenzen $z - z_\nu$ die „Abweichung" absolut genommen möglichst klein macht. Es fragt sich: an wievielen der gegebenen Punkte nimmt $|z - z_\nu|$ die Abweichung an, und welches ist dabei das Vorzeichen von $z - z_\nu$? Die Abweichung wird an mindestens vier Punkten angenommen; denn nehmen wir an, sie würde nur an etwa drei Punkten angenommen, so könnten wir, da wir durch drei Punkte stets eine Ebene legen können, uns die betrachtete Ebene an den Stellen $x_1 y_1$, $x_2 y_2$ und $x_3 y_3$, an denen die Abweichung angenommen wird, nach dem gegebenen Punkt hin verschoben denken, wodurch sich an diesen Stellen die Differenz $z - z_\nu$ verkleinern würde. An den andern Stellen könnte sie sich zwar vergrößern, sie würde jedoch bei hinreichend geringfügiger Verschiebung der Ebene das Maximum ihres Betrags, das nur bei $x_1 y_1$, $x_2 y_2$, $x_3 y_3$ angenommen wird, noch nicht erreichen. Die Abweichung könnte also noch verkleinert werden.

Betrachten wir nun das Vorzeichen von $z - z_\nu$; die Projektionen derjenigen Punkte xyz auf die xy Ebene, bei denen $z - z_\nu = + L$, seien mit p, die der Punkte, bei denen $z - z_\nu = - L$, seien mit $\bar{p}$ bezeichnet. Es sei zunächst

$$z = a_1 x + a_2 y + a_3$$

noch nicht die gesuchte Ebene, vielmehr sei die Abweichung einer andern Ebene, etwa

$$\bar{z} = \bar{a}_1 x + \bar{a}_2 y + \bar{a}_3$$

kleiner. Man sieht, daß

$$z - \bar{z} = (a_1 - \bar{a}_1) x + (a_2 - \bar{a}_2) y + (a_3 - \bar{a}_3)$$

an den Punkten p positiv, an den Punkten $\bar{p}$ negativ ist.

$$(a_1 - \bar{a}_1) x + (a_2 - \bar{a}_2) y + (a_3 - \bar{a}_3) = 0$$

ist die Gleichung einer Geraden auf der xy Ebene, die die Projektionen p von den $\bar{p}$ so trennt, daß die p auf der einen, die $\bar{p}$ auf der andern Seite liegen. Umgekehrt sieht man auch leicht, daß, wenn eine derartige Trennungslinie existiert, die betrachtete Ebene nicht die am besten annähernde sein kann. Denn ist etwa $z = f(x, y)$ die betrachtete Ebene, $\bar{f}(x, y) = 0$ die Trennungslinie, so hat

$$f(x, y) - \lambda \bar{f}(x, y)$$

bei genügend kleinem λ eine kleinere Abweichung als $f(x, y)$.

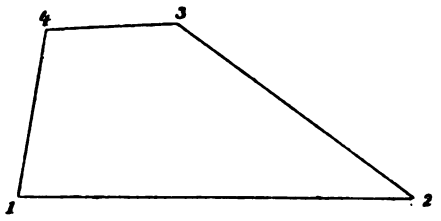
Hinreichende und notwendige Bedingung dafür, daß

$$z = a_1 x + a_2 y + a_3$$

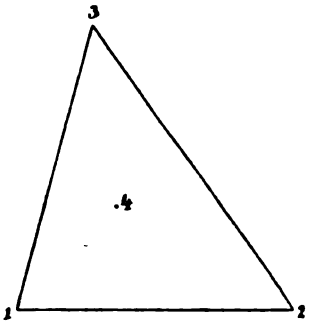
die gegebenen Punkte am besten annähert, ist die, daß sich die Projektionen der Punkte, an denen die Abweichung im einen Sinn angenommen wird,

von den Projektionen der Punkte, an denen die Abweichung im andern Sinn angenommen wird, nicht durch eine Gerade trennen lassen.

Wird die Abweichung an vier Punkten angenommen, so sind für die Lage ihrer Projektionen zwei Typen möglich. Die vier Punkte können ein konvexes Viereck bilden, oder es kann einer in einem von den übrigen gebildeten Dreieck liegen. Im ersten Fall müssen 1 und 3 Punkte p



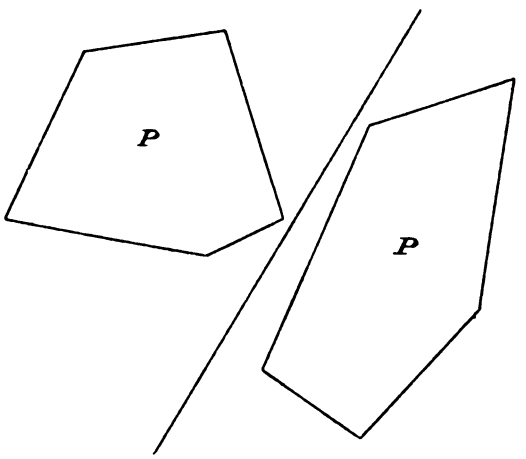
1. Typus



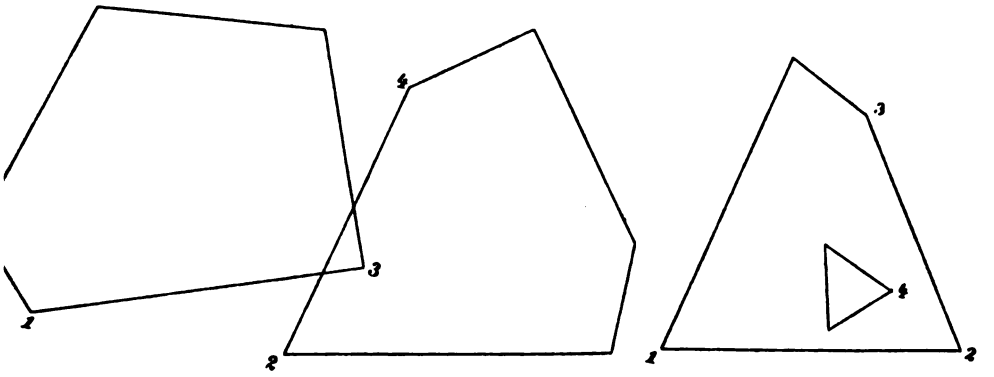
2. Typus

2 und 4 Punkte $\bar{p}$ (oder umgekehrt), im zweiten 1, 2, 3 Punkte p, 4 ein Punkt $\bar{p}$ (oder umgekehrt) sein, wenn Untrennbarkeit durch eine Gerade statthaben soll.

Es fragt sich, ob wir auch auf diese beiden Typen geführt werden, wenn die Abweichung an mehr als vier Punkten angenommen wird. Das ist nun in der Tat der Fall. Wir denken uns alle Punkte p zu einem konvexen Polygon P so angeordnet, daß alle Eckpunkte von P Punkte p sind und alle Punkte p entweder Eckpunkte von P sind, oder im Innern liegen; wir können uns z. B. um die Punkte p einen Gummifaden gelegt denken. Ebenso vereinigen wir die Punkte $\bar{p}$ zu einem konvexen Polygon $\bar{P}$. Nun dürfen die Polygone nicht getrennt voneinander liegen, weil sie sonst durch eine Gerade trennbar wären. Liegen sie aber nicht getrennt voneinander, so muß entweder eine Seite des einen eine Seite des andern durchschneiden, und dann können wir diese beiden Seiten



als die Diagonalen des Vierecks des ersten Typus betrachten, oder es muß ein Eckpunkt des einen Polygons innerhalb des andern Polygons liegen; dann muß er auch innerhalb eines Dreiecks liegen, das von den Eckpunkten des zweiten Polygons gebildet wird, und dann werden wir auf den zweiten Typus geführt.



Dies bedeutet: Ist eine Anzahl Punkte gegeben und die „Annäherungsebene" dieser Punkte gesucht, so gibt es unter ihnen vier Punkte derart, daß die Annäherungsebene dieser vier Punkte auch die Annäherungsebene aller Punkte ist.

Wir wollen nun diese Gedanken auf den allgemeinen Fall übertragen und streng beweisen. Wir schließen zunächst an die letzten Bemerkungen an.

III. Ein Hülfssatz.

Es seien

$$x^{(1)}\ x^{(2)} \dots x^{(n)}$$

unabhängige reelle Variable; ein System von speziellen Werten

$$x_1^{(1)}\ x_1^{(2)} \dots x_1^{(n)}$$

nenne ich einen Punkt. Es seien eine Anzahl Punkte $p_1, p_2, p_3, \cdots$ und hiervon verschiedene Punkte $\overline{p}_1, \overline{p}_2, \overline{p}_3, \cdots$ gegeben. Es handelt sich darum, ob es möglich sei, eine lineare Funktion

$$a_1 x^{(1)} + a_2 x^{(2)} + \cdots + a_n x^{(n)} + a_n$$

anzugeben, die an allen Punkten p positive und an allen Punkten $\overline{p}$ negative Werte annimmt. Unser Satz lautet nun:

Entweder ist es möglich eine solche lineare Funktion anzugeben,

Oder man kann aus den gegebenen Punkten $n+2$ Punkte von der Art auswählen, daß schon sie allein die Existenz einer solchen linearen Funktion unmöglich machen.

§ 1.

Polyeder.

Aus $n+1$ Punkten, d. h. speziellen Wertsystemen der Variabeln $x^{(1)}\ x^{(2)} \dots x^{(n)}$ können wir eine Determinante der Form bilden:

$$\begin{vmatrix} x_1^{(1)} & x_1^{(2)} & x_1^{(3)} & \cdots & x_1^{(n)} & 1 \\ x_2^{(1)} & x_2^{(2)} & x_2^{(3)} & \cdots & x_2^{(n)} & 1 \\ \vdots & & & & & \\ x_{n+1}^{(1)} & x_{n+1}^{(2)} & x_{n+1}^{(3)} & \cdots & x_{n+1}^{(n)} & 1 \end{vmatrix}.$$

Sie sei kurz mit dem Symbol

$$|1, 2, 3, \cdots n, n+1|$$

bezeichnet. *Ein System von n Punkten*

$$(1, 2, 3, \cdots n)$$

d. h. die Matrix von $n+1$ *Spalten und n Zeilen sei eine „Wandung", ein System von* $(n-1)$ *Punkten*

$$\{1, 2, 3, \cdots n-1\}$$

ein „Rand" genannt. Die Anordnung der Elemente dieser Symbole ist nur insoweit bestimmt, daß ich Symbole, die durch eine gerade Zahl von Transpositionen ineinander übergeführt werden können, als identisch betrachten will.

Sind zwei Punkte a und b gegeben,

$$x_a^{(1)}\ x_a^{(2)} \cdots x_a^{(n)}$$

und

$$x_b^{(1)}\ x_b^{(2)} \cdots x_b^{(n)},$$

so spreche ich von der Linie (ab) und verstehe darunter die Gesamtheit der Punkte, die $(n-1)$ unabhängigen linearen Gleichungen

$$\begin{aligned} p_1^{(1)}x^{(1)} &+ p_1^{(2)}x^{(2)} + \cdots + p_1^{(n)}x^{(n)} + p_1^{(n+1)} = 0, \\ p_2^{(1)}x^{(1)} &+ p_2^{(2)}x^{(2)} + \cdots + p_2^{(n)}x^{(n)} + p_2^{(n+1)} = 0, \\ &\vdots \\ p_{n-1}^{(1)}x^{(1)} &+ p_{n-1}^{(2)}x^{(2)} + \cdots + p_{n-1}^{(n)}x^{(n)} + p_{n-1}^{(n+1)} = 0 \end{aligned}$$

genügen, wo diese Gleichungen nur der Bedingung unterworfen sind, daß sie von a und b befriedigt werden. Man sieht, daß es auf die Wahl der p dabei nicht ankommt. Denn die $n-1$ Gleichungen definieren die Unbekannten als lineare Funktionen eines Parameters t

$$x^{(1)} = L_1^{(1)} t + L_0^{(1)},$$
$$x^{(2)} = L_1^{(2)} t + L_0^{(2)},$$
$$\vdots$$
$$x^{(n)} = L_1^{(n)} t + L_0^{(n)},$$

wo t eine der Variabeln x oder eine lineare Funktion derselben bedeuten kann. Nach Definition von t bestimmen sich die L durch

$$x_a^{(1)} = L_1^{(1)} t(a) + L_0^{(1)},$$
$$x_b^{(1)} = L_1^{(1)} t(b) + L_0^{(1)}$$

unabhängig von den Werten der p.

Man sieht nun sofort: Habe ich eine Wandung $(1, 2, \cdots n)$ und einen Punkt p, der der Bedingung genügt, auf einer gegebenen Linie (ab) zu liegen, so ist die Determinante $|1, 2, \cdots n, p|$ eine lineare Funktion des Parameters der Linie (ab). Hiervon werden wir öfters Gebrauch zu machen haben.

Wenn $n+1$ Punkte $1, 2, 3, \cdots n+1$ gegeben sind, die

$$|1, 2, 3, \cdots n+1| > 0$$

genügen, so nenne ich das System der Wandungen

$$(1, 2, \cdots n-1, n), \quad (-1)(1, 2, \cdots n-1, n+1),$$
$$(1, 2, \cdots n-2, n, n+1) \cdots\cdots (-1)^n (2, 3, \cdots n, n+1)$$

ein Elementarpolyeder. Das System dieser Wandungen hat die Eigenschaft, daß, wenn ich jede Wandung mit einem Punkte p zur Bildung einer Determinante zusammennehme, die Summe dieser Determinanten von der Wahl des Punktes p unabhängig ist.

$$(1) \qquad |wp| + |w'p| + |w''p| + \cdots = \text{const.},$$

wo p einen beliebigen Punkt bedeutet. Diese Summe ist nämlich gleich $|1, 2, 3, \cdots n+1|$, sodaß die Gleichung besteht:

$$(2) \quad |1,2,3,\cdots n+1| + (-1)|1,2,\cdots n,p| + (-1)^2|1,2,\cdots n-1,n+1,p| + \cdots + (-1)^{n+1}|2,3,\cdots n+1,p| = 0.$$

Für alle kleineren Werte von n sei die Gleichung bewiesen. Ich nehme nun auf der linken Seite von (2) den Koeffizienten einer Variabeln, etwa den von $x^{(n)}$. In $|1,2,\cdots n+1|$ kommt $x^{(n)}$ nicht vor; in $(-1)|1,2,\cdots n,p|$ d. h. in

$$\begin{vmatrix} x_1^{(1)} & x_1^{(2)} & \cdots & x_1^{(n)} & 1 \\ x_2^{(1)} & x_2^{(2)} & \cdots & x_2^{(n)} & 1 \\ \vdots & & & & \\ x_n^{(1)} & x_n^{(2)} & \cdots & x_n^{(n)} & 1 \\ x^{(1)} & x^{(2)} & \cdots & x^{(n)} & 1 \end{vmatrix}$$

ist der Koeffizient gleich:

$$\begin{vmatrix} x_1^{(1)} & x_1^{(2)} & \cdots & x_1^{(n-1)} & 1 \\ x_2^{(1)} & x_2^{(2)} & \cdots & x_2^{(n-1)} & 1 \\ \vdots & & & & \\ x_n^{(1)} & x_n^{(2)} & \cdots & x_n^{(n-1)} & 1 \end{vmatrix},$$

welche Determinante wir mit $|\bar{1}, \bar{2}, \cdots \bar{n}|$ bezeichnen wollen, um anzudeuten, daß der Punkt $\bar{1}$ eine Koordinate, nämlich $x^{(n)}$ weniger enthält als 1, also in einem niedriger dimensionalen Raume liegt. Auf diese Weise bestimmt sich der Koeffizient von $x^{(n)}$:

$$|\bar{1}, \bar{2}, \cdots \bar{n}| + (-1)|\bar{1}, \bar{2}, \cdots \overline{n-1}, \overline{n+1}| + \cdots + (-1)^{n-1}|\bar{2}, \bar{3}, \cdots \overline{n+1}|;$$

dies ist die linke Seite der Gleichung (2) für den niedriger dimensionalen Raum; p hat hier den Wert $\overline{n+1}$. Der Koeffizient von $x^{(n)}$ in (2) verschwindet, und dasselbe können wir von den andern Variabeln nachweisen. Zur Betrachtung des absoluten Gliedes setzen wir alle Variabeln in (2) gleich Null. Der zweite Term von (2) $(-1)|1, 2, \cdots n, p|$ hat dann den Wert

$$(-1)\begin{vmatrix} x_1^{(1)} & x_1^{(2)} & \cdots & x_1^{(n)} & 1 \\ x_2^{(1)} & x_2^{(2)} & \cdots & x_2^{(n)} & 1 \\ \vdots & & & & \\ x_n^{(1)} & x_n^{(2)} & \cdots & x_n^{(n)} & 1 \\ 0 & 0 & & 0 & 1 \end{vmatrix} = (-1)\begin{vmatrix} x_1^{(1)} & x_1^{(2)} & \cdots & x_1^{(n)} \\ x_2^{(1)} & x_2^{(2)} & \cdots & x_2^{(n)} \\ \vdots & & & \\ x_n^{(1)} & x_n^{(2)} & \cdots & x_n^{(n)} \end{vmatrix}.$$

Das erste Glied von (2) lautet:

$$\begin{vmatrix} x_1^{(1)} & x_1^{(2)} & \cdots & x_1^{(n)} & 1 \\ x_2^{(1)} & x_2^{(2)} & \cdots & x_2^{(n)} & 1 \\ \vdots & & & & \\ x_{n+1}^{(1)} & x_{n+1}^{(2)} & \cdots & x_{n+1}^{(n)} & 1 \end{vmatrix}.$$

Entwickeln wir nach den Elementen der letzten Spalte, so liefert das letzte Element eine Determinante, die sich gegen die vorige gerade wegheben, und ebenso heben sich die übrigen Determinanten der Entwicklung von $|1, 2, \cdots n+1|$ gegen die folgenden Terme der linken Seite von (2). Da (2) für $n = 1$ gilt, ist sie hierdurch allgemein bewiesen.

Die Bildung der Elementarpolyeder aus $n+1$ Punkten können wir folgendermaßen vornehmen: Wir wollen die n Punkte $1, 2, \cdots n$ als Wandung auffassen und mit w bezeichnen. $n-1$ *Punkte in solcher An-*

ordnung, daß der n^{te} Punkt, hinter sie gesetzt, w ergibt, wollen wir einen Rand nennen, der in w enthalten ist, z. B.

$$\{1, 2, \cdots n-1\} = r'.$$

Dagegen $n-1$ Punkte, die, wenn wir den n^{ten} Punkt hinter sie setzen, $-w$ ergeben, wollen wir mit (-1) multiplizieren und alsdann einen Rand nennen, der in w enthalten ist, z. B.

$$-\{1, 2, \cdots n-2, n\} = r''.$$

Wir können jetzt, wenn wir p statt $(n+1)$ einsetzen, sagen: *Ein Elementarpolyeder wird gebildet von den Wandungen*

$$w \quad \text{und} \quad -(rp)$$

wo r alle Ränder von w durchlaufen muß, oder von

$$-w \quad \text{und} \quad (rp)$$

je nachdem

$$|wp| > 0 \quad \text{oder} \quad -|wp| > 0.$$

Nehmen wir den ersten Fall an; es sei ferner q ein Punkt, der $-|wq| > 0$ genügt. Ich bilde das Elementarpolyeder $-w$, (rq), nehme das System dieser Wandungen mit dem früheren zusammen und lasse w gegen $-w$ weg. Man sieht, daß dabei die Gleichung (1) erhalten bleibt. Das neue System von Wandungen nennen wir ein Polyeder. *Allgemein verstehen wir unter einem Polyeder ein System von Wandungen, das gebildet wird aus den Wandungen einer endlichen Anzahl von Elementarpolyedern unter Weglassung gleicher und entgegengesetzter Wandungen.* Ein in den Wandungen vorkommender Punkt $1, 2, 3, \cdots$ heiße ein Eckpunkt.

Für die Polyeder gilt demnach Gleichung (1)

$$|wt| + |w't| + |w''t| + \cdots = \text{const.},$$

wo t irgend einen Punkt bedeutet. Die linke Seite heiße der Inhalt des Polyeders; man sieht, daß sich bei dem Aufbau der Polyeder aus Elementarpolyedern der Inhalt additiv zusammensetzt; danach haben alle Polyeder positiven Inhalt.

In jedem Polyeder kommt jeder Rand, der vorkommt, eine gerade Anzahl Male vor, und zwar gleich oft in dem einen und dem entgegengesetzten Sinne. Man sieht zunächst, daß dieser Satz für Elementarpolyeder gilt; gilt er nun für irgend ein Polyeder, so gilt er auch für jedes Polyeder, das aus dem ersten durch Zufügung eines Elementarpolyeders entsteht, sowie für jedes, das durch Weglassung zweier gleichen und entgegengesetzten Wandungen entsteht. Somit gilt er allgemein.

§ 2.

Konvexe Polyeder.

Unter konvexen Polyedern verstehen wir Polyeder, die der folgenden Bedingung genügen:

Irgend eine Wandung w des Polyeders muß, mit jedem in ihr nicht enthaltenen Eckpunkt p zusammengesetzt, eine nicht negative Determinante ergeben

$$|wp| \gtrless 0.$$

Unsere Elementarpolyeder mit den Wandungen w und $-(rp)$ genügen der Bedingung, da $|wp| > 0$. Denn sei etwa a der nicht in r vorkommende Punkt von w, so kann die Wandung $-(rp)$ nur noch mit a zusammengesetzt werden, und es ist

$$-|rpa| > 0, \quad \text{da} \quad |rap| = |wp| > 0.$$

Wir führen einen neuen Begriff ein: *Wir wollen von einem Punkte i sagen, er liege „innerhalb" des von den Wandungen $w, w', w'', \cdots$ gebildeten konvexen Polyeders, wenn*

$$|wi| \geqq 0, \quad |w'i| \geqq 0, \quad |w''i| \geqq 0, \cdots.$$

Wenn nicht immer das Ungleichheitszeichen, sondern ein oder mehrere Male das Gleichheitszeichen gilt, so wollen wir sagen, der Punkt liege auf der Begrenzung des konvexen Polyeders. Ebenso wollen wir sagen, er liege innerhalb der Wandung w, wenn $|wi| = 0$ und $|w'i| \geqq 0 \cdots$ und auf der Begrenzung der Wandung w, wenn auch außer $|wi| = 0$ noch Gleichheitszeichen gelten.

Wir wollen zeigen, daß ein Punkt, der innerhalb der Wandung w liegt, dies unabhängig davon tut, zu welchem Elementarpolyeder w gehört. Es sei wp ein Elementarpolyeder, $|wp| > 0$ und p' irgend ein Punkt, der $|wp'| > 0$ genügen soll. Der Punkt i liege in Bezug auf wp innerhalb w, sodaß $|wi| = 0$, die übrigen Determinanten positiv sind. Wir wollen zeigen, daß er auch in Bezug auf das Elementarpolyeder wp' innerhalb w liegt. Sei $-r$ ein in w enthaltener Rand, a der nicht zu r gehörende Eckpunkt von w, $w = -(ra)$, so ist (rp) eine von den andern Wandungen des Polyeders wp; es sei also $|rpi| > 0$ und es genügt nachzuweisen, daß $|rp'i| > 0$.

Wir verfolgen $|rat|$, während der Punkt t auf der Linie (pp') läuft. Den Grenzfall, wo diese lineare Funktion sich auf eine Konstante reduziert, behandeln wir später, und wir bestimmen p'' durch $|rap''| = 0$, wo p'' auf der geraden Linie (pp'). Da $|rap| < 0$ und $|rap'| < 0$, so ist die Reihenfolge der p

$$p\,p'\,p'' \quad \text{oder} \quad p'\,p\,p'',$$

p'' kann nicht zwischen p und p' liegen; denn eine lineare Funktion kann nicht zwischen zwei negativen Werten verschwinden.

Wir wollen nun nachweisen:

$$|rp''i| = 0.$$

Wir haben:

$$|rap''| = 0, \qquad |rai| = 0.$$

Ich behaupte, die beiden linearen Gleichungen

$$|rat| = 0 \quad \text{und} \quad |rti| = 0,$$

wo

$$t = t(x^{(1)}\, x^{(2)} \cdots x^{(n)})$$

irgend einen Punkt bedeutet, sind identisch. Sie mögen aufgelöst etwa lauten

$$L^{(1)}x^{(1)} + L^{(2)}x^{(2)} + \cdots + L^{(n)}x^{(n)} + L^{(0)} = 0$$

und

$$\bar{L}^{(1)}x^{(1)} + \bar{L}^{(2)}x^{(2)} + \cdots + \bar{L}^{(n)}x^{(n)} + \bar{L}^{(0)} = 0.$$

In keiner dieser Gleichungen sind alle Koeffizienten Null. Denn das würde bedeuten, daß alle n-reihigen Determinanten der Matrix ra bezw. ri verschwänden, was aber nicht der Fall ist, weil $|rap| < 0$ und $|rip| < 0$. Die Gleichungen haben $(n+1)$ Wurzeln gemein, nämlich die $(n-1)$ Punkte von r sowie a und i;

$$(L^{(1)} - \bar{L}^{(1)})x^{(1)} + (L^{(2)} - \bar{L}^{(2)})x^{(2)} + \cdots + (L^{(0)} - \bar{L}^{(0)})$$

verschwindet also an $n+1$ Stellen. Die Determinante dieses Systems von $n+1$ homogenen linearen Gleichungen mit $(n+1)$ Unbekannten $|rai|$ verschwindet zwar, es können aber nicht alle Unterdeterminanten n^{ten} Grades verschwinden, weil sonst nicht

$$|rap| < 0 \quad \text{sondern} \quad |rap| = 0$$

sein müßte.

Hieraus folgt, daß der Quotient zweier der Unbekannten nicht unendlich sein kann, und setze ich, was erlaubt ist, eine der Differenzen gleich 0, so verschwinden auch alle andern. Damit ist die Identität der Gleichungen

$$|rat| = 0 \quad \text{und} \quad |rti| = 0$$

nachgewiesen, und da $|rap''| = 0$, so folgt

$$|rp''i| = 0.$$

Wir werden von dem Schluß, daß aus

$$|rap''| = 0 \quad \textit{und} \quad |rai| = 0$$

entweder $|rp''i| = 0$ *oder das Verschwinden der n-reihigen Determinanten von ra folgt, noch öfters Gebrauch machen.*

Da nun p'' nicht zwischen p und p' liegen kann und

$$|rpi| > 0,$$

so folgt

$$|rp'i| > 0.$$

Ist, was wir eben ausschlossen, $|rat|$ konstant, wenn sich t auf (pp') bewegt, so behaupte ich, auch $|rit|$ ist auf dieser Linie konstant. Ist dies nämlich nicht der Fall, so gibt es auf (pp') einen Punkt p'', für den $|rip''| = 0$, und ich beweise analog wie oben, daß nun auch $|rap''| = 0$, was der Annahme, daß $|rat|$ auf (pp') konstant sei, widerspricht.

Ist

$$|wp'| < 0, \quad \text{während} \quad |wp| > 0,$$

sodaß sich $p \cdots p'' \cdots p'$ folgen, so ist zunächst $|rp'i| < 0$. Wir kehren aber für das Polyeder wp' das Zeichen von w und demnach auch von r um, sodaß der Satz bestehen bleibt.

Ein Punkt i, der innerhalb der Wandung w liegt, tut dies unabhängig davon, in welchem Elementarpolyeder w vorkommt.

Es stelle (ab) eine gerade Linie dar, und b liege im Innern eines konvexen Polyeders. Ich behaupte: Wenn ich mit einem variabeln Punkte t auf der geraden Linie (ab) von a kommend über b hinaus fortschreite, so komme ich an einen Punkt c, der der Begrenzung des konvexen Polyeders angehört. Bilde ich nämlich die Determinanten $|wt|, |w't|, |w''t|, \cdots$ und lasse t längs (ab) laufen, so können diese Determinanten, da ihre Summe konstant bleiben muß, nicht alle wachsen; falls sie nicht alle konstant bleiben — und daß dieses nicht der Fall sein kann, werden wir gleich nachweisen — muß mindestens eine von ihnen abnehmen. Da diese Determinante eine lineare Funktion von t ist, so muß sie, während ich mit t auf (ab) fortschreite, einmal 0 und sodann negativ werden; sie bleibt dann negativ, soweit ich auch über c hinaus fortschreite. Da dasselbe auch gilt, wenn ich von b nach a zu gehe, so erhalten wir sofort die Sätze:

1) *Eine gerade Linie kann nur innerhalb eines endlichen Stückes innerhalb eines konvexen Polyeders verlaufen.*

2) *Enthält eine gerade Linie einen Punkt, der dem Innern, aber nicht der Begrenzung eines konvexen Polyeders angehört, so hat sie mit der Begrenzung dieses Polyeders zwei und nur zwei Punkte gemein.*

3) *Eine Gerade, die mit dem Innern eines konvexen Polyeders zwei Punkte gemein hat, hat mit ihm alle Punkte gemein, die auf ihr zwischen diesen beiden liegen.*

Wir haben nun nachzuweisen, daß die Determinanten

$$|wt|, \quad |w't|, \quad |w''t|, \cdots$$

nicht alle konstant bleiben können, wenn sich t auf einer geraden Linie bewegt. Wir weisen dies zunächst für ein Elementarpolyeder mit den

Eckpunkten $1, 2, 3, \cdots n, n+1$ nach. Was bedeutet es, wenn $|1, 2, \cdots nt|$ von t unabhängig ist, wenn t sich auf einer geraden Linie bewegt? Die Gerade sei gegeben durch:

$$\begin{aligned} x^{(1)} &= L_1^{(1)} t + L_0^{(1)}, \\ x^{(2)} &= L_1^{(2)} t + L_0^{(2)}, \\ &\vdots \\ x^{(n)} &= L_1^{(n)} t + L_0^{(n)}. \end{aligned}$$

Es muß dann

$$\frac{d}{dt} \begin{vmatrix} x_1^{(1)} & x_1^{(2)} & \cdots & x_1^{(n)} & 1 \\ x_2^{(1)} & x_2^{(2)} & \cdots & x_2^{(n)} & 1 \\ \vdots & & & & \\ x_n^{(1)} & x_n^{(2)} & \cdots & x_n^{(n)} & 1 \\ L_1^{(1)} t + L_0^{(1)} & L_1^{(2)} t + L_0^{(2)} & \cdots & L_1^{(n)} t + L_0^{(n)} & 1 \end{vmatrix} = 0,$$

$$\begin{vmatrix} x_1^{(1)} & x_1^{(2)} & \cdots & x_1^{(n)} & 1 \\ x_2^{(1)} & x_2^{(2)} & \cdots & x_2^{(n)} & 1 \\ \vdots & & & & \\ x_n^{(1)} & x_n^{(2)} & \cdots & x_n^{(n)} & 1 \\ L_1^{(1)} & L_1^{(2)} & \cdots & L_1^{(n)} & 0 \end{vmatrix} = 0.$$

Dies ist eine homogene lineare Gleichung der L_1, und wir haben gemäß den $n+1$ Wandungen $n+1$ solcher Gleichungen für die n Größen L_1. Nun ist in der hingeschriebenen Gleichung der Koeffizient von $L_1^{(1)}$ gleich der dem Element $x_{n+1}^{(1)}$ zugeordneten Unterdeterminante in $|1, 2, \cdots n+1|$, die wir mit $X_{n+1}^{(1)}$ bezeichnen wollen. Die Matrix der Gleichungen für die L_1 ist demnach

$$\begin{matrix} X_1^{(1)} & X_1^{(2)} & \cdots & X_1^{(n)}, \\ X_2^{(1)} & X_2^{(2)} & \cdots & X_2^{(n)}, \\ \vdots & & & \\ X_{n+1}^{(1)} & X_{n+1}^{(2)} & \cdots & X_{n+1}^{(n)}. \end{matrix}$$

Nun müssen entweder die L_1 oder alle n-reihigen Determinanten dieser Matrix verschwinden. Wäre letzteres der Fall, so müßte auch die aus den Unterdeterminanten von $|1, 2, 3, \cdots n, n+1|$ gebildete Determinante

$$\begin{vmatrix} X_1^{(1)} & X_1^{(2)} & \cdots & X_1^{(n)} & X_1^{(n+1)} \\ X_2^{(1)} & X_2^{(2)} & \cdots & X_2^{(n)} & X_2^{(n+1)} \\ \vdots & & & & \\ X_{n+1}^{(1)} & X_{n+1}^{(2)} & \cdots & X_{n+1}^{(n)} & X_{n+1}^{(n+1)} \end{vmatrix}$$

verschwinden; diese ist aber nach einem bekannten Determinantensatz gleich $(1, 2, 3, \cdots n, n+1)^n$, also sicher von 0 verschieden.

Es können also nicht alle Determinanten $|wt|, |w't|, \cdots$ *auf der geraden Linie konstant bleiben;* wegen der Bedingung (1) kann nicht eine allein variabel sein, es sind also mindestens zwei Determinanten variabel.

Wir wollen diesen für Elementarpolyeder geführten Beweis auf allgemeine Polyeder ausdehnen. Wir haben dabei nur nachzuweisen, daß nicht alle Wandungen der Elementarpolyeder, die variable Determinanten liefern, bei der Zusammensetzung weggefallen sein können. Es sei eine Linie gegeben, und wir nehmen eine Wandung, die eine auf ihr nicht konstante Determinante liefert. Da es, wie wir sahen, auf die Konstanten L_0 der Linie nicht ankommt, sondern nur auf die L_1, so können wir uns die L_0 so bestimmt denken, daß die Linie die Wandung in ihrem Innern schneidet und demnach an der Schnittstelle in das Innere eines Elementarpolyeders tritt; wir gehen nun auf ihr stets in derselben Richtung weiter, sie muß an irgend einer Stelle aus dem Elementarpolyeder wieder austreten, sagen wir bei α_1 durch die Wandung w_1; wenn die Wandung w_1 wegfallen soll, so muß ein Elementarpolyeder mit der Wandung $-w_1$ existieren, und in dieses tritt, da α_1 auch im Innern von $-w_1$ liegt, die Linie nun ein; sie muß auch aus diesem wieder austreten, etwa bei α_2 durch w_2; dann muß auch wieder $-w_2$ existieren, u. s. w. Da wir auf der Linie stets in demselben Sinn fortschreiten, so kommen wir stets zu wirklich voneinander verschiedenen Elementarpolyedern, und wir sehen, daß es bei einer endlichen Anzahl von Elementarpolyedern keine gerade Linie geben kann, auf der die Determinanten aller Wandungen konstant sind.

§ 3.

Anordnung zu konvexen Polyedern.

Wir wollen zeigen, daß, wenn eine Anzahl Punkte gegeben ist, die mindestens eine nichtverschwindende $(n+1)$ *reihige Determinante liefern, man stets ein konvexes Polyeder konstruieren kann, dessen Eckpunkte sämtlich zu diesen gegebenen Punkten gehören, und in dessen Innern alle gegebenen Punkte liegen.*

Wir nehmen an, wir hätten ein konvexes Polyeder konstruiert, dessen Eckpunkte sämtlich zu den gegebenen Punkten gehören, und in dessen Innern sich möglicherweise noch gegebene Punkte befinden. Wir wollen zeigen, wie dies Polyeder zu erweitern ist, falls noch Punkte sich außerhalb befinden. Das Polyeder habe die Wandungen $w, w_1, w_2, \cdots$, und p sei ein außerhalb befindlicher Punkt. Es können dann die Determinanten $|wp|, |w_1p|, |w_2p|, \cdots$ weder alle positiv (einschließlich der Null), noch

alle negativ sein. Denn im ersten Fall läge der Punkt p innerhalb, im zweiten hätte das Polyeder einen negativen Inhalt (S. 519). Ich teile die Wandungen des Polyeders ein in

$$w_1', w_2', w_3', \cdots \quad \text{und} \quad w_1'', w_2'', w_3'', \cdots$$

sodaß

$$|w_1' p| \geqq 0, \quad |w_2' p| \geqq 0, \quad |w_3' p| \geqq 0, \cdots$$
$$|w_1'' p| < 0, \quad |w_2'' p| < 0, \quad |w_3'' p| < 0.$$

Die Wandungen w' können in das neu zu bildende konvexe Polyeder mit herübergenommen werden, die Wandungen w'' nicht. Wir bilden demgemäß die Elementarpolyeder $-w''p$, und ich behaupte, daß das neue Polyeder allen Bedingungen genügt.

Wir teilen zum Beweise die in dem ursprünglichen Polyeder vorkommenden Ränder in drei Arten.

Die Ränder

$$r_1', r_2', r_3', \cdots$$

sollen nur in den Wandungen

$$w_1', w_2', w_3', \cdots.$$

Die Ränder

$$r_1'', r_2'', r_3'', \cdots$$

sollen nur in den Wandungen

$$w_1'', w_2'', w_3'', \cdots.$$

Die Ränder

$$r_1, r_2, r_3, \cdots$$

sollen sowohl in den Wandungen w' als auch in w'' enthalten sein.

Hierbei haben wir der Kürze halber „Rand" im absoluten Sinn, ohne Rücksicht auf das Vorzeichen gebraucht. Wir denken uns nun alle Ränder, die im Polyeder vorkommen, hingeschrieben, und zwar jeden so oft als er vorkommt, unter Beachtung des ihm vorkommenden Zeichens. Teilen wir die Ränder in die drei Arten ein, so ist klar, daß auch innerhalb jeder dieser Arten jeder Rand gleich oft mit dem einen und dem entgegengesetzten Zeichen vorkommen muß (S. 519). Für die Richtigkeit unserer Schlußfolgerungen ist es dabei belanglos, ob von jeder Art Ränder existieren oder nicht.

Bilden wir nun sämtliche Elementarpolyeder

$$-w''p,$$

wobei ja $-|w''p| > 0$, so haben diese die Wandungen

$$-w'' \quad \text{und} \quad (\varrho p),$$

wenn ϱ irgend ein Rand von w'' ist. Die ϱ zerfallen in r und r'', und zwar sind in den ϱ sämtliche r'', nicht aber sämtliche r enthalten; denn die r kommen, sofern sie Ränder der w' sind, in den ϱ nicht vor. Danach

heben sich wohl die Wandungen $(r''p)$, nicht aber alle Wandungen (rp) gegeneinander auf. w'' hebt sich gegen $-w''$ und unser neues Polyeder hat nur Wandungen

$$w' \text{ und } (rp).$$

Es ist nun nur noch zu zeigen, daß die Wandungen (rp), mit jedem der Eckpunkte des alten Polyeders zusammengesetzt, eine positive Determinante ergeben. Zu diesem Zweck verbinde ich p mit irgend einem Punkte a, der auf dem Rande r liegt, d. h. $|w'a| = 0$ und $|w''a| = 0$ genügt und zu der Begrenzung des ursprünglichen Polyeders gehört, durch eine Gerade (pa). Schließen wir dabei den Grenzfall, daß in $|w'p| \geqq 0$ das Gleichheitszeichen gelten soll, zunächst aus.

Es ist nun die Determinante $|w''t|$, wo t einen Punkt der Geraden (pa) bedeutet, für $t = a$ gleich Null, und für $t = p$ negativ; sie bleibt also negativ, soweit ich mich auch von a in der Richtung nach p oder über p hinaus entferne. Dagegen ist $|w't|$ für $t = p$ positiv, für $t = a$ Null, und demnach negativ für alle Punkte von (pa), die von p aus gesehen, jenseits a liegen. Demnach ist für alle Punkte der Geraden außer a eine der Determinanten des ursprünglichen Polyeders negativ; wir können also sagen, die Gerade (pa) hat mit dem ursprünglichen Polyeder keinen Punkt außer a gemeinsam. Ist a irgend eine gemeinsame Lösung von $|w't| = 0$ und $|w''t| = 0$, ohne zu der Begrenzung des ursprünglichen Polyeders zu gehören, so hat die Gerade (pa) mit dem Innern des Polyeders überhaupt keinen Punkt gemeinsam.

Ich behaupte nun, $|rpt|$ verschwindet für keinen Innenpunkt des Polyeders, abgesehen von den auf dem Rand r liegenden Punkten. Nehmen wir also an, es bestände die Gleichung $|rpi| = 0$, wo i einen Innenpunkt bedeutet. Wir legen eine Gerade durch die Punkte p und i durch $(n-1)$ lineare Gleichungen. Als eine dieser Gleichungen können wir $|rpt| = 0$ wählen, die übrigen Gleichungen seien

$$f_1(t) = 0, \quad f_2(t) = 0, \cdots f_{n-2}(t) = 0.$$

Wir schreiben diese Gleichungen zusammen mit $|w't| = 0$. Es sei $w' = (r1)$, so haben wir das System:

$$\begin{aligned} |r1t| &= 0, \\ |rpt| &= 0, \\ f_1(t) &= 0, \\ &\vdots \\ f_{n-2}(t) &= 0. \end{aligned}$$

Die Lösung dieses Systems von n Gleichungen mit n Unbekannten stellt den Schnittpunkt der Geraden (pi) mit $|w't| = 0$ dar. Es sei nun D

die Determinante dieser Gleichungen; ist $D \neq 0$, so haben die Gleichungen eine Lösung, etwa a, und es ist

$$|rpa| = 0 \quad \text{und} \quad |r1a| = 0.$$

Nun folgt nach unserm Beweis S. 521 aus diesen Gleichungen, daß entweder $|rp1| = 0$ oder alle n-reihigen Determinanten von ra verschwinden. Da wir die erste Eventualität $|rp1| = |w'p| = 0$ ausgeschlossen haben, so folgt, das Verschwinden der n-reihigen Determinanten von ra, und hieraus folgt $|w''a| = 0$. D. h. der Punkt a genügt $|w'a| = 0$ und $|w''a| = 0$, er liegt auf dem Rande r.

(pi) ist dann eine gerade Linie, die von p zu einem Randpunkt a geht und einen Punkt i des Innern enthält, was wir aber als unmöglich nachgewiesen haben.

Wir haben $D \neq 0$ angenommen. Es sei jetzt $D = 0$. Wir beachten nun: Vom Punkt i war nur $|rpi| = 0$ vorausgesetzt. Wir ziehen nun von i eine Gerade zu einem beliebigen Punkte von r, etwa b, und es sei i' ein beliebiger Punkt der Geraden (ib) zwischen i und b; i' liegt dann im Innern des Polyeders, und es ist auch $|rpi'| = 0$, weil beide Eigenschaften von den beiden Punkten i und b gelten. Wir können also in unserer Betrachtung i' statt i benutzen. Wir lassen jetzt i' auf der Geraden (ib) wandern, dadurch werden alle n Koordinaten von i' lineare Funktionen eines Parameters t. Es kann aber D nicht identisch in t verschwinden, weil D für $i' = b$ nicht verschwindet; denn die Gerade (pb) hat mit $|w't| = 0$ sicher einen und nur einen Punkt nämlich b gemeinsam; d. h. die Gleichungen (3) haben eine und nur eine Lösung, und dann kann ihre Determinante nicht verschwinden. Verschwindet aber D nicht identisch in t, so muß es auch außer $i' = b$ noch Punkte i' geben, für die $D \neq 0$.

Die Annahme $|rpi| = 0$ ist also unzulässig: $|rpt|$ kann für keinen Punkt, der im Innern des ursprünglichen Polyeders liegt, verschwinden. Wir haben aber noch die einschränkende Voraussetzung, daß in $|w'p| \geqq 0$ nicht das Gleichheitszeichen gelte; nehmen wir also jetzt $|w'p| = 0$ an. $|r1p| = 0$. Dann verschwindet $|rpt|$ für dieselben Punkte, für die $|r1t|$ verschwindet, und umgekehrt. Denn nach S. 521 bedingt von den beiden Gleichungen

$$|r1t| = 0 \quad \text{und} \quad |rpt| = 0$$

wegen $|r1p| = 0$ die eine die andere. Die n-reihigen Determinanten von rp können nicht alle verschwinden, denn r kommt noch in einer Wandung w'' vor und es müßte $|w''p| = 0$, während $|w''p| < 0$; auch die Determinanten von $r1$ d. h. von w' können nicht verschwinden, wie sich aus der Betrachtung des Elementarpolyeders, in dem w' vorkommt — und in mindestens einem muß es vorkommen —, ergibt.

$|rpt|$ verschwindet also für keinen Punkt des Innern, wo die zur Begrenzung gehörenden Punkte, die $|w't| = 0$ genügen, eventuell auszuschließen sind. Hieraus folgt aber sofort, daß $|rpt|$ für alle Punkte im Innern dasselbe Vorzeichen haben muß. Wir wissen nun, daß das Vorzeichen für einen Punkt positiv ist, nämlich für den letzten Eckpunkt des Elementarpolyeders, dem die Wandung (rp) angehört.

Hiermit ist alles, was zu beweisen war, bewiesen; wir haben aus einem gegebenen konvexen Polyeder ein neues konstruiert, das einen Punkt p, der außerhalb des ursprünglichen lag, als Eckpunkt enthält und die Eckpunkte des früheren entweder auch als Eckpunkte, oder im Innern. *Damit ist der Eingangs dieses Paragraphen angekündigte Satz bewiesen.*

§ 4.

Trennung zweier konvexen Polyeder.

Es seien P und $\overline{P}$ zwei konvexe Polyeder, die der Bedingung genügen, daß kein Punkt zugleich im Innern von P und im Innern von $\overline{P}$ liegt. Ich behaupte dann:

Es gibt eine lineare Funktion

$$p^{(1)}x^{(1)} + p^{(2)}x^{(2)} + \cdots + p^{(n)}x^{(n)} + p^{(n+1)},$$

die an allen im Innern von P liegenden Punkten positive, und an allen im Innern von $\overline{P}$ liegenden Punkten negative Werte annimmt.

Es sei eine Funktion zweier Punkte

$$p = p(x^{(1)}, x^{(2)}, \cdots x^{(n)})$$

und

$$\overline{p} = \overline{p}(\bar{x}^{(1)}, \bar{x}^{(2)}, \cdots \bar{x}^{(n)})$$

definiert durch

$$f = +\sqrt{(x^{(1)} - \bar{x}^{(1)})^2 + (x^{(2)} - \bar{x}^{(2)})^2 + \cdots + (x^{(n)} - \bar{x}^{(n)})^2}.$$

Wir suchen das Minimum von f unter der Bedingung, daß p im Polyeder P und $\overline{p}$ im Polyeder $\overline{P}$ liege. Dieses Minimum muß existieren und von 0 verschieden sein, weil nicht alle Quadrate verschwinden können. Es werde etwa an den Punkten p^* und $\overline{p}^*$ angenommen. Wir legen durch diese beiden Punkte eine gerade Linie, d. h. wir stellen $(n-1)$ Gleichungen auf, denen die Koordinaten von p^* und $\overline{p}^*$ genügen. Diese Gleichungen seien die folgenden:

$$\begin{aligned}
a_1^{(1)}\ x^{(1)} + a_1^{(2)}\ x^{(2)} + \cdots + a_1^{(n)}\ x^{(n)} + a_1^{(n+1)} &= 0,\\
a_2^{(1)}\ x^{(1)} + a_2^{(2)}\ x^{(2)} + \cdots + a_2^{(n)}\ x^{(n)} + a_2^{(n+1)} &= 0,\\
&\vdots\\
a_{n-1}^{(1)}x^{(1)} + a_{n-1}^{(2)}x^{(2)} + \cdots + a_{n-1}^{(n)}x^{(n)} + a_{n-1}^{(n+1)} &= 0,
\end{aligned}$$

Zu diesen Gleichungen nehmen wir noch eine, die für p^* und $\bar{p}^*$ nicht erfüllt ist:

$$a_n^{(1)} x^{(1)} + a_n^{(2)} x^{(2)} + \cdots + a_n^{(n)} x^{(n)} + a_n^{(n+1)} = 0,$$

und unterwerfen die Koeffizienten a den Bedingungen:

$$\sum_{\nu=1}^{\nu=n} \left(a_\mu^{(\nu)}\right)^2 = 1$$

für alle μ und

$$\sum_{\nu=1}^{\nu=n} \left(a_\mu^{(\nu)} a_{\mu'}^{(\nu)}\right) = 0$$

für $\mu \neq \mu'$.

Man überzeugt sich leicht, daß dies stets auf unendlich vielfache Weise möglich ist, und es ist bekannt, daß alsdann auch

$$\sum_{\mu=1}^{\mu=n} \left(a_\mu^{(\nu)}\right)^2 = 1$$

für alle ν und

$$\sum_{\mu=1}^{\mu=n} \left(a_\mu^{(\nu)} a_\mu^{(\nu')}\right) = 0$$

für $\nu \neq \nu'$.

Wir gehen jetzt zu folgendem Koordinatensystem über:

$$\begin{aligned}
a_1^{(1)} x^{(1)} + a_1^{(2)} x^{(2)} + \cdots + a_1^{(n)} x^{(n)} + a_1^{(n+1)} &= \xi_1, \\
a_2^{(1)} x^{(1)} + a_2^{(2)} x^{(2)} + \cdots + a_2^{(n)} x^{(n)} + a_2^{(n+1)} &= \xi_2, \\
&\vdots \\
a_n^{(1)} x^{(1)} + a_n^{(2)} x^{(2)} + \cdots + a_n^{(n)} x^{(n)} + a_n^{(n+1)} &= \xi_n.
\end{aligned}$$

Man sieht sofort, daß bei dieser Transformation die Form der Funktion f erhalten bleibt, sodaß

$$\begin{aligned}
f &= \sqrt{(x^{(1)} - \bar{x}^{(1)})^2 + (x^{(2)} - \bar{x}^{(2)})^2 + \cdots + (x^{(n)} + \bar{x}^{(n)})^2} \\
&= \sqrt{(\xi^{(1)} - \bar{\xi}^{(1)})^2 + (\xi^{(2)} - \bar{\xi}^{(2)})^2 + \cdots + (\xi^{(n)} + \bar{\xi}^{(n)})^2}.
\end{aligned}$$

Es hat also auch

$$\sqrt{(\xi^{(1)} - \bar{\xi}^{(1)})^2 + (\xi^{(2)} - \bar{\xi}^{(2)})^2 + \cdots + (\xi^{(n)} - \bar{\xi}^{(n)})^2},$$

wenn p in P und $\bar{p}$ in $\bar{P}$ liegen soll, bei $p = p^*$ und $\bar{p} = \bar{p}^*$ ein Minimum. Die neuen Koordinaten von p^* und $\bar{p}^*$ sind alle gleich Null mit Ausnahme von $\xi^{(n)*}$ und $\bar{\xi}^{(n)*}$. Es sei etwa $\xi^{(n)*} > \bar{\xi}^{(n)*}$. Ich behaupte: Kein Punkt im Innern von P kann ein $\xi^{(n)}$ haben, das kleiner ist als $\xi^{(n)*}$. Nehmen wir an, dies sei bei einem Punkte p^{**} der Fall. Wir ziehen eine gerade

Linie von p^* nach p^{**}, und zwar denken wir uns die Koordinaten der Punkte dieser Linie dargestellt durch einen Parameter t, der zunimmt, wenn ich von p^* nach p^{**} gehe. Dann ist $\frac{d\xi^{(n)}}{dt}$ für $\xi^{(n)} = \xi^{(n)*}$ negativ. Ich bilde $\frac{df}{dt}$ bei festgehaltenem $\bar{p} = \bar{p}^*$ für $p = p^*$

$$\frac{df}{dt} = \frac{\xi^{(n)*} - \bar{\xi}^{(n)*}}{\sqrt{(\xi^{(n)*} - \bar{\xi}^{(n)*})^2}} \cdot \frac{d\xi^{(n)}}{dt}.$$

Diese Größe ist negativ, wenn $\frac{d\xi^{(n)}}{dt} < 0$. Da nun jeder Punkt der Geraden von p^* nach p^{**} im Innern von P liegt, so widerspricht dies der Minimalbedingung der Punkte p^* und $\bar{p}^*$. Ebenso weisen wir nach, daß kein Punkt von $\bar{P}$ ein größeres $\bar{\xi}^{(n)}$ haben kann als $\bar{\xi}^{(n)*}$. *Nehmen wir daher eine Konstante c an, sodaß*

$$\xi^{(n)*} > c > \bar{\xi}^{(n)*},$$

so haben wir die verlangte lineare Funktion, die für alle Punkte von P positive und für alle Punkte von $\bar{P}$ negative Werte annimmt, dargestellt in:

$$\xi^{(n)} - c = a_n^{(1)} x^{(1)} + a_n^{(2)} x^{(2)} + \cdots + a_n^{(n)} x^{(n)} + a_n^{(n+1)} - c.$$

§ 5.

Zerlegung in Elementarpolyeder.

Wir wollen den Satz beweisen: *Wenn ein Punkt i in einem konvexen Polyeder $\mathfrak{P}$ liegt, so kann man stets ein Elementarpolyeder P, dessen Eckpunkte zu den Eckpunkten von $\mathfrak{P}$ gehören, angeben, in dem i liegt.*

Der Satz gelte bei niedriger dimensionalen Räumen für bewiesen. Für $n = 1$ ist er trivial, da in diesem Fall jedes konvexe Polyeder ein Elementarpolyeder ist.

Von einem Eckpunkt a von $\mathfrak{P}$ ziehe ich eine gerade Linie nach i, die bei α aus dem Innern von $\mathfrak{P}$ austreten möge. Wenn ich ein Elementarpolyeder angeben kann, das a und α als Innenpunkte (wobei a speziell Eckpunkt sein möge) und nur Eckpunkte von $\mathfrak{P}$ als Eckpunkte enthält, so ist der Satz bewiesen.

Der Punkt α muß mindestens einer Determinantengleichung $|w't| = 0$ genügen. Wir nehmen eine lineare Transformation vor, die die Koordinaten $x^{(1)}, x^{(2)}, x^{(3)}, \cdots x^{(n)}$ in $\xi^{(1)}, \xi^{(2)}, \cdots \xi^{(n)}$ überführt, und zwar sei

$$|w't| = \pm \xi^{(n)}.$$

Die Substitutionsdeterminante sei positiv; es bleiben dann alle Eigenschaften der Polyeder, da sich alle Determinanten nur mit der Substitutionsdeterminante multiplizieren, in dem neuen Raum erhalten.

Es können außer w' noch andere Wandungen von $\mathfrak{P}$ Determinantengleichungen liefern, die mit $\xi^{(n)} = 0$ identisch sind. Es seien dies

$$w',\ w_1',\ w_2',\ \cdots,$$

sodaß in allen Eckpunkten dieser Wandungen die $\xi^{(n)}$-Koordinate verschwindet.

Dagegen sollen

$$w'',\ w_1'',\ w_2'',\ \cdots,$$

hiervon verschiedene Determinantengleichungen liefern, sodaß keine dieser Wandungen nur Eckpunkte mit verschwindender $\xi^{(n)}$-Koordinate enthält.

Es sei das Vorzeichen von $|w't| = \pm \xi^{(n)}$ so bestimmt, daß ein Eckpunkt von $\mathfrak{P}$, etwa b ein negatives $\xi^{(n)}$ habe. Da $\mathfrak{P}$ konvex, muß $|w'b| \gtreqless 0$ d. h. wenn etwa $w' = (1, 2, \cdots n)$

$$\begin{vmatrix} \xi_1^{(1)} & \xi_1^{(2)} & \cdots & \xi_1^{(n-1)} & 0 & 1 \\ \xi_2^{(1)} & \xi_2^{(2)} & \cdots & \xi_2^{(n-1)} & 0 & 1 \\ & & & & & \\ \xi_n^{(1)} & \xi_n^{(2)} & \cdots & \xi_n^{(n-1)} & 0 & 1 \\ \xi_b^{(1)} & \xi_b^{(2)} & \cdots & \xi_b^{(n-1)} & \xi_b^{(n)} & 1 \end{vmatrix} \gtreqless 0.$$

Vertauschen wir die letzten Spalten und berücksichtigen, daß $\xi_b^{(n)} < 0$, so folgt

$$\begin{vmatrix} \xi_1^{(1)} & \xi_1^{(2)} & \cdots & \xi_1^{(n-1)} & 1 \\ \xi_2^{(1)} & \xi_2^{(2)} & \cdots & \xi_2^{(n-1)} & 1 \\ \vdots & & & & \\ \xi_n^{(1)} & \xi_n^{(2)} & \cdots & \xi_n^{(n-1)} & 1 \end{vmatrix} \gtreqless 0.$$

Das Gleichheitszeichen kann nicht gelten, weil sonst w' mit jedem Punkt eine verschwindende Determinante liefern müßte. Lassen wir die $\xi^{(n)}$-Koordinate weg, was wir durch $\bar{w}, \bar{r}, \cdots$ statt $w, r, \cdots$ ausdrücken wollen, so kann in dem $(n-1)$-dimensionalen Raum $\bar{w}'$ als Elementarpolyeder betrachtet werden. Dasselbe gilt von $\bar{w}_1'\ \bar{w}_2' \cdots$, da ja alle mit b positive Determinanten liefern müssen. Ebenso sehen wir, daß jeder Punkt von $\mathfrak{P}$ ein negatives oder verschwindendes $\xi^{(n)}$ haben muß; denn ein Punkt mit positivem $\xi^{(n)}$ würde mit w' eine negative Determinante liefern.

Wir teilen die Ränder der Wandungen $w', w_1', w_2', \cdots$ in zwei Teile:

$r, r_1, r_2, \cdots$ mögen außer in $w', w_1', w_2', \cdots$

noch in Wandungen w'' vorkommen,

$r', r_1', r_2', \cdots$ mögen nur in $w', w_1', w_2', \cdots$

vorkommen. (Vergl. S. 525.)

Die Ränder

$r, r_1, r_2, \cdots$ können in den Wandungen $w', w_1', w_2', \cdots$

nicht mit demselben Vorzeichen vorkommen, wie in $w'', w_1'', \cdots$. Denn wäre etwa

$$(rb) = w'', \qquad (rc) = w',$$

so müßte

$$|w'b| \gtrless 0, \qquad |w''c| \gtrless 0,$$
$$|rcb| \gtrless 0, \qquad |rcb| \gtrless 0,$$

woraus $|rcb| = 0$ folgen würde, was aber nicht möglich ist, weil sonst die Gleichungen

$$|rbt| = 0 \quad \text{und} \quad |rct| = 0$$

nach S. 521 identisch wären. Denn alle n-reihigen Determinanten von rb oder rc d. h. von w'' und w' können nicht verschwinden. Die Ränder $r, r_1, r_2, \cdots$ mögen als $r, r_1, r_2, \cdots$ in $w', w_1', w_2', \cdots$ und als $-r, -r_1, -r_2, \cdots$ in $w'', w_1'', w_2'', \cdots$ enthalten sein.

Fassen wir $\bar{w}', \bar{w}_1', \bar{w}_2', \cdots$ als Elementarpolyeder, die

$$\bar{r}, \bar{r}_1, \bar{r}_2, \cdots, \quad \bar{r}', \bar{r}_1', \bar{r}_2', \cdots$$

als ihre Wandungen auf, so heben sich die $\bar{r}', \bar{r}_1', \bar{r}_2', \cdots$ gegenseitig heraus. (Vergl. S. 526.) Ich behaupte, die Wandungen $\bar{r}, \bar{r}_1, \bar{r}_2, \cdots$ bilden ein konvexes Polyeder. Sei c ein nicht in $\bar{r}$ vorkommender Eckpunkt, so ist $|\bar{r}c| \gtrless 0$ nachzuweisen. Es sei etwa $\bar{r} = (1, 2, \cdots n-1)$, so soll

$$\begin{vmatrix} \xi_1^{(1)} & \xi_1^{(2)} & \cdots & \xi_1^{(n-1)} & 1 \\ \xi_2^{(1)} & \xi_2^{(2)} & \cdots & \xi_2^{(n-1)} & 1 \\ \vdots & & & & \\ \xi_{n-1}^{(1)} & \xi_{n-1}^{(2)} & \cdots & \xi_{n-1}^{(n-1)} & 1 \\ \xi_c^{(1)} & \xi_c^{(2)} & \cdots & \xi_c^{(n-1)} & 1 \end{vmatrix} \geqq 0.$$

$-r$ kommt in einer Wandung $w'', w_1'', \cdots$ vor, und zwar etwa als $-(rb)$; b muß dann ein negatives $\xi^{(n)}$ haben. Da $\mathfrak{P}$ konvex ist, muß $-|rbc| \gtrless 0$; d. h. es muß

$$\begin{vmatrix} \xi_1^{(1)} & \xi_1^{(2)} & \cdots & \xi_1^{(n-1)} & 0 & 1 \\ \xi_2^{(1)} & \xi_2^{(2)} & \cdots & \xi_2^{(n-1)} & 0 & 1 \\ \vdots & & & & & \\ \xi_b^{(1)} & \xi_b^{(2)} & \cdots & \xi_b^{(n-1)} & \xi_b^{(n)} & 1 \\ \xi_c^{(1)} & \xi_c^{(2)} & \cdots & \xi_c^{(n-1)} & 0 & 1 \end{vmatrix} \lessgtr 0.$$

woraus nach Vertauschung der letzten Zeilen und Spalten unter Beachtung von $\xi_b^{(n)} < 0$ die obige Ungleichung folgt. Die $\bar{r}$ bilden also ein konvexes Polyeder.

Der Punkt α muß innerhalb dieses konvexen Polyeders liegen. Gäbe es nämlich eine Wandung $\bar{r}$, für die $|\bar{r}\alpha| < 0$, so ist analog wie oben zu

sehen, daß im n-dimensionalen Raum diejenige Wandung w'', die $-r$ enthält, auch $|w''\alpha| < 0$ liefern müßte, d. h. es läge α nicht in $\mathfrak{P}$.

In dem $(n-1)$-dimensionalen Polyeder $\bar{r}, \bar{r}_1, \bar{r}_2, \cdots$ gibt es nach Voraussetzung ein Elementarpolyeder, in dessen Innern α liegt. Sind $\bar{r}, \bar{r}_1, \cdots \bar{r}_{n-1}$ seine Wandungen, so liegt, wie nunmehr leicht zu sehen, α auch innerhalb des n-dimensionalen Elementarpolyeders mit den Wandungen

$$-(ra), \; -(r_1 a), \cdots -(r_{n-1} a),$$

die $(n+1)^{te}$ Wandung wird von den n Eckpunkten von $r, r_1, \cdots r_{n-1}$ gebildet. Sie liefert, da alle $\xi^{(n)} = 0$ für α eine verschwindende Determinante.

Damit ist der angekündigte Satz bewiesen. Sind nun $\mathfrak{P}$ und $\overline{\mathfrak{P}}$ zwei konvexe Polyeder, und tritt der Fall des vorigen Paragraphen, daß es keinen gemeinsamen Innenpunkt geben möge, nicht ein, so können wir zwei Elementarpolyeder P und $\overline{P}$, wo P nur Eckpunkte von $\mathfrak{P}$, $\overline{P}$ nur Eckpunkte von $\overline{\mathfrak{P}}$ enthält, in solcher Weise angeben, daß auch P und $\overline{P}$ einen gemeinsamen Innenpunkt haben.

§ 6.

Auswahl der $(n+2)$ Punkte bei Unmöglichkeit der Trennung.

Unter einem Begrenzungselement eines konvexen Polyeders verstehen wir die Gesamteinheit der Punkte p, bei denen von den Bedingungen $|wp| \gtrless 0$, $|w'p| \gtrless 0$, $|w''p| \gtrless 0, \cdots$ eine bestimmte Anzahl Male das Gleichheitszeichen gilt. Ist das gegebene konvexe Polyeder ein Elementarpolyeder, so unterscheiden wir nach dieser Anzahl die Ordnung des Begrenzungselementes. Es mögen die Punkte

$$1, 2, 3, \cdots n+1$$

ein Elementarpolyeder bilden. Es sei dann das Begrenzungselement

$$(1, 2, \cdots \nu)$$

die Gesamtheit der Punkte, bei denen diejenigen Determinanten verschwinden, in denen die Punkte $1, 2, \cdots \nu$ alle vorkommen. Dies sind, da wir unter den $n+1-\nu$ nicht in $(1, 2, \cdots \nu)$ enthaltenen Punkten jeden zur Bildung einer Determinante weglassen können, $n+1-\nu$ Gleichungen. Ist μ die Ordnung eines Begrenzungselementes und ν die Anzahl seiner Eckpunkte, so gilt

$$\mu = n + 1 - \nu.$$

Verbinden wir zwei in einem Begrenzungselement liegende Punkte durch eine Gerade, so ist klar, daß für dieses Begrenzungselement dieselben Sätze gelten, die wir S. 522 für das ganze Polyeder ableiteten. Lassen wir den Punkt t auf dieser Geraden wandern, so muß nach einem endlichen

Stück eine der noch positiven Determinanten des Elementarpolyeders verschwinden. Jede dieser Determinanten enthält die übrigen $n+1-\nu$ Punkte und $\nu-1$ aus der Zahl der $1, 2, \cdots \nu$. Möge etwa die den Punkt ν nicht enthaltende verschwinden, so heißt dies, wir gelangen in das Begrenzungselement $(\mu+1)^{\text{ter}}$ Ordnung $(1, 2, 3, \cdots \nu-1)$. Wir können daher sagen: ein Begrenzungselement μ^{ter} Ordnung wird von lauter Begrenzungselementen $(\mu+1)^{\text{ter}}$ Ordnung begrenzt.

Wir beweisen nun den Satz: Eine lineare Funktion

$$p^{(1)}x^{(1)} + p^{(2)}x^{(2)} + \cdots + p^{(n)}x^{(n)} + p^{(n+1)},$$

die an den Eckpunkten $1, 2, \cdots \nu$ positiv ist, ist dies auch überall im Innern des Begrenzungselementes. Wir betrachten zunächst die Begrenzungselemente mit zwei Eckpunkten

$$(1,2),\ (1,3),\ (1,4), \cdots (\nu-1, \nu).$$

Eine lineare Funktion, die bei 1 und 2 positiv ist, kann im Innern von $(1, 2)$ weder negativ noch 0 sein, weil lineare Funktionen kein Minimum haben. Wir gehen nun zu den Begrenzungselementen der nächst niedrigeren Ordnung d. h. zu

$$(1,2,3),\ (1,2,4), \cdots (\nu-2,\ \nu-1,\ \nu).$$

Es liege p im Innern von $(1, 2, 3)$. Ich ziehe von 1 eine Linie nach p. Diese muß nach dem, was wir eben sahen, ein Begrenzungselement höherer Ordnung schneiden, und daher sowohl an dem Schnittpunkt als auch bei 1 positiv sein, sie kann demnach bei p, das zwischen 1 und dem Schnittpunkt liegt, nicht anders als gleichfalls positiv sein. Und in dieser Weise fahren wir fort.

Es seien nun P und $\overline{P}$ zwei Elementarpolyeder, und wir wollen annehmen, es gäbe einen Punkt i, der sowohl im Innern von P als auch im Innern von $\overline{P}$ liege. Ich behaupte, *es lassen sich von den Eckpunkten von P und $\overline{P}$ $(n+2)$ von der Art auslesen, daß es unmöglich ist, eine lineare Funktion*

$$p^{(1)}x^{(1)} + p^{(2)}x^{(2)} + \cdots + p^{(n)}x^{(n)} + p^{(n+1)}$$

anzugeben, die bei denjenigen der ausgewählten Punkte, die Eckpunkte von P sind, positiv, und bei denjenigen, die Eckpunkte von $\overline{P}$ sind, negativ ist.

Wir ziehen durch i irgend eine Gerade und verfolgen sie von i aus in einer beliebigen Richtung. Die Gerade kann nicht immer im Innern der beiden Polyeder verlaufen. Sie möge etwa aus P zuerst austreten und zwar bei dem Punkte i'; i' liegt dann auf einem Begrenzungselement erster Ordnung. Zu der Gleichung dieses Begrenzungselementes nehmen wir noch $n-2$ beliebige Gleichungen, die durch i' befriedigt werden, hinzu und erhalten hierdurch eine Gerade. Verfolgen wir wieder diese

von i' an, so sei i'' der erste Punkt, bei dem sie aus einem der Polyeder austritt. i'' kann entweder auf einem Begrenzungselement zweiter Ordnung von P oder auf einem Begrenzungselement erster Ordnung von $\bar{P}$ liegen. Jedenfalls genügt i'' zwei Gleichungen, zu denen wir nur noch $(n-3)$ hinzunehmen, um so wieder eine Gerade zu bilden und zu einem Punkt i''' zu gelangen. Das Weitergehen auf einer Geraden ist erst dann unmöglich, wenn der Punkt n Gleichungen genügt.

Wir können also einen Punkt i^* bestimmen, der auf zwei Begrenzungselementen der Ordnung μ und $\bar{\mu}$ liegt, wo

$$\mu + \bar{\mu} = n$$

und da

$$\mu = n + 1 - \nu, \qquad \bar{\mu} = n + 1 - \bar{\nu},$$

so ist

$$n + 1 - \nu + n + 1 - \bar{\nu} = n,$$

$$\nu + \bar{\nu} = n + 2.$$

Eine lineare Funktion, die an diesen ν Punkten positiv und an diesen $\bar{\nu}$ negativ wäre, müßte bei i^* zugleich positiv und negativ sein, sie kann also nicht existieren.

Wir haben bisher stets vorausgesetzt, daß sich sowohl unter den gegebenen Punkten $p_1, p_2, p_3, \cdots$ als auch unter $\bar{p}_1, \bar{p}_2, \bar{p}_3, \cdots$ $(n+1)$ finden mögen, die eine nichtverschwindende $(n+1)$-reihige Determinante liefern. Dies braucht aber nicht immer der Fall zu sein. Es können etwa alle $(\nu+1)$-reihigen und höheren Determinanten der p verschwinden. Wir nehmen dann eine Koordinaten-Transformation vor und ordnen die Punkte p in dem ν-dimensionalen Raum zu einem konvexen Polyeder. *Dieses ergänzen wir nach der Methode des* § 5 *durch successive Hinzunahme von Punkten aus den übrigen Dimensionen zu einem n-dimensionalen konvexen Polyeder.* In diesem gibt es dann Begrenzungselemente, deren Eckpunkte nur aus gegebenen Punkten bestehen, und in deren Innern alle gegebenen Punkte liegen. Mit den Punkten $\bar{p}$ verfahren wir ebenso. Nun stellen wir die Alternative der Existenz oder Nichtexistenz eines gemeinsamen Innenpunktes nicht bezüglich der ganzen Polyeder, sondern bezüglich der ausgezeichneten Begrenzungselemente. Man sieht sofort, daß man auch auf diese die Methoden von § 4 und § 6 anwenden kann.

IV. Aufstellung der Annäherungsfunktion.

Es seien nun, wenn wir uns der Einfachheit halber auf $n = 2$ beschränken wollen, eine Anzahl Punkte

$$p_1 = (x_1 y_1 z_1),\ p_2 = (x_2 y_2 z_2), \cdots p_\nu = (x_\nu y_\nu z_\nu), \cdots$$

gegeben und

$$z = a_1x^2 + a_2xy + a_3y^2 + a_4x + a_5y + a_6$$

so bestimmt, daß die größte der Größen

$$|z - z_\mu|, \quad L,$$

möglichst klein sei. Wenn L bei $x_1y_1 \cdots x_\nu y_\nu$ angenommen wird, so ist etwa

$$\begin{aligned} &a_1x_1^2 + a_2x_1y_1 + a_3y_1^2 + a_4x_1 + a_5y_1 + a_6 - z_1 = L, \\ &a_1x_2^2 + a_2x_2y_2 + a_3y_2^2 + a_4x_2 + a_5y_2 + a_6 - z_2 = \varepsilon_2 L, \\ &\quad\vdots \\ &a_1x_\nu^2 + a_2x_\nu y_\nu + a_3y_\nu^2 + a_4x_\nu + a_5y_\nu + a_6 - z_\nu = \varepsilon_\nu L, \end{aligned} \tag{1}$$

wo die $\varepsilon = \pm 1$.

Es habe nun

$$\begin{aligned} &s_1 \text{ das Vorzeichen von } L \text{ und sei } +0, \\ &s_2 \text{ „ „ „ } \varepsilon_2 L \text{ „ „ } +0, \\ &\quad\vdots \\ &s_\nu \text{ „ „ „ } \varepsilon_\nu L \text{ „ „ } +0. \end{aligned}$$

Im übrigen seien diese Größen s unbestimmt. Aus Erwägungen, die denen unserer Einleitung analog sind, folgt dann sofort:

Notwendige und hinreichende Bedingung dafür, daß es keine Funktion kleinerer Abweichung gibt als $f(x, y)$, ist die Unauflösbarkeit der Gleichungen

$$\begin{aligned} &b_1x_1^2 + b_2x_1y_1 + b_3y_1^2 + b_4x_1 + b_5y_1 + b_6 = s_1, \\ &b_1x_2^2 + b_2x_2y_2 + b_3y_2^2 + b_4x_2 + b_5y_2 + b_6 = s_2, \\ &\quad\vdots \\ &b_1x_\nu^2 + b_2x_\nu y_\nu + b_3y_\nu^2 + b_4x_\nu + b_5y_\nu + b_6 = s_\nu \end{aligned} \tag{2}$$

für jedes mögliche Wertsystem s.

Die Zahl der Unbekannten ist 6, die Zahl der Gleichungen ν, im allgemeinen Fall können die Gleichungen nur dann unauflösbar sein, wenn $\nu > 6$. Für $\nu = 7$ ist die Bedingung der Unauflösbarkeit

$$D = \begin{vmatrix} x_1^2 & x_1y_1 & y_1^2 & x_1 & y_1 & 1 & s_1 \\ x_2^2 & x_2y_2 & y_2^2 & x_2 & y_2 & 1 & s_2 \\ \vdots & & & & & & \\ x_7^2 & x_7y_7 & y_7^2 & x_7 & y_7 & 1 & s_7 \end{vmatrix} + 0.$$

Entwickeln wir nach den Elementen der letzten Spalte, so haben wir, abgekürzt geschrieben:

$$D = s_1 \cdot (2, 3, \cdots 7), \; -s_2 \cdot (1, 3, \cdots 7) + \cdots + s_7 (1, 2, \cdots 6).$$

Da die s bis auf das Vorzeichen vollkommen willkürlich sind, die Determinante aber für alle mit der Vorzeichenbedingung verträglichen s von 0 verschieden sein soll, so sieht man leicht die Bedingung: Die Größen

$$\begin{aligned} &s_1 \cdot (2, 3, \cdots 7), \\ -&s_2 \cdot (1, 3, \cdots 7), \\ &\vdots \\ &s_7 \cdot (1, 2, \cdots 6) \end{aligned}$$

müssen gleiches Vorzeichen haben. Hieraus bestimmt sich das Vorzeichen der s bis auf diesen allen gemeinsamen Faktor ± 1. Demnach sind auch die ε bis auf einen Faktor bestimmt; wir haben jetzt nur noch das Gleichungssystem zu lösen, wodurch auch dieser Faktor mitbestimmt wird.

$$\begin{aligned} a_1 x_1^2 + a_2 x_1 y_1 + a_3 y_1^2 + a_4 x_1 + a_5 x_1 + a_6 - \varepsilon_1 L &= \varepsilon_1, \\ a_1 x_2^2 + a_2 x_2 y_2 + a_3 y_2^2 + a_4 x_2 + a_5 y_2 + a_6 - \varepsilon_2 L &= \varepsilon_2, \\ &\vdots \\ a_1 x_7^2 + a_2 x_7 y_7 + a_3 y_7^2 + a_4 x_7 + a_5 y_7 + a_6 - \varepsilon_7 L &= \varepsilon_7. \end{aligned}$$

Das System dieser sieben Gleichungen mit den sieben Unbekannten $a_1 \cdots a_6$ und L ist sicher eindeutig lösbar. Denn die Determinante des Systems unterscheidet sich von D nur dadurch, daß statt der s hier die ε auftreten; sie ist also sicher von 0 verschieden.

Wir haben nachgewiesen, daß es eine Funktion kleinerer Abweichung als die so konstruierte Funktion $f(x, y)$ nicht geben kann. Es fragt sich, ob und wann es eine von $f(x, y)$ verschiedene Funktion von ebensogroßer Abweichung geben kann. Nehmen wir an, $g(x, y)$ sei eine solche Funktion, so muß, gleichviel an welchen Punkten $g(x, y)$ seinerseits die Abweichung annimmt, an den sieben Punkten, an denen $f(x, y)$ seine Abweichung annimmt,

$$|f(x_\mu y_\mu) - \varepsilon_\mu| \gtreqless |g(x_\mu y_\mu) - \varepsilon_\mu|,$$

d. h. es darf $f(x, y) - g(x, y)$ an den Punkten $x_\mu y_\mu$ nicht entgegengesetztes Vorzeichen haben wie s_μ, sondern es muß entweder gleiches Vorzeichen haben oder verschwinden, was wir durch s_μ' andeuten wollen. Dies ergibt für die Koeffizienten der Differenz $f(x, y) - g(x, y)$ die Bedingungen:

$$\begin{aligned} b_1 x_1^2 + b_2 x_1 y_1 + b_3 y_1^2 + b_4 x_1 + b_5 y_1 + b_6 &= s_1', \\ b_1 x_2^2 + b_2 x_2 y_2 + b_3 y_2^2 + b_4 x_2 + b_5 y_2 + b_6 &= s_2', \\ &\vdots \\ b_1 x_7^2 + b_2 x_7 y_7 + b_3 y_7^2 + b_4 x_7 + b_5 y_7 + b_6 &= s_7'. \end{aligned}$$

Die Bedingung für die Auflösbarkeit ist das Verschwinden der Determinante. Ist keine der Unterdeterminanten gleich Null, so kann dies nur

eintreten, wenn $s_1' = s_2' = \cdots = s_7' = 0$, und alsdann müssen in den übrig bleibenden homogenen Gleichungen alle b verschwinden, d. h. $f(x, y)$ ist eindeutig bestimmt.

Von gewissen Ausnahmefällen abgesehen, ist die Annäherungsfunktion durch die gegebenen Punkte eindeutig bestimmt.

Es sei jetzt $\nu > 7$. Es sei xy die Projektion eines Punktes, an dem die Abweichung angenommen wird, und zwar wollen wir xy mit p bezeichnen, wenn $s > 0$ und mit $\bar{p}$ wenn $s < 0$. *Unsere Bedingung* (2) *können wir dann auch so fassen: Es soll unmöglich sein, eine Funktion*

$$b_1 x^2 + b_2 xy + b_3 y^2 + b_4 x + b_5 y + b_6$$

anzugeben, die an allen Punkten p positive und an allen Punkten $\bar{p}$ negative Werte annimmt.

Es folgt nun aus dem Hilfssatze: Wenn die Punkte p und $\bar{p}$ so gelegen sind, daß sie die Existenz einer derartigen Funktion

$$b_1 x^2 + b_2 xy + b_3 y^2 + b_4 x + b_5 y + b_6$$

ausschließen, so kann man aus ihnen sieben derartige Punkte auswählen, daß schon sie eine Funktion der verlangten Form und Eigenschaft unmöglich machen.

Setzen wir

$$x^2 = \xi^{(1)}, \quad xy = \xi^{(2)}, \quad y^2 = \xi^{(3)}, \quad x = \xi^{(4)}, \quad y = \xi^{(5)}.$$

Bezeichnet p einen Punkt $x_1 y_1$, so bezeichne π den entsprechenden Punkt des fünfdimensionalen Raumes

$$\pi_1 = \pi\left(\xi_1^{(1)} \xi_1^{(2)} \xi_1^{(3)} \xi_1^{(4)} \xi_1^{(5)}\right)$$

und wir unterscheiden Punkte π und $\bar{\pi}$. Es kann nun keine Funktion

$$\beta_1 \xi^{(1)} + \beta_2 \xi^{(2)} + \beta_3 \xi^{(3)} + \beta_4 \xi^{(4)} + \beta_5 \xi^{(5)} + \beta_6$$

geben, die an allen Punkten π positive und an allen Punkten $\bar{\pi}$ negative Werte annähme; denn es würde alsdann die Funktion

$$\beta_1 x^2 + \beta_2 xy + \beta_3 y^2 + \beta_4 x + \beta_5 y + \beta_6$$

auch an allen Punkten p positive und an allen Punkten $\bar{p}$ negative Werte annehmen. Ich wähle unter den Punkten π und $\bar{\pi}$ nach § 6 des vorigen Abschnittes sieben aus und nehme dann die diesen sieben Punkten entsprechenden Punkte p und $\bar{p}$ und behaupte: Es kann keine Funktion

$$b_1 x^2 + b_2 xy + b_3 y^2 + b_4 x + b_5 y + b_6$$

geben, die an den ausgewählten Punkten p positive und an den ausgewählten Punkten $\bar{p}$ negative Werte annimmt, denn sonst würde sich

$$b_1 \xi^{(1)} + b_2 \xi^{(2)} + b_3 \xi^{(3)} + b_4 \xi^{(4)} + b_5 \xi^{(5)} + b_6$$

bei den entsprechenden Punkten π und $\bar{\pi}$ ebenso verhalten.

Daraus folgt: Nimmt die Annäherungsfunktion die Abweichung mehr als sieben Mal an, so lassen sich aus der Zahl der Annahmestellen sieben

so auswählen, daß die Annäherungsfunktion auch Annäherungsfunktion dieser sieben Punkte allein ist.

Hieraus ergibt sich die Lösung des Problems: Man greift aus der Zahl der gegebenen Punkte sieben heraus und bestimmt ihre Annäherungsfunktion. Man untersucht sodann, ob die so gefundene Funktion die Annäherungsfunktion für die Gesamtheit der gegebenen Punkte ist, indem man untersucht, ob $|f(x_\mu y_\mu) - z_\mu| \gtreqless l$ für alle gegebenen Punkte erfüllt ist. *Dies ist, wenn man auf alle möglichen Arten sieben Punkte herausgreift, einmal und im wesentlichen auch nur einmal der Fall* (im wesentlichen, d. h. die Ausnahmefälle bestimmter Determinantengleichungen ausgeschlossen). Wir haben bisher angenommen, daß der Grad der Annäherungsfunktion gleich zwei sei; man sieht aber, daß unsere Methoden nicht auf diesen Fall beschränkt sind. Vielmehr gilt allgemein:

1) *Die Abweichung wird im allgemeinen Fall mindestens einmal öfter angenommen, als die Zahl der Parameter der Annäherungsfunktion beträgt.*

2) *Der Sinn, in dem die Abweichung angenommen wird, wird durch eine Determinantenungleichung geliefert.*

3) *Die Koeffizienten der gesuchten Annäherungsfunktion werden durch Auflösung eines Systems linearer Gleichungen gefunden. Dieses System wird aus einer endlichen Anzahl von Systemen durch Versuche bestimmt.*

Der zweite dieser Sätze wird besonders anschaulich, wenn die Anzahl der unabhängigen Variabeln nicht, wie wir bisher der Allgemeinheit halber annahmen, gleich zwei, sondern gleich eins ist, d. h. Punkte der Ebene durch eine Kurve angenähert werden sollen. Unsere Ungleichung lautet dann:

$$D = \begin{vmatrix} x_1^n & x_1^{n-1} \cdots 1 & s_1 \\ x_2^n & x_2^{n-1} \cdots 1 & s_2 \\ \vdots & & \\ x_{n+2}^n & x_{n+2}^{n-1} \cdots 1 & s_{n+2} \end{vmatrix} \neq 0.$$

Nehmen wir $x_1 < x_2 < \cdots < x_{n+2}$ an, und entwickeln nach der letzten Spalte

$$D = s_1 \cdot (2, 3, \cdots n+2) - s_2 \cdot (1, 3, \cdots n+2) + \cdots$$

so haben die Symbole $(2, 3, \cdots n+2)$, $(1, 3, \cdots n+2), \cdots$ alle gleiches Vorzeichen. Denn sie sind gleich dem Differenzenprodukt, und offenbar ist das Vorzeichen verschiedener Differenzenprodukte, wenn in allen jedes Element kleiner ist, als das folgende, dasselbe. Hieraus folgt, daß die s abwechselndes Vorzeichen haben müssen, der Sinn, in dem die Abweichung angenommen wird, muß also abwechseln.

Wir haben uns auf das Interpolationsproblem beschränkt, weil dieses geeignet ist, eine Art Gerippe auch für die Behandlung des allgemeineren

Problems abzugeben, in dem die Annäherung einer überall in einem endlichen Intervall definierten Funktion durch ein Polynom verlangt wird. Verfolgen wir, was durch diese Änderung des Problems an unserm bisherigen Gedankengang geändert wird. Die Abweichung wird nicht mehr in einer endlichen Anzahl diskreter Punkte angenommen zu werden brauchen, sondern wir werden „Abweichungskurven" haben, und zwar zwei verschiedene, nach dem Sinn, in dem die Abweichung angenommen wird. Wir projizieren diese Kurven wieder auf die Ebene der unabhängigen Variabeln. Bei k unabhängigen Veränderlichen bilden die Projektionen $(k-1)$-dimensionale Gebilde. Alle früheren Erwägungen bleiben bestehen, und es handelt sich vor allem um die Möglichkeit, auch den Satz des vorigen Abschnittes zu übertragen. Dieser Satz würde lauten:

Sind in einem n-dimensionalen Raum zwei endlich begrenzte Flächenstücke gegeben, so lassen sie sich entweder durch eine Ebene trennen, oder es existieren auf ihnen $n+2$ Punkte, so daß schon diese die Trennung unmöglich machen, wenn die auf einem Flächenstück liegenden Punkte von denen des andern getrennt werden sollen. Diese Flächenstücke wären zu „konvexen Körpern" zu ergänzen, und diese Körper könnten als konvexe Polyeder mit unendlich vielen Eckpunkten angesehen werden. Das Ergänzen der Flächenstücke zu konvexen Körpern kann etwa so gedacht werden, daß als Innenpunkt des neuen Körpers jeder Punkt genommen werden soll, der auf einer geradlinigen Strecke liegt, deren Endpunkte entweder Punkte des gegebenen Flächenstücks oder schon auf diese Weise erhaltene Innenpunkte sind. Es wäre nun zu zeigen, daß zwei, aus zwei beliebigen Flächenstücken auf diese Weise erhaltene „konvexe Körper" sich durch eine Ebene trennen lassen, falls kein Innenpunkt des einen ein Innenpunkt des andern ist, und ferner, daß sich für jeden Innenpunkt eines konvexen Polyeders ein Elementarpolyeder (im früheren Sinn) angeben läßt, in dessen Innern der betreffende Punkt liegt, und dessen Eckpunkte sämtlich Punkte des erzeugenden Flächenstücks sind.

Es ist zu vermuten, daß alle diese Sätze richtig sind. Dann aber läßt sich unser ganzer für das Interpolationsproblem durchgeführter Gedankengang auf den Fall einer überall definierten Funktion übertragen, und wir haben allgemein den Satz:

Ist m die Anzahl der verfügbaren Parameter der Annäherungsfunktion, so existieren $m+1$ Punkte der gegebenen angenähert darzustellenden Funktion von der Art, daß die Annäherungsfunktion dieser $m+1$ Punkte allein zugleich die Annäherungsfunktion der gegebenen Funktion ist.

Für den einfachsten Fall einer unabhängigen Variabeln, für den sich, wie wir sahen, eine Abwechselung des Sinnes der Abweichung ergibt, ist dieser Satz in meiner Dissertation ausführlich nachgewiesen.

Über die Instabilität der Gleichgewichtslage eines Systems von zwei Freiheitsgraden.

Von

Georg Hamel in Karlsruhe.

Es handle sich um das folgende Problem:

Ein mechanisches, konservatives System von zwei Freiheitsgraden x, y sei vorgelegt,

$$T = Ax'^2 + By'^2$$

sei der Ausdruck der lebendigen Kraft, $U(x, y)$ das Potential, sodaß die Gleichung von der Erhaltung der Energie also lautet:

$$T + U = h.$$

Dabei seien in dem betrachteten Bereiche A und B stetige, endliche und positive (von Null verschiedene) Funktionen von x und y mit endlichen und im allgemeinen stetigen ersten Ableitungen. (Daß wir in T kein Glied mit $x'y'$ angenommen haben, bedeutet keine Beschränkung der Allgemeinheit.) U selbst sei ebenfalls stetig und endlich und mit im allgemeinen stetigen und endlichen ersten Differentialquotienten versehen.

Es sei dann $x = 0$, $y = 0$ eine Gleichgewichtslage des zu T und U gehörenden dynamischen Problems. An dieser Stelle möge U selbst verschwinden, sodaß für die Ruhe in der Gleichgewichtslage $h = 0$ wird.

Wann ist diese Gleichgewichtslage stabil, wann ist sie instabil?

Dieser Frage liege folgende Definition des Begriffes „stabil" zu Grunde.

Betrachten wir alle Bewegungsformen, für welche einmal $|x| < \varepsilon$, $|y| < \varepsilon$ und $|h| < k^2$ wird (wo ε und k willkürlich vorgegebene, kleine Größen sind), so nennen wir die Gleichgewichtslage $x = 0$, $y = 0$ stabil, wenn alle zu diesen Bewegungsformen gehörenden Bahnkurven bei irgend einem Grenzübergange zu $\varepsilon = 0$, $k = 0$ die Gleichgewichtslage zur Grenzlage besitzen. Gibt es aber irgend eine solche Bahnkurve, die sich bei

dem genannten Grenzübergange nicht in die Gleichgewichtslage zusammenzieht, so heiße letztere instabil*).

Es ist nun bekannt, daß Dirichlet**) unter sehr allgemeinen Voraussetzungen über U den Satz bewiesen hat:

„Die Gleichgewichtslage ist stets stabil, wenn U an dieser Stelle ein Minimum besitzt."

Die Umkehrung dieses Satzes, daß nämlich die Gleichgewichtslage stets instabil ist, wenn U kein Minimum besitzt, ist noch nicht vollständig bewiesen, wenn sie auch meistens als richtig angenommen wird. Zwar haben Kneser***), Ljapunoff†), Hadamard††), Painlevé†††) u.a. eine große Reihe von Spezialfällen durchgeführt; doch fehlt, so viel mir bekannt ist, in der Literatur noch vollständig eine Untersuchung des folgenden speziellen Problems, dem ich mich hier zuwenden möchte:

Es verschwinde U längs einer Kurve durch den Nullpunkt in der x, y-Ebene, sei aber außerhalb dieser Kurve in einer gewissen Umgebung überall positiv, so daß jeder Punkt der Kurve eine Gleichgewichtslage darstellt. (Es handelt sich also um einen Fall von „positions d'équilibre *non* isolées" Painlevé, l. c.) *Die Behauptung*, die im folgenden unter gewissen Voraussetzungen über die Beschaffenheit dieser Kurve und des Potentials U bewiesen werden soll, *ist dann die, daß jede dieser Gleichgewichtslagen instabil ist, in dem oben angegebenen Sinne.* Dagegen liegt eine nähere Untersuchung der Bahnkurven selbst *nicht* in meiner Absicht.

---

*) Diese Definition stimmt wesentlich mit derjenigen überein, die Ljapunoff in seiner Arbeit: „Sur l'instabilité de l'équilibre dans certaines cas, où la fonction des forces n'est pas un maximum" (Journal de Mathématiques pures et appliquées, Série V, t. III, 1897) gibt. Man vergleiche auch: Klein-Sommerfeld: „Theorie des Kreisels" (Teubner 1898) p. 350.

**) Dirichlet: „Ueber die Stabilität des Gleichgewichts". (Journal für die reine und angewandte Mathematik Bd. 32, 1846.)

***) Kneser: „Studien über die Bewegungsvorgänge in der Umgebung instabiler Gleichgewichtslagen". (Journal für die reine und angewandte Mathematik, Bd. 115 und 118).

†) l. c.; außerdem einige russisch geschriebene Abhandlungen in den Berichten der Charkow'schen mathematischen Gesellschaft.

††) Hadamard: „Sur certaines propriétés des trajectoires en dynamique". (Joural de Mathematiques pures et appliquées Série V, t. III, 1897.)

†††) Painlevé: „Sur les positions d'équilibre instable". Comptes rendus t. 125, p. 1021—1024. 1897.

§ 1.

Voraussetzungen; eine Koordinatentransformation.

Über die Kurve C, längs deren U verschwinde, machen wir für ein gewisses Gebiet um die Stelle $x=0$, $y=0$ die folgenden Voraussetzungen, die wir später in § 5 zum Teil noch etwas vermindern werden:

Die Kurve sei stetig und besitze überall eine sich stetig ändernde Tangente sowie eine überall endliche und im allgemeinen stetige Krümmung. Dann können wir C in geeigneter Richtung der Art parallel zu sich verschieben, daß die so entstehende Schar von Parallelkurven zusammen mit ihren orthogonalen Trajektorien das in Betracht gezogene Gebiet mit

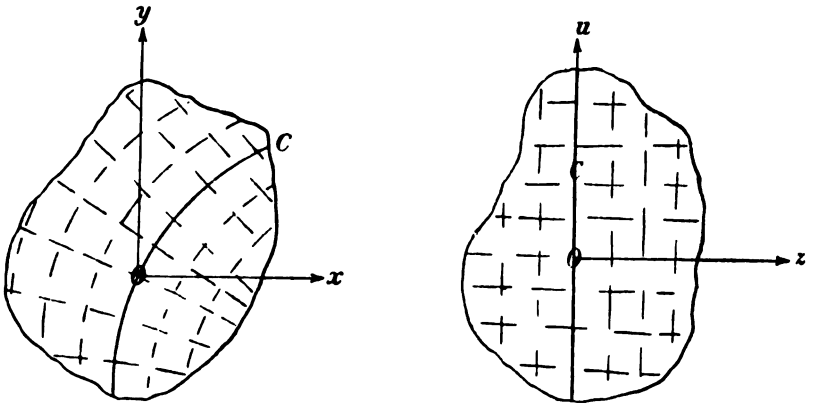


Fig. 1.

einem orthogonalen Netz überdeckt und eine ein-eindeutige Abbildung auf ein endliches Gebiet einer u, z-Ebene vermittelt, eine Abbildung, bei der die Kurve C in die u-Achse übergehe.

Dann erhält die lebendige Kraft T die Gestalt

$$T = au'^2 + bz'^2,$$

wo a und b in dem betrachteten Bereiche stetige, endliche, positive und von Null verschiedene Funktionen von u und z werden mit überall endlichen und im allgemeinen stetigen ersten Ableitungen.

U behält seine in der Einleitung genannten Eigenschaften; es verschwindet längs der u-Achse, ist aber außerhalb in dem betrachteten Bereiche überall positiv.

Wir machen aber jetzt über U noch die weiteren Annahmen: Es lasse sich U in zwei Faktoren zerspalten:

$$U = \varphi(z) \cdot f(u, z),$$

wo φ für $z = 0$ verschwindet, außerhalb $z = 0$ aber stets positiv ist*), $f(u, z)$ außerhalb $z = 0$ ebenfalls stets positiv ist*) und für $z = 0$ nur an einer endlichen Anzahl von Stellen u verschwinde, unstetig oder unendlich groß werde. Auch nehmen wir an, daß sich f beim Überschreiten der u-Achse stetig verhalte, falls es dabei endlich bleibt. Über $\frac{\partial f}{\partial u}$ setzen wir noch voraus, daß die Kurven, längs deren es sein Zeichen wechselt oder unendlich groß wird, nur in endlicher Anzahl vorhanden seien. (Ist U in dem betrachteten Bereiche analytisch und vom Charakter einer rationalen, im Reellen endlichen und bestimmten Funktion, so sind diese Voraussetzungen alle von selbst erfüllt.)

§ 2.

Der erste vorbereitende Fall.

In diesem Paragraphen nehmen wir den gewöhnlichen Fall an, daß f an der ins Auge gefaßten Stelle $u = 0$, $z = 0$ weder verschwinde noch unendlich groß werde, und daß $\frac{\partial f}{\partial u}$ endlich bleibe. Dann kann man nach den genannten Voraussetzungen um $u = 0$, $z = 0$ ein endliches Gebiet abgrenzen, innerhalb dessen $f(u, z)$ zwischen endlichen positiven Grenzen und $\left|\frac{\partial f}{\partial u}\right|$ unterhalb eines bestimmten Wertes bleibt. Auf dieses Gebiet können wir uns beschränken; denn würde, so klein wir auch k und ε wählen (siehe die Einleitung), eine Bahnkurve stets die Grenzen dieses Gebietes überschreiten, so wäre die Instabilität von vornherein bewiesen.

Wir können ferner stets $h = k^2$ setzen, da bei allen unseren Betrachtungen die Gesamtenergie immer positiv oder gleich Null sein muß.

Bezeichne dann im folgenden allemal E eine endliche, positive Größe (deren Wert aber von Zeile zu Zeile ein anderer sein kann), so folgen aus der Gleichung der lebendigen Kraft:

$$au'^2 + bz'^2 + \varphi(z) \cdot f(u, z) = k^2$$

die Ungleichheiten:

$$|u'| < E \cdot k,$$
$$|z'| < E \cdot k,$$
$$f \cdot \varphi(z) < k^2$$

und daraus nach den Voraussetzungen dieses Paragraphen:

$$\varphi(z) < E \cdot k^2.$$

Mit diesen Ungleichheiten allein, die uns für alle zu k gehörigen Bewegungsformen ein bestimmtes „Dirichletsches Bewegungsgebiet“ abgrenzen,

*) D. h. natürlich für einen hinreichend kleinen, aber endlichen Bereich um den Punkt 0. Übrigens sind diese Eigenschaften Folgerungen der andern.

kommen wir hier nicht aus, da für $k = 0$ die u-Achse selbst resultiert und wir also nicht erkennen können, ob für $k = 0$ ein endliches Stück der u-Achse oder nur der Punkt $u = 0$, $z = 0$ als Grenzlage aller Bahnkurven übrig bleibt.

Um diese Frage zu entscheiden, nehmen wir noch die erste Lagrangesche Gleichung

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial u'}\right) = \frac{\partial (T-U)}{\partial u}$$

zu Hülfe, die wir so schreiben können:

$$2au'' + \varphi(z)\frac{\partial f}{\partial u} = (u', z')_2,$$

wo $(u', z')_2$ einen in u', z' homogenen Ausdruck zweiten Grades mit endlichen und im allgemeinen stetigen Koeffizienten bedeutet. Nehmen wir nun die Anfangsbedingungen $u = 0$, $z = 0$, $z' = 0$ und $au'^2 = k^2$, multiplizieren die vorstehende Gleichung mit u' und integrieren von dem Anfang der Bewegung an, so bekommen wir nach einer partiellen Integration

$$au'^2 = k^2 - \int_0^t \varphi(z)\frac{\partial f}{\partial u}u'\,dt + \int_0^t (u', z')_2\,u'\,dt,$$

wo $(u', z')_2$ einen Ausdruck derselben Form bedeutet wie oben (aber nicht genau denselben). Gehen wir mit der Integration nur so weit, als u' sein Zeichen nicht wechselt, so folgt durch Benutzung der Mittelwertsätze und der im Anfang dieses Paragraphen aufgeschriebenen Ungleichheiten

$$au'^2 = k^2(1 - \vartheta \cdot E \cdot u),$$

wo $|\vartheta| \leqq 1$ ist.

Daraus aber ergibt sich, daß u den bestimmten, unabhängig von k angebbaren Wert $\pm \frac{1}{E}$ sicherlich einmal annimmt, daß also das ganze Stück der u-Achse zwischen diesem Werte und dem Nullpunkte zu dem Grenzgebilde der Bahnkurven gehört.

Damit ist aber bewiesen, daß unter den in diesem Paragraphen angenommenen Voraussetzungen die Gleichgewichtslage $u = 0$, $z = 0$ und daher auch $x = 0$, $y = 0$ instabil ist.

§ 3.

Der zweite vorbereitende Fall.

In diesem Paragraphen lassen wir jede Voraussetzung über $f(u, z)$ selbst fallen, welche über die in § 1 gemachten allgemeinen Voraussetzungen hinausginge. Dagegen nehmen wir an, daß in einem endlichen Bereich

um den ins Auge gefaßten Punkt $u = 0$, $z = 0$ die Ableitung $\frac{\partial f}{\partial u}$ ein bestimmtes Zeichen bewahre, ohne jedoch ein Null- oder Unendlichwerden dieser Ableitung auszuschließen.

Die Ungleichheiten

$$|u'| \leqq Ek,$$
$$|z'| \leqq Ek,$$
$$\varphi(z) \cdot f(u, z) \leqq k^2 *)$$

des vorigen Paragraphen bleiben bestehen, desgleichen unter Annahme derselben Anfangsbedingungen die Integralgleichung

$$au'^2 = k^2 - \int_0^t \varphi(z) \frac{\partial f}{\partial u} u' \, dt + \int_0^t (u', z')_2 u' \, dt.$$

Nun können wir aber dem Anfangswert von u' noch ein solches Zeichen geben, daß $\frac{\partial f}{\partial u} u'$ zu Anfang einen *negativen* Wert erhält.

Dann folgt aus obiger Gleichung, wenn wir wieder nur so weit integrieren, als u' das gewählte Zeichen beibehält, die Ungleichheit

$$au'^2 > k^2 + \int_0^t (u', z')_2 u' \, dt$$

oder

$$au'^2 > k^2(1 - \vartheta \cdot E \cdot u).$$

Und daraus schließen wir wieder, daß der bestimmte, a priori angebbare und von k unabhängige Wert $u = \frac{+1}{E}$ auf alle Fälle angenommen wird, womit auch für die Voraussetzungen dieses Paragraphen die Instabilität des Gleichgewichtes bewiesen ist.

§ 4.

Drei weitere Einzelfälle, die in ihrer Gesamtheit den allgemeinen Fall darstellen.

Während sich bei den beiden bisher behandelten Fällen die Instabilität nachweisen ließ, indem wir eine von der Gleichgewichtslage selbst ausgehende Bewegung einleiteten**), scheint dies bei den noch übrigen

*) Aber *nicht* mehr die vierte Ungleichheitsbedingung $\varphi(z) \leqq Ek^2$.

**) Die Untersuchungen der §§ 2 und 3 dienten vom systematischen Standpunkte aus nur zur Vorbereitung. Sie bieten aber außerdem den Vorteil, die meist vorkommenden Fälle bequemer zu erledigen, als es in diesem Paragraphen möglich sein wird.

Spezialfällen nicht mehr möglich zu sein; wir werden auch den Ausgangsort der Bewegung ändern müssen, natürlich so, daß er in der Grenze $\varepsilon = 0$, $k = 0$ mit der Gleichgewichtsstelle zusammenfällt. Es bleiben noch drei Möglichkeiten, die wir aber so formulieren und behandeln werden, daß der allgemeine Fall in ihnen enthalten ist:

I) Es kann $\frac{\partial f}{\partial u}$ längs eines Stückes der u Achse vom Punkte $u = 0$, $z = 0$ aus verschwinden. Dann ist also $f(u, 0)$ konstant und kann daher nach den allgemeinen Annahmen längs des in Betracht kommenden Stückes der u-Achse nicht verschwinden. Wenn wir diesen Fall noch nicht mit dem in § 2 behandelten als erledigt ansehen, so liegt das daran, daß möglicherweise an der Stelle $u = 0$, $z = 0$ selbst $\frac{\partial f}{\partial u}$ auf einen unendlich großen Wert springen kann, was wir nicht ausschließen wollen.

In anderer Weise, als durch einen Übergang durch Null kann nach unseren Annahmen $\frac{\partial f}{\partial u}$ beim Überschreiten der u-Achse sein Zeichen nicht ändern. Also bleiben noch die beiden folgenden Fälle zu diskutieren:

II) Es läßt sich ein an O angrenzendes Stück der u-Axe angeben, für welches $\frac{\partial f}{\partial u} \cdot u$ positiv ist.

III) Es läßt sich ein an O angrenzendes Stück der u-Axe angeben, für welches $\frac{\partial f}{\partial u} \cdot u$ negativ ist.

Das entsprechende Zeichen behält dann $\frac{\partial f}{\partial u}$ auch für eine gewisse endliche Umgebung des betreffenden Stückes der u-Achse bei.

I.

Es sei also $f(u, z)$ längs eines endlichen Stückes der u-Achse vom Punkte $u = 0$, $z = 0$ an konstant, aber von Null verschieden. Dann können wir einen endlichen Teil dieses Stückes der u-Achse mit einem endlichen, den Nullpunkt wenigstens in der Grenze enthaltenden Gebiet G umgeben, in dem $\frac{\partial f}{\partial u}$ unterhalb einer bestimmten Grenze, f aber oberhalb einer bestimmten Grenze bleibt. Um die Ideen zu fixieren, nehmen wir an, daß das Gebiet G negative Werte von u enthalte.

Dann ist jeder Punkt P der u-Achse innerhalb dieses Gebietes G instabil nach den Untersuchungen des § 2; und zwar läßt sich die Entfernung E in der u-Richtung, die sicher bei noch so kleinem k erreicht wird, unabhängig von der Lage des Punktes P angeben, da die Grenzen E des § 2 für das ganze Gebiet gelten. Wähle ich nun einen bestimmten Punkt P so nahe an dem Punkte $O(u = 0, z = 0)$, daß die Entfernung OP

kleiner ist als E, so muß ein von P aus in der Richtung der u-Achse gestoßener Punkt entweder die z-Achse ($u = 0$) erreichen oder aber einen Punkt des Randes des Gebietes, der ein größeres u hat als P. Nenne ich diesen Punkt Q. Wenn nun k stets kleiner genommen wird, zieht sich das „Dirichletsche Bewegungsgebiet" auf die u-Achse zusammen. Infolgedessen muß der Punkt Q, mag er nun auf der z-Achse oder auf dem Rande des Gebietes G liegen, in der Grenze $k = 0$ gegen den Punkt O konvergieren. Da aber jeder mechanische Vorgang der hier in Frage kommenden Art umkehrbar ist, so gibt es stets bei noch so kleinem k eine Bewegung, die mit beliebig kleiner (nämlich mit k gegen Null gehender) Geschwindigkeit und in beliebiger Nähe des Punktes O (nämlich im Punkte Q) beginnt und doch stets den endlich entfernten Punkt P erreicht. Und damit ist auch für diesen Spezialfall bewiesen, daß der Punkt O eine instabile Gleichgewichtslage darstellt.

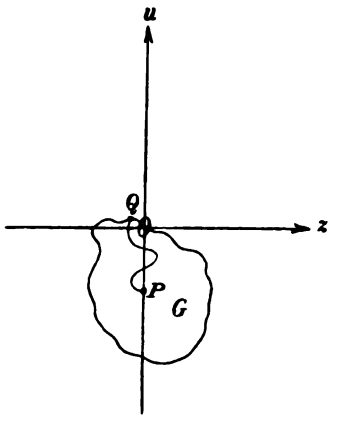


Fig. 2.

II.

In dem Falle, daß längs eines Stückes der u-Axe, etwa wieder für negative u, $\frac{\partial f}{\partial u} \cdot u$ positiv ist $\left(\text{hier also } \frac{\partial f}{\partial u} < 0\right)$, läßt sich ebenfalls ein den Punkt O mindestens in der Grenze enthaltendes Gebiet G konstruieren, innerhalb dessen die Bedingungen des § 3 erfüllt sind. Und zwar ist die nach den Betrachtungen des § 3 ausgezeichnete Richtung gerade die positive Richtung der u-Axe, da für eine von einem Punkte P des Gebietes G in dieser Richtung ausgehende Bewegung $\frac{\partial f}{\partial u} \cdot u' < 0$ ist. Nunmehr läßt sich die Schlußweise aus I genau übertragen, indem man sich jetzt auf die Resultate des § 3 stützt, sodaß auch für diesen Fall die Instabilität bewiesen ist.

III.

Der letzte Fall, wo, etwa wieder für negative u, $\frac{\partial f}{\partial u} \cdot u'$ längs der u Achse negativ, also hier $\frac{\partial f}{\partial u}$ positiv ist, scheint zunächst der leichtere zu sein; seine exakte Erledigung erfordert aber eine kleine Überlegung. Lassen wir nämlich die Bewegung im Punkte O nach den Anfangsbedingungen des § 2 beginnen aber mit negativem u', so ist anfangs

sicher $\frac{\partial f}{\partial u} \cdot u'$ negativ, so daß die Methode des § 3 in Geltung tritt. Einige Schwierigkeit verursacht nur der exakte Nachweis dafür, daß die Bahn das Gebiet G, in dem $\frac{\partial f}{\partial u} > 0$ ist, nicht in beliebiger Nähe des Punktes O verläßt. Dieses Hindernis läßt sich aber auf folgende Weise umgehen. Konstruieren wir das Dirichletsche Bewegungsgebiet, für das ja $U \leqq k^2$, so ziehen sich dessen Grenzen bei abnehmendem k immer dichter an die u-Achse heran. Da aber die Grenzen des Gebietes G fest sind, so muß man k so klein nehmen können, daß die Grenze des Gebietes G, von O an durchlaufen, das Dirichletsche Bewegungsgebiet in einem Punkte Q verläßt, dessen Ordinate einen dem absoluten Werte nach mit k beliebig klein werdenden, dem Vorzeichen nach negativen*) Wert, sagen wir $u(k)$, besitzt. Nehmen wir nun als Ausgangsstelle der Bewegung nicht den Punkt O, sondern einen Punkt O', der etwa die Ordinate $2 \cdot u(k)$ hat, so kann die von diesem Punkte ausgehende Bahnkurve das Gebiet G nicht mehr in beliebiger Nähe von O verlassen, es müßte denn vorher u' sein Zeichen gewechselt haben. Wir wissen aber nach § 3, daß das nur möglich ist, wenn u einen bestimmten endlichen Wert angenommen hat. Wir kennen also jetzt eine Bahnkurve, die in beliebiger (d. h. mit k verschwindender) Nähe von O beginnend mit $k = 0$ gegen eine bestimmte von Null verschiedene Grenze konvergiert; die Instabilität der Gleichgewichtslage O ist damit bewiesen.

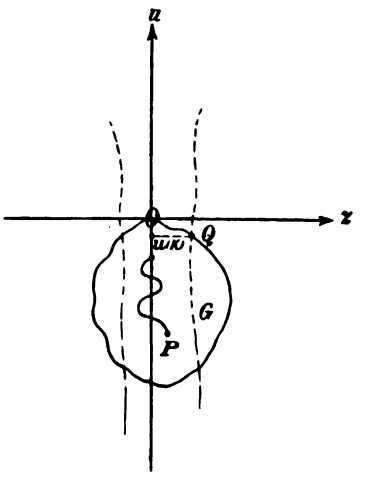


Fig. 3.

§ 5.

Erweiterung der Voraussetzungen.

Wir können jetzt die Voraussetzungen über U resp. f erweitern. Wir können z. B. zulassen, daß U noch auf anderen Kurven verschwindet, welche die Kurve C schneiden. Denn die einzige Modifikation, welche dadurch eintritt, ist die, daß sich jetzt das Dirichletsche Bewegungsgebiet in der Grenze $k = 0$ auf ein Kurvengeäst zusammenzieht. Das schadet

*) Sollte dieser Wert positiv sein, das Gebiet G also in der Umgebung des Punktes O beiderseits über die x-Axe hinausgreifen, so ist die ganze Betrachtung nicht nötig.

aber nichts, außer in dem Fall, daß die Grenze des Gebietes G in § 4 mit einem Aste von $U = 0$ zusammenfällt. Denn dann können wir z. B. nicht mehr schließen, daß der Punkt Q aus § 4, I in O einrückt. Diese Schwierigkeit aber läßt sich vermeiden, wenn wir das Gebiet G etwas einengen, so daß jetzt seine Grenzen nicht mehr mit einem Aste von $U = 0$ längs eines endlichen Stückes zusammenfallen.

Da aber von der Kurve C immer nur ein endliches Stück in Betracht kam*) und es uns z. B. in § 4 gar nicht mehr interessierte, ob für $u = 0$ das Potential $U(u, 0)$ überhaupt Null ist, oder aber längs anderer von O ausgehenden Kurven verschwindet, *so gilt der Satz der Instabilität auch noch, wenn die Kurve C eine nur abteilungsweise stetige Tangente besitzt.* Sie kann sogar Spitzen haben, wenn dieselben nur der Art sind, daß die Krümmung der Kurve überall endlich bleibt.

Es dürfte jedoch wünschenswert erscheinen, auch solche Fälle zu behandeln, in denen *die Kurve C eine Spitze besitzt, an der die Krümmung nicht endlich bleibt.* Die Schwierigkeit, welche zu den vorhergehenden Betrachtungen hinzukommt, besteht darin, daß bei dem Übergange von den Koordinaten x, y zu den Koordinaten u, z die ersten Ableitungen der Koeffizienten a, b nicht mehr notwendigerweise endlich ausfallen. Will man den Instabilitätssatz dann doch noch beweisen, so muß man in jedem Falle noch die Art des Unendlichwerdens in Betracht ziehen.

Eine allgemeine Erörterung gelingt nun noch für den Fall, der entschieden am nächsten liegt, daß nämlich die Kurve C sich in der Form darstellen läßt:

$$y - v^m \cdot \varphi(v) = 0;$$

dabei ist $v = x^{\frac{1}{m}}$ gesetzt; m ist eine Zahl größer als 1, φ nebst ihrer ersten Ableitung eine reguläre Funktion von v, die für $v = 0$ nicht verschwindet. Diese Klasse von Kurven umfaßt alle algebraischen Kurven bei geeigneter Wahl des Koordinatensystems. Ein bestimmter (reeller) Zweig dieser Kurve bis zu der Spitze $x = 0$, $y = 0$ sei ins Auge gefaßt.

Dann bedecken die entsprechend gewählten Zweige der Kurvenschar

$$-v^m\varphi(v) + y = z$$

eine Halbebene (genauer gesagt, einen Teil der Halbebene, nämlich diese soweit, als unsere Darstellung gilt) einfach und ebenso die Schar der orthogonalen Trajektorien:

$$-v^m h(v) + y = u,$$

wo h eine Funktion von v ist, welche denselben Charakter wie φ hat und sich

*) Die Fälle des § 4 umfassen ja alle Möglichkeiten; der §§ 2 und 3 bedurften wir nur aus methodischen Rücksichten.

durch diese eindeutig bestimmt. Wir wollen etwa annehmen, daß $x > 0$ diese Halbebene darstelle.

Setzen wir noch

$$v^m \cdot \varphi(v) = \alpha(x),$$

so ist $\alpha'(x)$ an der Stelle O endlich und von Null verschieden; ferner wird

$$v^m \cdot h(v) = -\int_0^x \frac{dx}{\alpha'(x)}$$

und daher

$$[\varphi(v) - h(v)]v^m = \alpha(x) + \int_0^x \frac{dx}{\alpha'(x)}$$

in x nur von der ersten Ordnung Null.

Infolgedessen läßt sich die Gleichung

$$v^m[\varphi(v) - h(v)] = u - z$$

umkehren und ergibt zum Resultat

$$v = (u-z)^{\frac{1}{m}} H\left((u-z)^{\frac{1}{m}}\right),$$

wo H eine reguläre, für $u = z$ nicht verschwindende Funktion von $(u-z)^{\frac{1}{m}}$ ist.

Welcher Wert von $(u-z)^{\frac{1}{m}}$ zu nehmen ist, ergibt sich aus der Festsetzung über den gewählten Zweig der ursprünglichen Kurve C.

Somit wird

$$x = (u-z)\, H^m\left((u-z)^{\frac{1}{m}}\right),$$

$$y = u + v^m h(v) = (u + (u-z)\, G\left((u-z)^{\frac{1}{m}}\right),$$

wo G ebenfalls eine reguläre Funktion des eingeschlossenen Argumentes ist.

Durch diese Substitution wird ein hinreichend kleines Stück der in Betracht kommenden x, y-Halbebene auf ein ebensolches Stück der u, z Ebene ein-eindeutig abgebildet. Da $x = 0$ in $u = z$ übergeht, so kommt für die Abbildung (s. Figur 4) die eine der beiden, durch $u = z$ abgeschnittenen Halbebenen in Betracht; welche von beiden, hängt von dem Vorzeichen von H^m ab. (Nehmen wir einmal an, es sei die untere Halbebene.)

Wenden wir nun die vorstehende Transformation auf unser mechanisches Problem an, so werden, wie man leicht ausrechnet, a und b positive endliche, und von Null verschiedene Funktionen von $\alpha'(x)$, sodaß die Ungleichheiten

$$|u'| < E \cdot k,$$

$$|z'| < E \cdot k$$

bestehen bleiben.

Dagegen erhalten die Ableitungen von a und b nach u und z den Faktor $\alpha''(x)$, während der andere Faktor endlich bleibt; und nun ist

$$\alpha''(x) = v^{1-m} \cdot K(v) = (u-z)^{\frac{1-m}{m}} J\left((u-z)^{\frac{1}{m}}\right),$$

wo K und J reguläre Funktionen der eingeschlossenen Argumente darstellen.

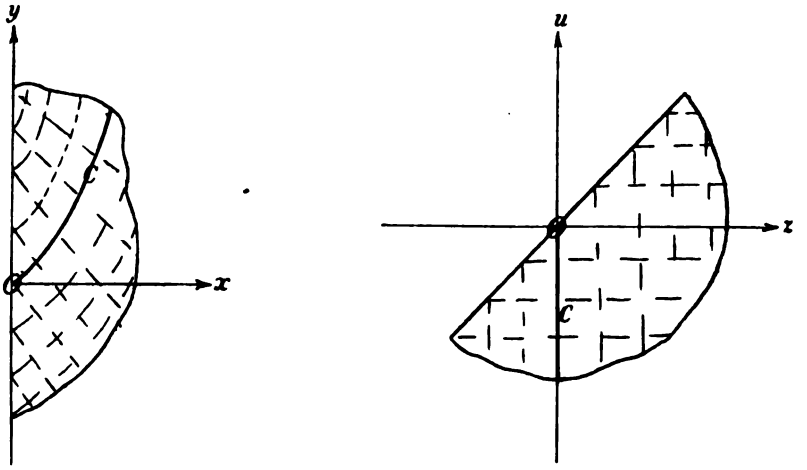


Fig. 4.

Wenn man also dieselben Betrachtungen wie in den vorhergehenden Paragraphen anstellt, so ändert sich weiter nichts, als daß das Integral

$$\int (u', z')_2 \, u' \, dt$$

jetzt dem absoluten Werte nach kleiner wird als

$$E \cdot k^2 \left| \int \frac{u' \, dt}{(u-z)^{\frac{m-1}{m}}} \right|.$$

Nun schränken wir das Bewegungsgebiet in § 4 noch dadurch ein, daß wir verlangen

$$-u > |\beta \cdot z|,$$

wo $\beta > 1$, im übrigen aber eine beliebige Konstante ist.

Dann wird das vorstehende Integral kleiner als

$$E \frac{k^2}{(\beta-1)^{\frac{m-1}{m}}} \left| \int_0^u \frac{du}{u^{1-\frac{1}{m}}} \right|$$

und das ist gleich einer endlichen Zahl multipliziert mit $k^2 |u|^{\frac{1}{m}}$.

Daher tritt an Stelle der früher stets benutzten Ungleichung jetzt die folgende

$$a u'^2 \geqq k^2 \left(1 - \vartheta \cdot E \cdot u^{\frac{1}{m}}\right),$$

aus der sich genau dieselben Schlüsse ziehen lassen wie früher.

Damit ist auch für die in diesen Paragraphen erweiterten Voraussetzungen die Instabilität des Gleichgewichts bewiesen. Insbesondere enthalten die bisherigen Ausführungen den folgenden Satz:

Ist das Potential $U(x-y)$ eine analytische Funktion, die mit Ausnahme eines gewissen Kurvensystems, auf dem sie verschwinde, überall positiv und endlich ist, und hat U an jeder Stelle dieses Kurvensystems den Charakter einer (ganzen oder gebrochenen) *rationalen Funktion, so ist jede Stelle des genannten Kurvensystems eine instabile Gleichgewichtslage.*

Die Methoden reichen aber *noch weiter* und dürften sich noch auf manche hier ausgeschlossene Fälle ausdehnen lassen. Insbesondere ist eine Übertragung der Resultate auf mehrere unabhängige Variable ohne Schwierigkeiten möglich.

Göttingen, im September 1902.

Zur Theorie der Gaußschen Summen.

Von

M. Lerch in Freiburg (Schweiz).

I.

Es sei ω eine rationale reelle Zahl und es bedeute, wie im folgenden überhaupt, $\sqrt{\frac{\omega}{i}}$ denjenigen Wert der Quadratwurzel, dessen reeller Teil positiv ist. Alsdann wird durch das System von Gleichungen

$$(1) \qquad \begin{cases} F(v+1) = F(v) - ie^{\frac{v^2\pi i}{\omega}}, \\ F(v+\omega) = F(v)e^{\pi i(2v+\omega)} + \sqrt{\frac{\omega}{i}} \end{cases}$$

eine eindeutige Funktion $F(v)$ der stetigen Variablen v vollkommen definiert.

Denn es ergeben sich aus (1) unmittelbar die Relationen

$$(2^1) \qquad F(v+n) = F(v) - i\sum_{\nu=0}^{n-1} e^{\frac{\pi i}{\omega}(v+\nu)^2},$$

$$(2^2) \qquad F(v-n) = F(v) + i\sum_{\nu=1}^{n} e^{\frac{\pi i}{\omega}(v-\nu)^2},$$

$$(2^3) \qquad F(v+n\omega) = e^{n\pi i(2v+n\omega)}F(v) + \sqrt{\frac{\omega}{i}}\sum_{\nu=0}^{n-1} e^{2\nu v\pi i + (2n\nu-\nu^2)\omega\pi i},$$

in welchen n eine positive ganze Zahl bedeutet. Wir werden häufig $F(v,\omega)$ an Stelle von $F(v)$ schreiben, wenn es nötig sein wird, den Parameter ω anzugeben; die Funktion $F\left(v, \frac{r}{s}\right)$, welche dem Falle eines positiven $\omega = \frac{r}{s}$ entspricht, läßt sich dann mit Hülfe der Gleichungen (2^1) für $n = r$ und (2^3) für $n = s$ direkt berechnen, womit unsere Behauptung erwiesen ist; ähnlich bestimmt sich $F\left(v, -\frac{r}{s}\right)$ mit Hülfe der Gleichungen (2^2) und (2^3). Die Resultate lauten

$$(3^1)\qquad \begin{cases} F\left(v, \frac{r}{s}\right)\cdot\left(1-(-1)^{rs}e^{2sv\pi i}\right) \\ \quad = i\sum\limits_{\nu=0}^{r-1} e^{\frac{s\pi i}{r}(\nu+v)^2} + \sqrt{\frac{r}{is}}\sum\limits_{\nu=0}^{s-1} e^{2\nu v\pi i - \frac{\nu^2 r\pi i}{s}}, \end{cases}$$

$$(3^2)\qquad \begin{cases} F\left(v, -\frac{r}{s}\right)\cdot\left(1-(-1)^{rs}e^{2sv\pi i}\right) \\ \quad = -i\sum\limits_{\nu=1}^{r} e^{-\frac{s\pi i}{r}(\nu-v)^2} + \sqrt{\frac{ir}{s}}\sum\limits_{\nu=0}^{s-1} e^{2\nu v\pi i + \frac{\nu^2 r\pi i}{s}}, \end{cases}$$

und sie zeigen, daß die Funktion $F(v)$ eine eindeutige analytische ist, und man kann, allerdings mit Heranziehung von viel komplizierteren Hülfsmitteln, beweisen, daß $F(v)$ eine *ganze* transcendente Funktion von v ist. Man verifiziert ferner leicht mit Hülfe der Fundamentalgleichungen (1) die Beziehungen

$$(4)\qquad F(v,\omega) = i\sqrt{\frac{\omega}{i}}\, e^{\frac{v^2\pi i}{\omega}} F\left(\frac{v}{\omega}, \frac{-1}{\omega}\right) + \sqrt{\frac{\omega}{i}},$$

$$(5)\qquad F(v,\omega) + F(1-v,\omega) = \sqrt{\frac{\omega}{i}},$$

und hieraus vermöge (1)

$$(5^0)\qquad F(v,\omega) + F(-v,\omega) = \sqrt{\frac{\omega}{i}} + ie^{\frac{v^2\pi i}{\omega}}.$$

Nimmt man als bekannt an, daß $F(v)$ für $v=0$ und $v=\frac{1}{2}$ endlich bleibt, so erschließt man aus (5) und (5⁰) die speziellen Werte

$$(6)\qquad F\left(\frac{1}{2},\omega\right) = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\omega}{i}}, \quad F(0) = \frac{1}{2}\left(i+\sqrt{\frac{\omega}{i}}\right),$$

oder wegen (3¹), wenn ω positiv ist,

$$(7)\qquad i\sum_{\nu=0}^{r-1} e^{\frac{\nu^2 s\pi i}{r}} + \sqrt{\frac{r}{is}}\sum_{\nu=0}^{s-1} e^{-\frac{\nu^2 r\pi i}{s}} = \frac{1-(-1)^{rs}}{2}\left(i+\sqrt{\frac{r}{is}}\right),$$

$$(8)\qquad i\sum_{\nu=0}^{r-1} e^{(2\nu+1)^2\frac{s\pi i}{4r}} + \sqrt{\frac{r}{is}}\sum_{\nu=0}^{s-1}(-1)^{\nu} e^{-\frac{\nu^2 r\pi i}{s}} = \frac{1-(-1)^{(r+1)s}}{2}\sqrt{\frac{r}{is}}.$$

Die Gleichung (7) wird sicher immer dann bestehen, wenn rs eine ungerade Zahl ist, weil alsdann der Ausdruck

$$1-(-1)^{rs}e^{2sv\pi i}$$

für $v=0$ von Null verschieden bleibt, und daher die Größe $F(0)$ sich mit Hülfe von (3¹) in völlig bestimmter Weise berechnen läßt. In diesem

Falle wird aber auch die Gleichung (7) selbstverständlich, da sich in jeder der beiden Summen die Glieder paarweise aufheben, und nur die Glieder $\nu = 0$ übrig bleiben. Der allein interessante Fall, wann die Gleichung (7) nicht eine selbstverständliche Identität wird, ist also der, wann rs eine gerade Zahl ist; dann lautet die Gleichung (7)

$$(7^0) \qquad i\sum_{\nu=0}^{r-1} e^{\frac{\nu^2 s\pi i}{r}} + \sqrt{\frac{r}{is}} \sum_{\nu=0}^{s-1} e^{-\frac{\nu^2 r\pi i}{s}} = 0$$

Diese Gleichung kann aber auch in der Form

$$(7^1) \qquad \sqrt{\frac{ri}{s}} \sum_{\nu=0}^{s-1} e^{-\frac{\nu^2 r\pi i}{s}} = \sum_{\nu=0}^{r-1} e^{\frac{\nu^2 s\pi i}{r}} \qquad (rs \text{ gerade})$$

geschrieben werden, und sie drückt diejenige Beziehung zwischen zwei Gaußschen Summen aus, welche Kronecker als das Reziprozitätsgesetz der letzteren bezeichnete, und welche bereits im Jahre 1840 (Comptes Rendus und Journal von Liouville) Cauchy gelehrt hat.

Nun läßt sich im Falle eines geraden $r \cdot s$ aus dem Bestehen der Gleichung (7^0) auch umgekehrt die Endlichkeit der Größe $F\left(v, \frac{r}{s}\right)$ für $v = 0$ nach (3^1) leicht erschließen; da alsdann nach (2^3) $F(n\omega) = F\left(\frac{nr}{s}\right)$ und somit wegen (2^1) und (2^2) auch $F\left(\frac{k}{s}\right)$ ($k = 0, \pm 1, \pm 2, \cdots$) endlich bleiben muß, und weil ferner nach (3^1) die Funktion $F(v)$ keine anderen singulären Stellen haben kann, als die Pole erster Ordnung $v = \frac{k}{s}$, so ist dann die Funktion $F(v)$ überall endlich und somit ganz. Es läßt sich daher aus dem Bestehen der Cauchyschen Reziprozität (7^0) allein schon der Umstand erschließen, daß $F\left(v, \frac{r}{s}\right)$ eine ganze Transcendente ist, sobald rs eine gerade Zahl bedeutet.

In ähnlicher Weise läßt sich aus dem Bestehen der Gleichung (8) für ein ungerades $r \cdot s$ die Folgerung ziehen, daß auch in diesem Falle $F\left(v, \frac{r}{s}\right)$ eine ganze Funktion ist.

Wir gehen nun dazu über, die Gleichungen (7) und (8) direkt zu begründen*).

---

*) Kronecker entwickelte die erste Reziprozitätsgleichung, welche auf die Relation (7) zurückkommt, nach Andeutungen Cauchys (l. c.), in seiner Abhandlung „Ueber den vierten Gaußschen Beweis des Reziprozitätsgesetzes für die quadratischen Reste" (Monatsberichte der Berliner Akademie, 1880), hat dann für dieselbe eine aus Dirichletschen Prinzipien geschöpfte Ableitung gegeben (Festschrift d. math. Gesell-

II.

Eine verhältnismäßig einfache und durchsichtige, sowie strenge Begründung der Cauchyschen Reziprozitätseigenschaft der Gaußschen Summen beruht auf der Formel

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{-\frac{\pi}{a}(u+n)^2} = \sqrt{a} \sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{-an^2\pi + 2nu\pi i}, \tag{9}$$

welche sich im Gaußschen Nachlaß vorfand und welche selbstständig von Cauchy entdeckt wurde und später bei Jacobis Untersuchungen über die elliptischen Transcendenten auftauchen mußte; in derselben bedeutet a eine komplexe Größe, deren reeller Teil positiv ist, und die Quadratwurzel $\sqrt{a}$ ist durch die Bedingung, daß ihr reeller Teil positiv sei, unzweideutig bestimmt. Neben der Formel (9) kommt namentlich der Spezialfall $u=0$ in Betracht, d. h.

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{-\frac{\pi}{a}n^2} = \sqrt{a} \sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{-an^2\pi}. \tag{9^0}$$

Es seien nun λ, μ zwei von Null verschiedene ganze Zahlen und man betrachte die Funktion

$$\varphi(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{-n^2\pi\left(x+\frac{\lambda i}{\mu}\right)}; \tag{10}$$

in derselben muß der reelle Teil der unabhängigen Veränderlichen x positiv sein, und wir wollen das Verhalten von $\varphi(x)$ für unendlich kleine Werte von x untersuchen. Zu dem Zwecke führen wir in (10) die Substitution $n = 2\mu m + \varrho$ $(0 \leqq \varrho < |2\mu|;\ m = 0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, \cdots)$ aus; setzen wir der Kürze wegen

$$\varphi_\varrho(x) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} e^{-4\mu^2 x\pi\left(m+\frac{\varrho}{2\mu}\right)^2}, \tag{10^a}$$

---

schaft in Hamburg, 1900; Vorlesungen über die Theorie der Integrale, herausg. von E. Netto, 1894).

Daß die von Cauchy benutzten, zum Teil von Laplace stammenden und von Kronecker ebenfalls angewendeten Grenzübergänge nicht vollkommen streng sind, habe ich vor mehreren Jahren erkannt, und habe namentlich 1887 in einem Aufsatze (Jornal de sc. math. e astron.; Porto; vol. VIII) die nötigen Ergänzungen ausgeführt. Der eigentliche Zweck jenes Aufsatzes war allerdings kein algebraischer, sondern es handelte sich um einen neuen Beweis der Tatsache, daß die elliptische Transcendente $\vartheta_3(0\,|\,\omega)$ über die reelle Achse hinaus in die negative Halbebene ω nicht fortgesetzt werden kann.

so lautet das Resultat

$$(10^b) \qquad \varphi(x) = \sum_{\varrho=0}^{|2\mu|-1} e^{-\frac{\varrho^2 \lambda \pi i}{\mu}} \varphi_\varrho(x).$$

Wir setzen nun $x = \xi + i\eta$, $\xi > 0$, und machen die Annahme, daß das Verhältnis $\frac{\eta}{\xi}$ in endlichen Grenzen bleibt, während beide Größen ξ und η unendlich klein werden.

Setzt man in der Gleichung (9)

$$u = \frac{\varrho}{2\mu}, \quad a = \frac{1}{4\mu^2 x},$$

so ergibt sich

$$\varphi_\varrho(x) = \frac{1}{|2\mu|\sqrt{x}} \sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{-\frac{n^2\pi}{4\mu^2 x} + \frac{n\varrho\pi i}{\mu}}$$

oder übersichtlicher geschrieben

$$(10^c) \qquad \varphi_\varrho(x) = \frac{1}{|2\mu|\sqrt{x}} + \frac{1}{|\mu|} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{x}} e^{-\frac{n^2\pi}{4\mu^2 x}} \cos\frac{n\varrho\pi}{\mu}.$$

Nun ist aber wegen $x = \xi + i\eta$

$$\left| e^{-\frac{n^2\pi}{4\mu^2 x}} \right| = e^{-\frac{n^2\pi}{4\mu^2\xi} \cdot \frac{1}{1+\sigma^2}},$$

wenn $\sigma = \frac{\eta}{\xi}$ gesetzt wird. Die Annahme, daß dieser Quotient σ in endlichen Grenzen bleibe, ergibt die Ungleichung

$$\frac{1}{1+\sigma^2} \geqq 2g,$$

wobei g eine positive, von x unabhängige Größe bedeutet. Es ist dann

$$\left| \frac{1}{\sqrt{x}} e^{-\frac{n^2\pi}{4\mu^2 x}} \cos\frac{n\varrho\pi}{\mu} \right| \leqq \frac{1}{\sqrt{\xi}} e^{-\frac{2n^2 g\pi}{4\mu^2\xi}},$$

und weil für hinreichend kleine ξ die Ungleichung

$$\frac{1}{\sqrt{\xi}} e^{-\frac{n^2 g\pi}{4\mu^2\xi}} < \delta$$

bei vorgeschriebenem positiven δ erfüllt wird, so ist

$$\left| \frac{1}{\sqrt{x}} e^{-\frac{n^2\pi}{4\mu^2 x}} \cos\frac{n\varrho\pi}{\mu} \right| < \delta e^{-\frac{n^2 g\pi}{4\mu^2\xi}};$$

da aber die Reihe

$$\sum_{n=1}^{\infty} e^{-\frac{n^2 g\pi}{4\mu^2\xi}}$$

z. B. für $\xi < 1$ unterhalb einer konstanten Grenze G bleibt, so folgt hieraus die Ungleichung

$$\left| \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{x}} e^{-\frac{n^2\pi}{4\mu^2 x}} \cos \frac{n\varrho\pi}{\mu} \right| < \delta G,$$

sobald x hinreichend klein wird, wenn nur die über $\eta : \xi$ getroffene Voraussetzung erfüllt ist.

Damit wird aber bewiesen, daß der zweite Teil der rechten Seite von (10^c) zu gleicher Zeit mit x unendlich klein (und zwar sehr intensiv) wird, sodaß also die Grenzformel

$$\lim_{x=0} \left[\varphi_\varrho(x) - \frac{1}{|2\mu|\sqrt{x}} \right] = 0 \tag{10^d}$$

folgt.

Setzen wir demnach in geringer Abweichung von Kronecker

$$G(\lambda, \mu) = \frac{1}{2} \sum_{\alpha=0}^{|2\mu|-1} e^{-\frac{\alpha^2 \lambda \pi i}{\mu}}, \tag{11}$$

so ergibt sich aus (10^b) und (10^d) die gewünschte Beziehung

$$\lim_{x=0} \left[\varphi(x) - \frac{G(\lambda, \mu)}{|\mu|\sqrt{x}} \right] = 0. \tag{12}$$

Sie kann in noch schärferer Weise durch die folgende Formel ausgesprochen werden

$$\vartheta_3 \left(0 \,\middle|\, -\frac{\lambda}{\mu} + ix \right) = \frac{G(\lambda, \mu)}{|\mu|\sqrt{x}} + R, \tag{12^*}$$

in welcher R eine Funktion von x bedeutet, die mit x so intensiv gegen die Null konvergiert, daß dabei alle Quotienten

$$\frac{R}{x^m} \qquad (m = 1, 2, 3, 4, \cdots)$$

unendlich klein werden*).

Eine Konsequenz der Gleichung (12) ist die Formel von Cauchy und Kronecker

$$\lim_{x=0} \sqrt{x}\, \varphi(x) = \frac{1}{|\mu|} G(\lambda, \mu). \tag{12^0}$$

Aus dem Bestehen der Formel (12^*) schließt man, daß die Funktion der komplexen Veränderlichen ω

---

*) Man bemerkt die Analogie der Formel (12^*) mit gewissen halbkonvergenten Entwickelungen, wie z. B. mit derjenigen für die Lambertsche Reihe $\sum \frac{1}{e^{nx} - 1}$ für kleine x. Näheres darüber findet sich in einer späteren Notiz.

$$\vartheta_3(0\,|\,\omega) = 1 + 2\sum_{n=1}^{\infty} e^{n^2\omega\pi i}$$

nur in positiver (nördlicher) Halbebene existieren kann. Denn bedeutet $(\alpha \cdots \beta)$ ein Stück der reellen Achse, so ist entweder für sämtliche rationale Werte $-\frac{\lambda}{\mu}$ des Intervalls $(\alpha \cdots \beta)$ der Ausdruck $G(\lambda, \mu)$ gleich Null, und dann wird nach (12*) die Funktion $\vartheta_3(0\,|\,\omega)$ unendlich klein, wenn sich ω irgend welchem rationalen Werte des Intervalls $(\alpha \cdots \beta)$ nähert. Wäre daher $\vartheta_3(0\,|\,\omega)$ im Intervalle synektisch, so müßte es daselbst überall gleich Null sein, und die Funktion müßte somit für sämtliche ω verschwinden, was aber nicht der Fall ist.

Man betrachte jetzt das Punktsystem (Mannigfaltigkeit) der rationalen Werte $-\lambda : \mu$, in welchen $G(\lambda, \mu)$ von Null verschieden ist. Jedes Intervall der reellen Achse, in welchem das betrachtete Punktsystem nicht überalldicht vertreten ist, muß nach dem Vorhergehenden eine singuläre Strecke für $\vartheta_3(0\,|\,\omega)$ sein. Ist aber im Intervalle $(\alpha \cdots \beta)$ unsere Mannigfaltigkeit überalldicht vertreten, so werden sich in der komplexen Umgebung eines jeden Punktes von $(\alpha \cdots \beta)$ Stellen finden lassen, wo nach (12*) die Funktion $\vartheta_3(0\,|\,\omega)$ beliebig große Werte annimmt; dieselbe kann also wieder in keinem Teile von $(\alpha \cdots \beta)$ synektisch sein*).

Indem wir nun wieder zu unserem Gegenstande zurückkehren, setzen wir in (9^0) $a = x + \frac{\lambda i}{\mu}$, wobei x reell und alsdann positiv vorausgesetzt werde; multipliziert man auf beiden Seiten mit $\sqrt{x}$, so kommt zunächst

$$\text{(a)} \qquad \lim_{x=0}\left\{\sqrt{x+\frac{\lambda i}{\mu}}\cdot\sqrt{x}\sum_{-\infty}^{\infty} e^{-n^2\pi\left(x+\frac{\lambda i}{\mu}\right)}\right\} = \lim_{x=0}\sqrt{x}\sum_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{n^2\pi}{x+\frac{\lambda i}{\mu}}}.$$

Die linke Seite ist nach (12^0) offenbar

$$\frac{1}{|\mu|}\,G(\lambda, \mu)\sqrt{\frac{\lambda i}{\mu}},$$

wobei die Quadratwurzel ihren reellen Teil positiv hat. Um aber den Ausdruck auf der rechten Seite von (a) zu ermitteln, beachten wir, daß

$$\frac{1}{x+\frac{\lambda i}{\mu}} = \frac{\mu}{\lambda i} + \frac{\mu^2 x}{\lambda^2 - i\lambda\mu x} = \frac{-\mu i}{\lambda} + z,$$

wenn

$$z = \frac{\mu^2 x}{\lambda^2 - i\lambda\mu x}$$

*) Man vergl. hierzu unseren oben zitierten Aufsatz.

gesetzt wird. Der imaginäre Teil von z wird hier im Verhältnis zum reellen unendlich klein (mit x), und somit nach (12⁰)

$$\text{(b)} \qquad \lim_{z=0} \sqrt{z} \sum_{-\infty}^{\infty} e^{-\pi^2 \pi \left(s - \frac{\mu i}{\lambda}\right)} = \frac{1}{|\lambda|} G(-\mu, \lambda).$$

Da aber

$$\lim \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{z}} = \left|\frac{\lambda}{\mu}\right|$$

ist, so ist aus (b) zu schließen, daß die rechte Seite von (a) den Wert

$$\left|\frac{\lambda}{\mu}\right| \cdot \frac{1}{|\lambda|} G(-\mu, \lambda) = \frac{1}{|\mu|} G(-\mu, \lambda)$$

hat; damit ist aber die Cauchy-Kroneckersche Reziprozität

$$\text{(13)} \qquad G(\lambda, \mu) \sqrt{\frac{\lambda i}{\mu}} = G(-\mu, \lambda)$$

bewiesen.

Da nun wie leicht zu sehen

$$(11^0) \qquad G(\lambda, \mu) = \frac{1 + (-1)^{\lambda\mu}}{2} \sum_{\alpha=0}^{|\mu|-1} e^{-\frac{\alpha^2 \lambda \pi i}{\mu}},$$

so wird sich aus (13) für $\lambda = r$, $\mu = s$, (rs gerade) die Gleichung (7¹) ergeben; die Beziehung (7) ist daher bewiesen.

III.

In den Berliner Monatsberichten vom Jahre 1880 versuchte Kronecker aus dem Bestehen der Relation (13) mit Rücksicht auf (12⁰) umgekehrt die Transformationsformel (9⁰) zu deduzieren*). In einer Fortsetzung**) bemerkt er später, daß seine Schlüsse auch dann bestehen bleiben, wenn man an Stelle von (13) die rein algebraisch zu begründende Tatsache

$$\frac{\sqrt{\frac{\lambda i}{\mu}}\, G(\lambda, \mu)}{G(-\mu, \lambda)} = \pm 1$$

benützt. Er beruft sich dabei auf den Cauchyschen Integralsatz für den Fall einer Kreisfläche

$$\text{(a)} \qquad \Phi(\xi) - 1 = \frac{1}{2\pi i} \int \frac{\Phi(x) - 1}{x - \xi}\, dx,$$

in dem er unter $\Phi(x)$ das eine Mal die Funktion

*) Seite 696 u. ff.

**) Seite 854 daselbst.

(b) $$\sqrt{\log\frac{1}{x}}\,\frac{\sum x^{n^2\pi}}{\sum y^{n^2\pi}}, \qquad \left(\begin{matrix}\log x\cdot\log y=1,\\ n=0,\pm1,\pm2,\cdots\end{matrix}\right)$$

das andere Mal ihr Quadrat setzt. In der Formel (a) hat die Kreisfläche einen Halbmesser $|x|=r<1$, welchen Kronecker gegen Eins konvergieren läßt. Er setzt $x=re^{2s\pi i}$, ferner

$$\frac{\Phi(x)-1}{x-\xi}=\chi(r,s),$$

nimmt dann an Stelle von (a) (S. 697, Z. 3)

(c) $$\Phi(\xi)-1=\frac{1}{2\pi i}\lim_{\mu=\infty}\frac{1}{\mu}\sum_{\lambda=0}^{\mu-1}\lim_{r=1}\chi\left(r,\frac{\lambda}{\mu}\right),$$

eine Gleichung, die durch nichts begründet wird.

Ihre Quelle wäre in der Formel zu suchen

$$\Phi(\xi)-1=\int_0^1\chi(r,s)re^{2s\pi i}ds, \qquad (|\xi|<r<1),$$

welche aus (a) durch obige Substitution hervorgeht; die rechte Seite ist alsdann gleich

$$\lim_{\mu=\infty}\frac{1}{\mu}\sum_{\lambda=0}^{\mu-1}\chi\left(r,\frac{\lambda}{\mu}\right)re^{\frac{2\lambda\pi i}{\mu}},$$

und man hätte daher die richtige Gleichung

(c′) $$\Phi(\xi)-1=\lim_{r=1}\lim_{\mu=\infty}\frac{1}{\mu}\sum_{\lambda=0}^{\mu-1}\chi\left(r,\frac{\lambda}{\mu}\right)e^{\frac{2\lambda\pi i}{\mu}},$$

wenn sich von der Funktion $\Phi(\xi)$ beweisen ließe, daß sie innerhalb des Kreises $|\xi|\leqq 1$ synektisch bleibt*). Aber auch nach Beseitigung des formalen Versehens, das sich in Kroneckers Formel (c) eingeschlichen hat, spricht kein Grund für ihre Richtigkeit. Denn die Gleichung

(c″) $$\lim_{r=1}\lim_{\mu=\infty}\frac{1}{\mu}\sum_{\lambda=0}^{\mu-1}\bar{\chi}\left(r,\frac{1}{\mu}\right)=\lim_{\mu=\infty}\frac{1}{\mu}\sum_{\lambda=0}^{\mu-1}\lim_{r=1}\bar{\chi}\left(r,\frac{\lambda}{\mu}\right),$$

welche die korrigierte Kroneckersche Formel (c) wiedergeben würde, ist nur dann richtig, wenn die Funktion $\bar{\chi}(r,s)$ gewisse Grenzbedingungen erfüllt, von denen in der Kroneckerschen Beweisführung gar keine Rede ist.

*) Eine Wiedergabe der falschen Ausführungen Kroneckers findet sich in Herrn Bachmanns *Analytischer Zahlentheorie* (Leipzig, 1894), S. 179—183.

Außerdem ist kaum leicht direkt nachzuweisen, daß der Ausdruck (b) oder sein Quadrat innerhalb der Kreisfläche $|x| \leqq 1$ eindeutig bleibt. Denn nach einem positiven Umlauf um den Nullpunkt verwandelt sich $\log x$ in $\log x + 2\pi i$,

$$y \text{ in } e^{\frac{1}{\log x + 2\pi i}}, \qquad x^{n^2\pi} \text{ in } e^{2n^2\pi^2 i} x^{n^2\pi},$$

und es müßte daher zunächst der Nachweis geführt werden, daß die Größe

$$\text{(b')} \qquad \sqrt{\log \frac{1}{x} - 2\pi i} \cdot \frac{\sum e^{2n^2\pi^2 i} x^{n^2\pi}}{\sum e^{\frac{n^2\pi}{\log x + 2\pi i}}}$$

bis auf das Vorzeichen mit der Größe (b) übereinstimmt.

Aus diesen Gründen ist der Beweisversuch Kroneckers als vollständig verfehlt zu bezeichnen. Ja er ist sogar dadurch nicht zu retten, daß man den Cauchyschen Integralsatz durch einen anderen Fundamentalsatz der Funktionentheorie ersetzen würde, der besagt, daß eine analytische Funktion von ω ($\omega = x + iy, y > 0$) identisch verschwindet, wenn sie sich zu gleicher Zeit mit y der Null nähert.

Es wurde nämlich bewiesen, daß die Größe

$$\text{(d)} \qquad \frac{\sqrt{\frac{\omega}{i}}\, \vartheta_3(0 \mid \omega)}{\vartheta_3\left(0 \,\middle|\, \frac{-1}{\omega}\right)}$$

in

$$\frac{\sqrt{\frac{\lambda i}{\mu}}\, G(\lambda, \mu)}{G(-\mu, \lambda)},$$

also in ± 1 übergeht, wenn ω sich dem rationalen Werte $-\frac{\lambda}{\mu}$ unendlich nähert, aber über das Verhalten der Größe (d) beim Grenzübergang zu irrationalen Werten von ω ist nichts bekannt.

Daß die hier dargelegten Bedenken auch tatsächlich begründet erscheinen, läßt sich am bequemsten durch die Betrachtung der Funktion

$$f(\omega) = 2 \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n (2n+1)\, e^{\left(n+\frac{1}{2}\right)^2 \omega \pi i},$$

d. h. von

$$f(\omega) = \frac{1}{\pi}\, \vartheta_1'(0 \mid \omega)$$

dartun.

Setzt man $\omega = ix - \frac{\lambda}{\mu}$, und benützt die bequemere Form

$$f(\omega) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} (-1)^n (2n+1)\, e^{\left(n+\frac{1}{2}\right)^2 \omega \pi i},$$

so verwandelt sich durch die Substitution $n = 2\mu m + \varrho$ der Ausdruck $f(\omega)$ in

$$\text{(e)} \qquad \sum_{\varrho=0}^{|2\mu|-1} (-1)^{\varrho} e^{-\left(\varrho+\frac{1}{2}\right)^2 \frac{\lambda\pi i}{\mu}} \sum_{m=-\infty}^{\infty} (4m\mu+2\varrho+1)\, e^{-4\mu^2 x\pi(m+\sigma)^2},$$

wobei

$$\sigma = \frac{2\varrho+1}{4\mu}$$

gesetzt wurde. Differenziert man nun die beiden Seiten der Gleichung (9) nach u, so folgt

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} (n+u) e^{-\frac{\pi}{a}(u+n)^2} = -i \cdot a\sqrt{a} \sum_{n=-\infty}^{\infty} n e^{-an^2\pi + 2nu\pi i};$$

wird hier $a = \frac{1}{4\mu^2 x}$, $u = \sigma$ genommen, so ergibt sich

$$\sum_{m=-\infty}^{\infty} (m+\sigma)\, e^{-4\mu^2 x\pi(m+\sigma)^2} = \frac{1}{4|\mu|^3 x\sqrt{x}} \sum_{n=1}^{\infty} n e^{-\frac{n^2\pi}{4\mu^2 x}} \sin 2n\sigma\pi;$$

die rechte Seite wird aber mit x unendlich klein, und deshalb nähert sich auch der Ausdruck (e) zugleich mit x der Null; also

$$\lim_{x=0} f\left(ix - \frac{\lambda}{\mu}\right) = 0.$$

Die Funktion $f(\omega)$ nähert sich daher der Null, wenn ω gegen einen rationalen Wert konvergiert, und trotzdem bleibt die Funktion $f(\omega)$ in der ganzen Halbebene von Null verschieden*).

IV.

Es bleibt uns noch übrig, die Gleichung (8) zu beweisen, um die Eigenschaft von $F\left(u, \frac{r}{s}\right)$ als ganze Funktion von u auch für ungerade $r \cdot s$ zu begründen. Ich betrachte zu dem Zwecke die Ausdrücke:

*) Wenn man die Theorie der elliptischen Funktionen nicht benutzen will, so ist von den Beweisen der Relation (9) der von Gauß und Cauchy wohl am einfachsten. Derselbe beruht auf der trigonometrischen Entwickelung der linken Seite, man kann aber auch vom Laurentschen Satze Gebrauch machen. Eine andere Begründung desselben Resultates kann aber auch mit Hülfe eines Fundamentalsatzes der Theorie der erzeugenden Funktionen geleistet werden, welchen ich im Jahre 1892 in den Schriften der Prager Akademie bewiesen habe, und dessen neue Bearbeitung im 27. Bande der Acta mathematica abgedruckt ist.

$$\psi(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} (-1)^n e^{-n^2\pi\left(x+\frac{\lambda i}{\mu}\right)},$$

$$\chi(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{-\left(n+\frac{1}{2}\right)^2\pi\left(x+\frac{\lambda i}{\mu}\right)}$$

für unendlich kleine x. Es ergibt sich durch Anwendung von genau denselben Schlüssen, wie oben, daß die Differenzen

$$\psi(x) - \frac{1}{|2\mu|\sqrt{x}} \sum_{\varrho=0}^{|2\mu|-1} (-1)^\varrho e^{-\frac{\varrho^2\lambda\pi i}{\mu}},$$

$$\chi(x) - \frac{1}{|2\mu|\sqrt{x}} \sum_{\varrho=0}^{|2\mu|-1} e^{-\left(\varrho+\frac{1}{2}\right)^2\frac{\lambda\pi i}{\mu}}$$

mit x unendlich klein werden.

Setzt man daher:

$$(14) \qquad \begin{cases} G_0(\lambda,\mu) = \frac{1}{2} \sum_{\varrho=0}^{|2\mu|-1} (-1)^\varrho e^{-\frac{\varrho^2\lambda\pi i}{\mu}}, \\ G_2(\lambda,\mu) = \frac{1}{2} \sum_{\varrho=0}^{|2\mu|-1} e^{-\left(\varrho+\frac{1}{2}\right)^2\frac{\lambda\pi i}{\mu}}, \end{cases}$$

so folgt:

$$\lim_{x=0} \sqrt{x}\,\psi(x) = \frac{1}{|\mu|} G_0(\lambda,\mu),$$

$$\lim_{x=0} \sqrt{x}\,\chi(x) = \frac{1}{|\mu|} G_2(\lambda,\mu),$$

und wenn man in der Thetarelation

$$\sqrt{a} \sum_{-\infty}^{\infty} (-1)^n e^{-an^2\pi} = \sum_{-\infty}^{\infty} e^{-\left(n+\frac{1}{2}\right)^2\frac{\pi}{a}}$$

an Stelle von a den Ausdruck $x + \frac{\lambda i}{\mu}$ setzt, dann beide Seiten mit $\sqrt{x}$ multipliziert und zur Grenze für $x = 0$ übergeht, so ergibt sich die neue Beziehung

$$(15) \qquad G_0(\lambda,\mu)\sqrt{\frac{\lambda i}{\mu}} = G_2(-\mu,\lambda),$$

die schon Kronecker bekannt war*).

*) l. c., S. 860.

Man leitet ferner aus (14) unmittelbar ab

$$(14^{\text{bis}}) \qquad \begin{cases} G_0(\lambda,\mu) = \dfrac{1+(-1)^{(\lambda+1)\mu}}{2} \displaystyle\sum_{\varrho=0}^{|\mu|-1} (-1)^{\varrho} e^{-\frac{\varrho^2 \lambda \pi i}{\mu}}, \\ G_2(\lambda,\mu) = \dfrac{1+(-1)^{\lambda(\mu+1)}}{2} \displaystyle\sum_{\varrho=0}^{|\mu|-1} e^{-(2\varrho+1)^2 \frac{\lambda \pi i}{\mu}}, \end{cases}$$

und hieraus folgt vermöge (15) für $\lambda = r$, $\mu = s$, wenn rs ungerade ist, die Relation (8).

Die Tatsachen, daß einerseits die Gleichungen (1) eine ganze transcendente Funktion $F(u)$ definieren, und daß andererseits die Reziprozitäten (13) und (15) bestehen, finden sich in solchem logischen Zusammenhange, daß jede derselben als eine Konsequenz der anderen erscheint.

Dabei vermitteln die Reziprozitäten einen Zusammenhang zwischen den elliptischen Theta-Nullwerten ϑ_3, ϑ_0, ϑ_2, und zwischen derjenigen analytischen Funktion der komplexen Veränderlichen u und ω, welche die Gleichungen (1) befriedigt. Ein Unterschied zwischen den beiden Kategorien von Funktionen tritt hier in der Form auf, daß die eben erwähnten Theta-Nullwerte auf die positive Halbebene beschränkt sind, während sich $F(u,\omega)$ in Bezug auf ω in der reellen Achse (außer in $\omega = 0$) regulär verhält. Aus diesem letzten Umstande glaube ich schließen zu dürfen, daß die Reziprozitäten (13) und (15) vielmehr der Theorie der Funktion $F(u,\omega)$ als der der elliptischen Funktionen angehören.

Wenn der imaginäre Teil von ω positiv ist, so hat die analytische Funktion*)

$$\Psi(u,\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{\pi i}{\omega}\left(x+\frac{i}{2}-iu\right)^2} \frac{dx}{1+e^{2x\pi}}$$

dieselben Eigenschaften wie $F(u,\omega)$; daß sie über die reelle Achse hinaus in die negative Halbebene fortgesetzt werden kann, erkennt man leicht durch Modifikation des Integrationsweges; für rationale reelle Werte des ω stimmt daher $\Psi(u,\omega)$ mit unserem $F(u,\omega)$ überein; die *Eigenschaft von* $\Psi(u) = F(u)$ *als ganze Funktion von u tritt dabei in Evidenz.*

Eine elementare Herleitung der Eigenschaften unserer Transcendente $F\left(u, \pm\frac{r}{s}\right)$, so wie sie hier versucht worden ist, erscheint wohl als wünchens-

*) Die Grundlagen der Theorie der Funktion $\Psi(u,\omega)$ habe ich in zwei Abhandlungen entwickelt, welche unter den Schriften der Prager Akademie (1892, Nr. 24 und 1893, Nr. 23) erschienen sind. Außerdem habe ich — in etwas abgeänderter Form — darüber in der 66. Naturforscherversammlung in Wien einen Vortrag gehalten.

wert, und es wäre eine wesentliche Vervollkommnung der Theorie, wenn es einmal gelingen sollte, das Hauptresultat unabhängig von der Theorie der elliptischen Funktionen und von der Integralrechnung zu ergründen*).

Dasselbe Verfahren, welches wir oben zur Bestimmung von $F\left(u, \pm\frac{r}{s}\right)$ benutzten, leistet die Darstellung — in endlicher Form — jeder Funktion, welche einfache Periodizitätsbeziehungen gegenüber dem Parallelogramm $(1, \omega)$ besitzt, und bestimmt und endlich bleibt, wenn ω in eine reelle rationale Zahl übergeht.

Die arithmetischen Funktionen $G_0(\lambda, \mu)$ und $G_2(\lambda, \mu)$ sind eigentlich keine neuen Gebilde, da wie man leicht sieht

$$G_0(\lambda, \mu) = G(\lambda + \mu, \mu) \quad (\lambda \text{ ungerade}),$$

und (μ ungerade),

$$G_2(\lambda, \mu) = e^{-\frac{\lambda\mu\pi i}{4}} G(\lambda + \mu, \mu), \text{ wenn } \lambda \text{ ungerade},$$
$$G_2(2h, \mu) = i^{-h\mu} G(2h, \mu).$$

Auch läßt sich die Relation (15) mit Zuhülfenahme von (13) direkt beweisen.

Die Auswertung der Summen G_0 und G_2 geschieht daher mit Hülfe der bekannten Resultate

$$G(2h, m) = \left(\frac{h}{m}\right)\sqrt{m}, \quad (m \equiv 1, \text{ mod. } 4),$$

$$G(n, 2k) = \left(\frac{k}{n}\right)(1 - i^n)\sqrt{k}, \quad (k > 0),$$

wobei angenommen wird, daß die beiden Argumente $2h$ und m, resp. n und $2k$ relativ prim sind, und die Quadratwurzeln entweder positiv oder imaginär positiv sind, wie im folgenden überhaupt. Es ist dann

$$G_0(\lambda, m) = \left(\frac{2\lambda}{m}\right)\sqrt{m}, \quad (m \equiv 1, \text{ mod. } 4),$$

$$G_0(n, 2k) = (-1)^{\left[\frac{k}{2}\right]}\left(\frac{k}{n}\right)(1 - i^{(2k+1)n})\sqrt{k}, \quad (k > 0),$$

$$G_2(m, \mu) = \frac{1 - i}{\sqrt{2}}\left(\frac{m}{2\mu}\right)\sqrt{\mu},$$

$$G_2(2h, m) = (-i)^h\left(\frac{h}{m}\right)\sqrt{m},$$

wobei immer $m \equiv 1 \pmod 4$, und μ ungerade vorausgesetzt wird.

*) Ich bemerke nur noch, daß das Existenzgebiet der Funktion $\Psi(u, \omega)$ in Bezug auf ω eine Riemannsche Fläche ist, die aus einer vollen Ebene $\omega = x + iy$ als oberem Blatt und aus einer Halbebene $y < 0$ als unterem Blatt besteht; die Übergangslinie verläuft von $\omega = 0$ bis $\omega = \infty$ in der negativen Halbebene, und die reelle Achse des unteren Blattes ist eine singuläre Linie der Funktion.

Über die arithmetische Gleichung $Cl(-\Delta)=1$.

Von

M. LERCH in Freiburg (Schweiz).

Wir betrachten die quadratischen Formen $ax^2+bxy+cy^2=(a,b,c)$, in welchen der mittlere Koeffizient b nicht notwendig gerade zu sein braucht*). An Stelle der Gaußschen Determinante tritt dann die Diskriminante $D=b^2-4ac$; wir bemerken, daß die Gaußschen Formen der Determinante n nichts anderes sind als die Kroneckerschen Formen mit der Diskriminante $4n$.

Wir bezeichnen im folgenden mit $Cl(-\Delta)$ die Anzahl der positiven und primitiven Klassen der quadratischen Formen der negativen Diskriminante $-\Delta$; letztere kann immer in der Form $-\Delta_0 Q^2$ vorausgesetzt werden, wobei Q eine positive ganze Zahl und $-\Delta_0$ die der $-\Delta$ entsprechende Fundamental- (oder Stamm-) Diskriminante bezeichnet, über deren Definition man die zitierten Arbeiten nachsehen kann.

Die bekannte Relation

$$(1)\qquad Cl(-\Delta_0 Q^2)=\frac{2}{\tau_0}Q\prod_q\left(1-\left(\frac{-\Delta_0}{q}\right)\frac{1}{q}\right)\cdot Cl(-\Delta_0)$$

gestattet dann die Bestimmung der Klassenzahl auf den Fall einer Fundamentaldiskriminante zurückzuführen; darin bedeutet in üblicher Weise τ_0 die Zahl 2, wenn $\Delta_0>4$, dagegen ist $\tau_0=4$ für $\Delta_0=4$ und $\tau_0=6$ für $\Delta_0=3$.

Man überzeugt sich leicht, daß den Diskriminanten $-\Delta$ für $\Delta=3$, 4, 7, 8, 11, 19, 43, 67, 163 nur eine Klasse entspricht; ob dadurch die

*) Diese ältere Gestalt der quadratischen Formen bietet gegenüber der von Gauß und Dirichlet behandelten $ax^2+2bxy+cy^2$ gewisse Vorzüge; die Modifikationen, welche alsdann in den Dirichletschen Resultaten einzutreten haben, finden sich in den Arbeiten Kroneckers (Berliner Sitzungsberichte, 1885, p. 768 u. ff.) und des Herrn H. Weber (Göttinger Nachrichten, 1893). Als Kommentar der Kroneckerschen Arbeiten ist überdies ein Werk des Herrn de Séguier (formes quadratiques et multiplication complexe; Berlin, F. L. Dames, 1894) zu nennen.

Gesamtheit der Diskriminanten, wofür $Cl(-\Delta)=1$ ist, erschöpft sei, läßt sich mit den uns zu Gebote stehenden Hülfsmitteln kaum erledigen. Deswegen verdient das neulich durch elementare Betrachtungen begründete Resultat des Herrn Ed. Landau (Math. Ann. Bd. 56, p. 671), nach welchem die negativen Gaußschen *Determinanten* $-1, -2, -3, -4, -7$ die einzigen sind, denen die Klassenanzahl $h=1$ zukommt, ein besonderes Interesse. Dasselbe läßt sich auch so formulieren, daß die Gleichung $Cl(-4n)=1$ nur die fünf Lösungen $n=1, 2, 3, 4, 7$ zuläßt, und kann leicht mit Hülfe der Relation (1) und mit Benützung der analytisch leicht zu verifizierenden Tatsache, daß $Cl(-\Delta_0)$ für zusammengesetzte Fundamentaldiskriminanten außer für $\Delta_0=4$ und 8 immer gerade ist, bewiesen werden. Das soll im folgenden gezeigt werden.

In der Gleichung (1) bezieht sich das Produkt auf der rechten Seite auf alle verschiedenen Primfaktoren q von Q; wir setzen $Q=Q'\cdot\prod q$, sodaß also $Q'=1$ sein muß, wenn Q durch kein Quadrat teilbar sein soll; alsdann lautet die Gleichung (1) wie folgt

$$(1^*)\qquad Cl(-\Delta_0 Q^2)=\frac{2}{\tau_0}Q'\prod_q\left(q-\left(\frac{-\Delta_0}{q}\right)\right)\cdot Cl(-\Delta_0).$$

Ist nun zunächst $\Delta_0=4$, also $\tau_0=4$, so wird

$$(2)\qquad Cl(-4Q^2)=\frac{1}{2}Q'\prod_q\left(q-\left(\frac{-4}{q}\right)\right).$$

Für $q=3, 5, 7, \cdots$ ist immer $q-\left(\frac{-4}{q}\right)\geqq 4$, und daher wird die rechte Seite von (2) immer die Einheit übertreffen, wenn Q 'eine ungerade Primzahl enthält; die hier einzig zulässige Primzahl $q=2$ ergibt aber

$$\frac{1}{2}\left(q-\left(\frac{-4}{q}\right)\right)=1,$$

und es muß daher $Q'=1$, $Q=2$ sein, wenn $Cl(-4Q^2)$ den Wert Eins haben soll. D. h.

„die Gleichung $Cl(-4Q^2)=1$ hat nur die zwei Lösungen $Q=1$ und $Q=2$".

Es sei zweitens $\Delta_0=3$, also $\tau_0=6$; dann lautet die Gleichung (1*) einfach

$$(3)\qquad Cl(-3Q^2)=\frac{1}{3}Q'\prod_q\left(q-\left(\frac{-3}{q}\right)\right).$$

Ist eine der Primzahlen q größer als 3, so ist die rechte Seite immer gerade und daher größer als Eins; ferner ist $q-\left(\frac{-3}{q}\right)$ gleich 3 für $q=2$

sowie für $q=3$, und es kann daher, da $Q'=1$ genommen werden muß, die Zahl Q nur die Werte 2 oder 3 haben, sodaß

„die Gleichung $Cl(-3Q^2)=1$ keine anderen Lösungen als $Q=1, 2, 3$ zuläßt".

Ist schließlich $\Delta_0>4$, also $\frac{2}{\tau_0}=1$, so kann die rechte Seite von (1*) nur für $Q'=1$ und für primzahlige Δ_0 oder für $\Delta_0=8$ ungerade sein. Ist zunächst $\Delta_0=8$, so wird $q-\left(\frac{-\Delta_0}{q}\right)$ immer von Eins verschieden, und daher $Cl(-8Q^2)=1$ nur für $Q=1$ stattfinden.

Ist aber Δ_0 eine Primzahl, so kann höchstens $Q=q=2$ dem Ausdruck (1*) den Wert Eins erteilen, und zwar nur wenn $\left(\frac{2}{\Delta_0}\right)=1$, d. h. wenn $\Delta_0\equiv 7 \pmod 8$ ist. Nun ist in der Tat $Cl(-7)=1$, also auch $Cl(-4\cdot 7)=1$; dagegen für $\Delta_0=8k-1$, $k\geqq 2$ hat man mindestens zwei inäquivalente reduzierte Formen der Diskriminante $-\Delta_0=1-8k$, nämlich

$$(1, 1, 2k),\quad (2, 1, k),$$

und daher wird nie $Cl(-\Delta_0)$ den Wert Eins haben, falls

$$\Delta_0=8k-1>7.$$

Alles zusammengefaßt, hat die Gleichung $Cl(-\Delta)=1$ die Lösungen $\Delta=4, 8; 3, 12, 27; 8; 7, 28$; außer denselben besitzt sie nur primzahlige Lösungen und zwar von der Form $\Delta=8k+3$; einige derselben sind tatsächlich bekannt, nämlich $\Delta=11, 19, 43, 67, 163$, es bleibt jedoch dahingestellt, ob es deren mehrere gibt.

Damit ist auch das Resultat des Herrn Landau bewiesen. Die von ihm benützte Methode, weil sie auf die Gleichung $Cl(-4\Delta_0)=3$ zurückkommt, versagt bei der Behandlung der Gleichung $Cl(-\Delta)=1$ für ungerade Δ; man kann nur schließen, daß in diesem Falle sämtliche Ausdrücke

$$\Delta,\ \frac{\Delta+1}{4}=p,\ p+1\cdot 2,\ p+2\cdot 3,\cdots,p+m(m+1)$$

$\left(\text{wenn } m=\left[\sqrt{\frac{\Delta}{12}}-\frac{1}{2}\right]\right)$ Primzahlen sein müssen.

Preisaufgabe der Fürstlich Jablonowskischen Gesellschaft. Mathematisch-naturwissenschaftliche Sektion.

(Bekannt gemacht im Jahresbericht der Gesellschaft, Leipzig, im März 1903.)

Für das Jahr 1906.

Durch neuere Arbeiten von Hurwitz, Matter, Krause*) u. a. hat die Theorie der Bernoullischen Zahlen und Funktionen nach verschiedenen Seiten hin eine bemerkenswerte Erweiterung erfahren. Da eine Fortsetzung dieser Untersuchungen nicht bloß für die Funktionentheorie, sondern auch für die Zahlentheorie wie für die Theorie der elliptischen Funktionen von Wichtigkeit sein dürfte, so wünscht die Gesellschaft dazu die Anregung zu geben und schlägt, ohne damit die Arbeitsrichtung etwaiger Bewerber beschränken zu wollen,

eine Untersuchung der den Bernoullischen Zahlen analogen Zahlen, namentlich im Gebiete der elliptischen Funktionen vor, welche die komplexe Multiplikation zulassen.

Preis 1000 Mark.

Die anonym einzureichenden Bewerbungsschriften sind, wenn nicht die Gesellschaft im besonderen Falle ausdrücklich den Gebrauch einer andern Sprache gestattet, in *deutscher, lateinischer* oder *französischer* Sprache zu verfassen, müssen *einseitig geschrieben* und *paginiert*, ferner mit einem *Motto* versehen und von einem *versiegelten Umschlage* begleitet sein, welcher auf der Außenseite das Motto der Arbeit trägt, inwendig den Namen und Wohnort des Verfassers angibt. Jede Bewerbungsschrift muß auf dem Titelblatte die Angabe einer Adresse enthalten, an welche

*) Hurwitz, Göttinger Nachr. 1897, S. 273 und Mathem. Annalen Bd. 51, S. 196, Matter, Naturforsch. Gesellsch. Zürich 1900, S. 238, Krause, Leipziger Berichte 1902, S. 139.

die Arbeit für den Fall, daß sie nicht preiswürdig befunden wird, zurückzusenden ist. Die Zeit der Einsendung endet mit dem 30. *November des angegebenen Jahres*, und die Zusendung ist an den derz. Sekretär der Gesellschaft zu richten. Die Resultate der Prüfung der eingegangenen Schriften werden durch die Leipziger Zeitung im März des folgenden Jahres bekannt gemacht. Die gekrönten Bewerbungsschriften werden Eigentum der Gesellschaft.

Czuber, E., Wahrscheinlichkeitsrechnung und ihre Anwendung auf Fehlerausgleichung, Statistik und Lebensversicherung. [XV u. 594 S.] gr. 8. 1903. In Leinwand geb. n. ℳ 24.—

Enriques, F., Professor an der Universität Bologna, Vorlesungen über projektive Geometrie. Deutsche Ausgabe von Dr. phil. Hermann Fleischer in Göttingen. Mit einem Einführungswort von Felix Klein und 187 Figuren im Text. gr. 8. 1903. geb. ℳ 8.— In Leinw. geb. ℳ 9.—

Föppl, Prof. Dr. **Aug.**, Vorlesungen über technische Mechanik. In 4 Bänden, gr. 8. Preis des ganzen Werkes in 4 Leinwand-Bänden n. ℳ 44.—

I. Band. Einführung in die Mechanik. (1. Aufl. 1898.) 2. Aufl. [XIV u. 412 S.] 1900. geb. n. ℳ 10.—
II. — Graphische Statik. (1. Aufl. 1900.) 2. Aufl. [XII u. 471 S.] 1903. geb. n. ℳ 12.—
III. — Festigkeitslehre. (1. Aufl. 1897.) 2. Aufl. [XVIII u. 512 S.] 1900. geb. n. ℳ 12.—
IV. — Dynamik. (1. Aufl. 1898.) 2. Aufl. 1901. [XV u. 397 S.] geb. n. ℳ 12.—

Gleichen, Dr. **A.**, Oberlehrer am Königl. Kaiser Wilhelms-Realgymnasium zu Berlin, Lehrbuch der geometrischen Optik. Aus Teubners Sammlung von Lehrbüchern auf dem Gebiete der mathematischen Wissenschaften mit Einschluß ihrer Anwendungen. Band VIII. Mit 251 Figuren im Text. [XIV u. 511 S.] gr. 8. 1902. geb. n. ℳ 20.—

Grassmann's, Hermann, gesammelte mathematische und physikalische Werke. Auf Veranlassung der mathematisch-physikalischen Klasse der Königl. Sächsischen Gesellschaft der Wissenschaften und unter Mitwirkung der Herren Jacob Lüroth, Eduard Study, Justus Grassmann, Hermann Grassmann der Jüngere, Georg Scheffers herausgegeben von Friedrich Engel. II. Band. II. Teil. Die Abhandlungen zur Mechanik und zur mathematischen Physik. Mit 51 Figuren im Text. gr. 8. 1902. geh. n. ℳ 14.—

Hamburger, M., Gedächtnisrede auf Immanuel Lazarus Fuchs. Mit dem Bildnis des Verstorbenen sowie einem Verzeichnis seiner Schriften. gr. 8. 1902. geh. n. ℳ 1.—

Hensel, K., und **G. Landsberg**, Theorie der algebraischen Funktionen einer Variabeln und ihre Anwendung auf algebraische Kurven und Abelsche Integrale. Mit zahlreichen Textfiguren. [XVI u. 708 S.] gr. 8. 1902. In Leinwand geb. n. ℳ 28.— (Auch in 2 Hälften zu je n. ℳ 14.—)

Klein, F., Anwendung der Differential- und Integralrechnung auf Geometrie, eine Revision der Prinzipien. Vorlesung, gehalten während des Sommersemesters 1901. Ausgearbeitet von Conrad Müller. [VIII u. 468 S.] gr. 8. 1902. geh. n. ℳ 16.—

König, Julius, Einleitung in die allgemeine Theorie der algebraischen Größen. Aus dem Ungarischen übertragen vom Verfasser. gr. 8. 1903. geh. n. ℳ 16.—, geb. n. ℳ 20.—

Krazer, Dr. **Adolf**, o. Professor der Mathematik an der Technischen Hochschule zu Karlsruhe, Lehrbuch der Thetafunktionen. Mit 9 Textfiguren. gr. 8. 1903. In Leinw. geb. n. ℳ 24.—

Kübler, J., Baurat in Eßlingen, Die Berechnung der Kessel- und Gefäßwandungen. In zwei Teilen. I. Teil: Aufstellung der allgemeinen Gleichungen. Mit 6 Figuren. Mit einem Anhang: Welches Hindernis versperrt in der Knick-Theorie den Weg zur richtigen Erkenntnis? [52 S.] gr. 8. 1902. geh. n. ℳ 1.60.

Schenk, Dr. ing. **Julius**, Festigkeitsberechnung größerer Dampfturbinen. Mit 45 Figuren im Text und auf einer Doppeltafel. [IV u. 59 S.] gr. 8. 1903. geh. n. ℳ 1.80.

Schreiber, Dr. **K.**, die Theorie der Mehrstoffdampfmaschinen. Untersuchung der Frage: „Ist Wasser die vorteilhafteste Flüssigkeit zum Betriebe von Dampfmaschinen?“ und Herleitung der auf diese Frage sich ergebenden Antworten. Mit 12 Zeichnungen im Text. [IV u. 126 S.] gr. 8. 1903. geh. n. ℳ 3.60.

————— —————, Die Kraftmaschinen. Für Zuhörer an der Universität Greifswald gehaltene Vorlesungen über die wichtigsten der zur Zeit gebrauchten Kraftmaschinen. Mit 1 Tafel und 66 Abbildungen im Text. [XII u. 348 S.] gr. 8. 1903. geh. n. ℳ 6.—, geb. n. ℳ 6.80.

Serret-Bohlmann, Lehrbuch der Differential- und Integral-Rechnung. Zweite, durchgesehene Auflage. Dritter Band. Erste Lieferung. Differentialgleichungen. Herausgegeben von G. Bohlmann und E. Zermelo. Mit 10 in den Text gedruckten Figuren. [304 S.] gr. 8. 1903. geh. n. ℳ 6.—

Study, E., Geometrie der Dynamen. Die Zusammensetzung von Kräften und verwandte Gegenstände der Geometrie. Mit in den Text gedruckten Figuren und einer Tafel. [XIII u. 603 S.] gr. 8. 1903. geh. n. ℳ 21.—, geb. n. ℳ 23.—

Wölffing, Dr. Ernst, Professor an der Königl. Technischen Hochschule zu Stuttgart, Mathematischer Bücherschatz. Systematisches Verzeichnis der wichtigsten deutschen und ausländischen Lehrbücher und Monographien des 19. Jahrhunderts auf dem Gebiete der mathematischen Wissenschaften. In zwei Teilen. I. Teil: Reine Mathematik. Mit einer Einleitung: Kritische Übersicht über die bibliographischen Hilfsmittel der Mathematik. (Abhandlungen zur Geschichte der mathematischen Wissenschaften mit Einschluß ihrer Anwendungen. Begründet von Moritz Cantor. Heft XVI, 1.) [XXXVI u. 416 S.] gr. 8. 1903. geh. n. ℳ 14.—, geb. n. ℳ 15.—

INHALT.

Seite

Über die Fourierschen Konstanten integrierbarer Funktionen. Von A. Hurwitz in Zürich 425

Volumen und Oberfläche. Von Hermann Minkowski in Göttingen 447

Über den Rauminhalt der Polyeder. Von S. O. Schatunowsky in Odessa. (Mit 7 Figuren im Text) 496

Über Tschebyschefsche Annäherungsmethoden. Von Paul Kirchberger in Weilburg an der Lahn. (Mit 5 Figuren im Text) 509

Über die Instabilität der Gleichgewichtslage eines Systems von zwei Freiheitsgraden. Von Georg Hamel in Karlsruhe. (Mit 4 Figuren im Text) . . 541

Zur Theorie der Gaußschen Summen. Von M. Lerch in Freiburg (Schweiz) . 554

Über die arithmetische Gleichung $Cl(-\Delta) = 1$. Von M. Lerch in Freiburg (Schweiz) 568

Preisaufgabe der Fürstlich Jablonowskischen Gesellschaft. Mathematisch-naturwissenschaftliche Sektion 571

Wir ersuchen unsere geehrten Herren Mitarbeiter, etwaige den Abhandlungen beizufügende Figuren — gleichviel ob dieselben im Texte selbst oder auf besonderen Tafeln veröffentlicht werden sollen — im Interesse einer raschen und exakten Ausführung stets auf besonderen Blättern, wenn möglich in der gewünschten Größe und in tunlichst präziser Zeichnung den Manuskripte beilegen zu wollen. Außerdem wird um möglichst genaue Angabe der Adresse gebeten.

Die Redaktion.

☞ **Jeder Band der Annalen besteht aus 4 Heften und umfaßt ca. 36 Druckbogen. Um jedoch in jedem Heft nur abgeschlossene Artikel zu geben, werden die einzelnen Hefte mitunter von ungleicher Stärke sein.**

Der Preis für den Band von 4 Heften beträgt 20 Mark; jährlich erscheinen etwa 4—6 Hefte. Alle Buchhandlungen und Postanstalten nehmen Bestellungen an.

Verantwortliche Redaktion: **F. Klein**, Göttingen, Wilh.-Weber-Str. 3, **W. v. Dyck**, München, Hildegardstr. 1½, **David Hilbert**, Göttingen, Wilh.-Weber-Str. 29.

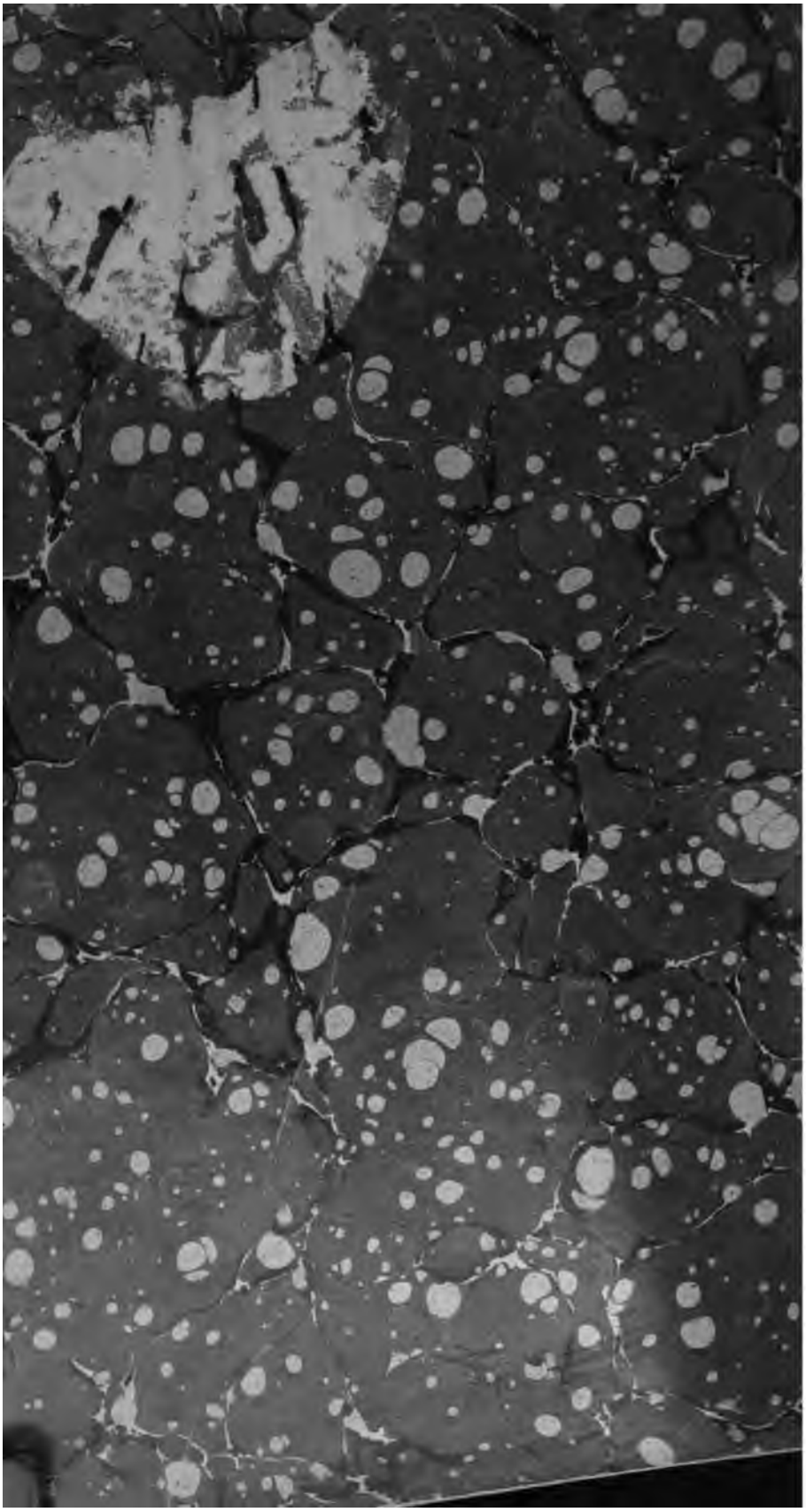
Hierzu Beilagen von **B. G. Teubner** in **Leipzig**, welche wir der Beachtung unserer Leser bestens empfehlen.

Druck und Verlag von B. G. Teubner in Leipzig, Poststraße 3.

[redacted] Stat.

MATHEMATICS-STATISTICS
LIBRARY

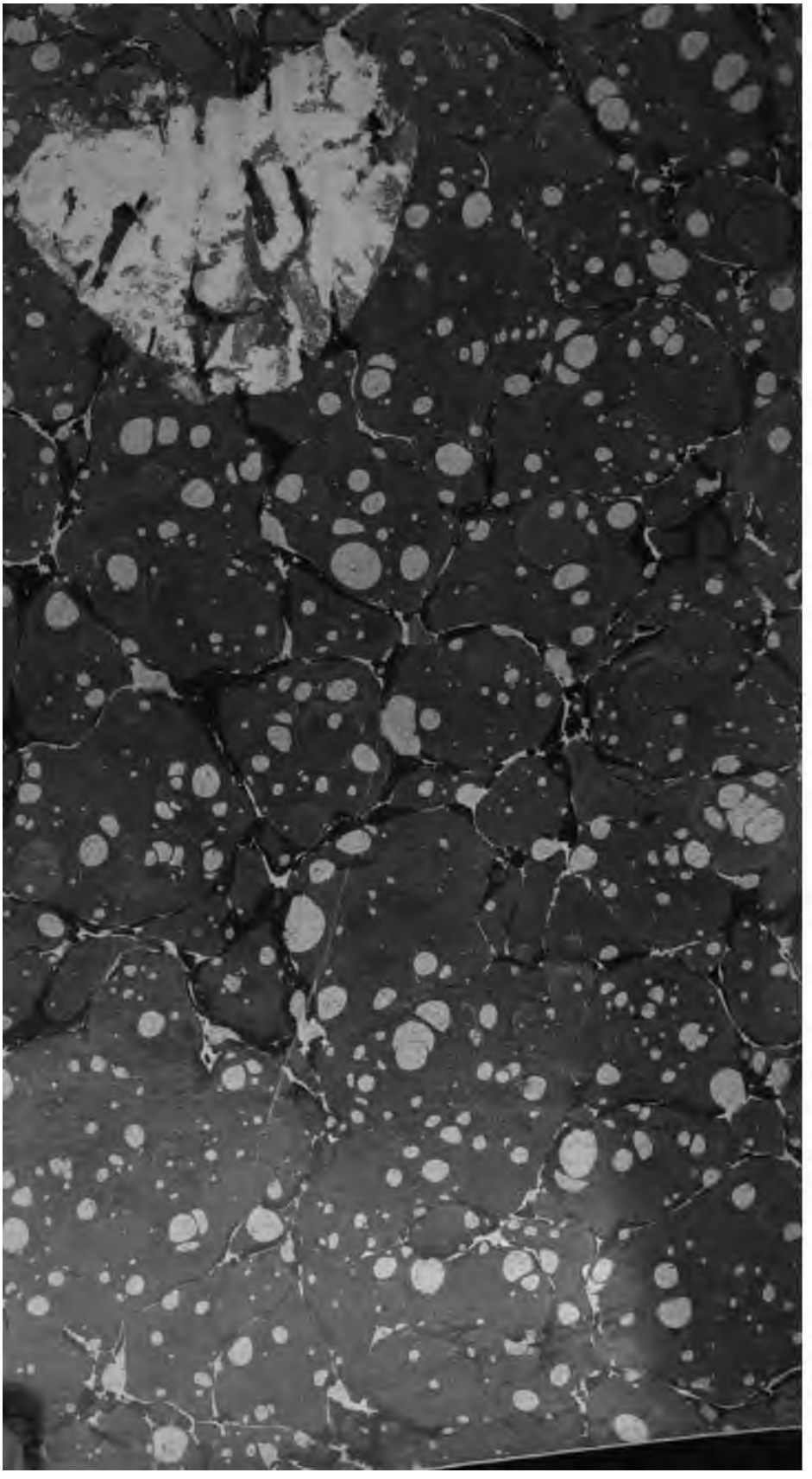
STORAGE AREA

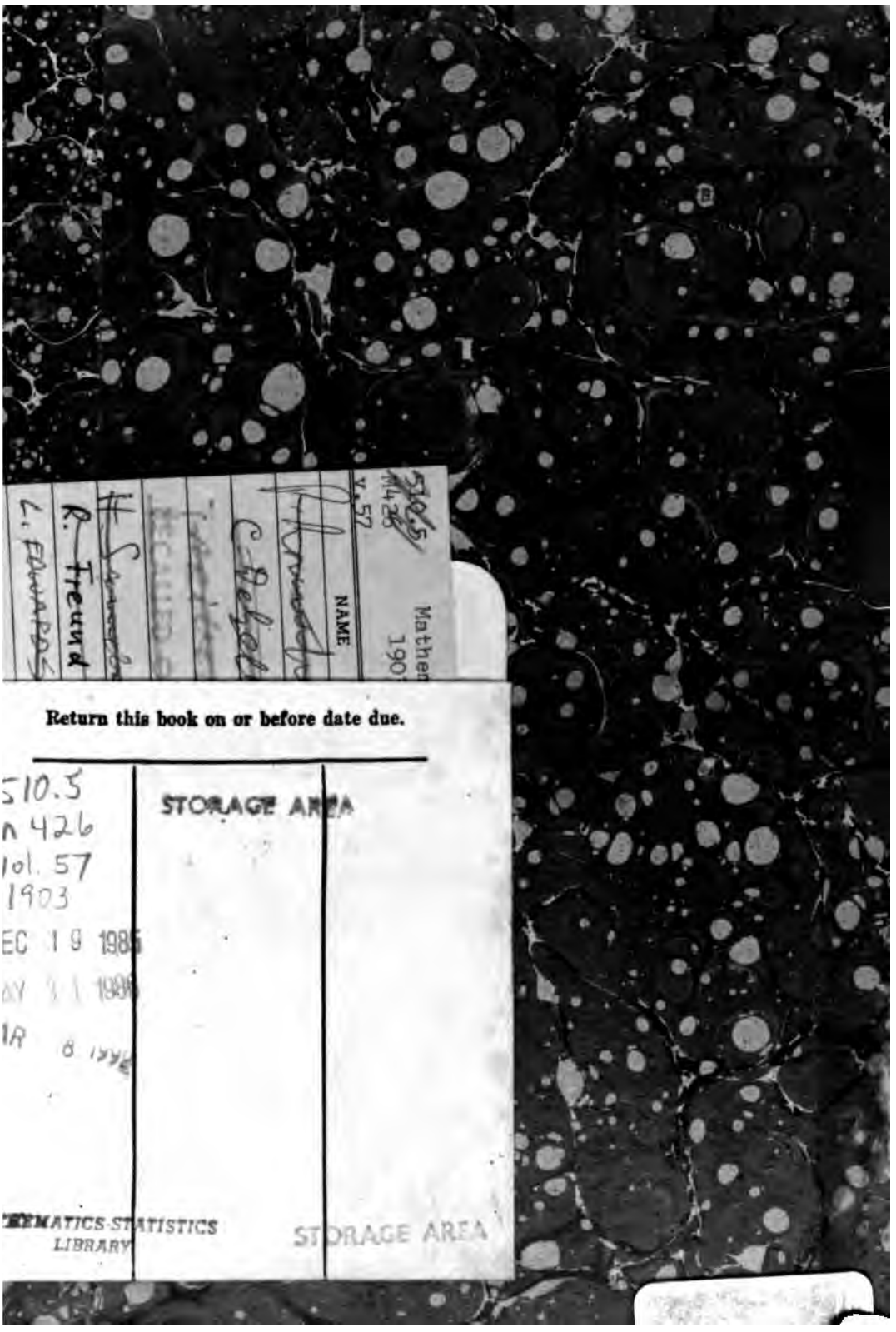


[redacted] STAT.

MATHEMATICS-STATISTICS
LIBRARY

STORAGE AREA




NAME
Return this book on or before date due.
STORAGE AREA
STORAGE AREA